علم مقاومة المواد للهندسة المدنية





مهندس
شريف فتحي الشافعي



دار الكتب العلمية
للنشر والتوزيع
القــاهرة


دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع
٥٠ شارع الشيخ ريحان - عابدين - القاهرة
٢٧٩٥٤٢٢٩
www.sbh-egypt.com
e-mail : sbh@link.net
Scientific Book House


دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع
٥٠ شارع الشيخ ريحان - عابدين - القاهرة
☎ ٢٧٩٥٤٢٢٩
www.sbh-egypt.com
e-mail : sbh@link.net
Scientific Book House

علم مقاومة المواد
للهندسة المدنية

[يشتمل على ٦٠ مثالاً عمليًا]

اعداد

م / **شريف الشافعي**

دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع

دار الكتب المصرية
فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية

الشافعى،شريف
علم مقاومة المواد للهندسة المدنية/ اعداد شريف الشافعي – ط١ .
القاهرة : **دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع** ٢٠١١م
٤٠٠ ص ، ١٧ X ٢٤سم
ردمك : ١-٤٦-٥٠٢٩-٩٧٧-٩٧٨
١. مقاومة المواد ٢. الهندسة المدنية
أ. العنوان
ديوى ٦٢٠.١١٢٤٢ ٢٠١١/٢١٣٠٩

الطبعة الأولى
١٤٣٣هـ - ٢٠١٢ م

رقم الايداع : ٢٠١١/٢١٣٠٩
ردمـــك : ١-٤٦-٥٠٢٩-٩٧٧-٩٧٨

دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع
٥٠ شارع الشيخ ريحان – عابدين – القاهرة
☎ ٢٧٩٤٨٦١٩- ٢٧٩٥٤٢٢٩
فاكس: ٢٧٩٢٨٩٨٠

لمزيد من المعلومات يرجي زيارة موقعنا على الإنترنت

www.sbhegypt.org
e-mail : sbh@link.net

الفصل الأول

الإجهادات والانفعالات البسيطة

في هذا الفصل

- تصنيف الأحمال.
- الإجهاد.
- الإجهاد البسيط.
- الانفعال.
- الإجهاد والاستطالة الناتجان في قضيب بسبب وزنه الذاتي.
- الشداد tie bar ذو القوة المنتظمة.
- الإجهاد المتولد في قضيب بسبب الدوران.
- استطالة قضيب مستدق.
- استطالة قضيب مخروطي بسبب وزنه الذاتي.
- نسبة بواسون.
- العلاقات بين ثوابت المرونة.
- الإجهادات المتولدة في الشدادات أو الدعامات المدمجة.
- الإجهادات والانفعالات الحرارية.
- الإجهاد الحلقي.

١-١ تصنيف الأحمال

الحمل يمكن أن يُعرف على إنه تأثير مركب أو مشترك لقوى خارجية تؤثر في جسم ما. والأحمال يمكن أن تُصنف على إنها: (i) أحمال ميتة، و(ii) أحمال حية أو متراوحة fluctuating، و(iii) أحمال أو قوى استمرارية (القصور الذاتي) inertia forces، بالإضافة إلى (iv) أحمال أو قوى طرد مركزي.

الطريقة الأخرى للتصنيف تكون (i) أحمال شد، و(ii) أحمال انضغاط، و(iii) أحمال لي أو إلتواء، و(iv) أحمال انثناء، بالإضافة إلى (v) أحمال قص.

والحمل قد يكون أيضًا "نقطة" (أو مركز) أو "موزع".

الحمل النقطة (المركز). حمل النقطة أو الحمل المركز هو الحمل الذي يُعتبر أنه يؤثر عند نقطة ما. وفي الممارسةِ الفعليةِ، الحمل يجب أن يكون موزعًا عبر مساحة صغيرة، لأن، مثل تلك الاتصالات الحادة الحواف تكون في العادة غير ممكنة، وغير محتملة.

الحمل الموزع. الحمل الموزع يكون الحمل الموزع أو المنتشر بطريقة ما عبر طول الكمرة. ولو أن الانتشار منتظمًا، (أي بمعدل منتظم، لنقل أنه kN أو N في كل متر) فإنه يقال عنه أنه حمل موزع بانتظام ويُشار له اختصارًا بالرمز u.d.l. ولو أن الانتشار ليس بمعدل منتظم، فإنه يُقال أنه حمل غير موزع بانتظام. وفي هذا الصدد نقول أن الأحمال الموزعة توزيعًا مثلثيًا أو توزيع شبة منحرف تقع تحت هذا الصنف.

١-٢ الإجهاد Stress

عندما يكون جسم ما متأثرًا بحمل ما أو بقوة خارجية، فإنه يتشوه (أي يحدث تغيير في الشكل أو الأبعاد) ويزداد هذا التشوه تدريجيًا. وفي أثناء التشوه، تعمل مادة الجسم على مقاومة ميل أو نزعة الحمل إلى تشويه الجسم، وعندما تتم السيطرة على تأثير الحمل بواسطة المقاومة الداخلية لمادة الجسم، فإنه يصبح حينئذ مستقر stable. هذه المقاومة الداخلية التي يقدمها الجسم لمواجهة الحمل تعرف بالإجهاد stress.

والإجهاد يمكن أن يُتعامل معه على إنه إجهاد كلي total stress أو إجهاد وحدة unit stress. فالإجهاد الكلي يمثل المقاومة الكلية لتأثير خارجي ويُعبر عنه إما بـ N أو kN، أو MN. أما إجهاد الوحدة فيمثل المقاومة المتكونة بواسطة وحدة مساحة لمقطع عرضي، ويُعبر عنه إما بـ kN/m^2 أو MN/m^2 أو N/mm^2. ونحن في هذا الكتاب سوف نستخدم كلمة إجهاد للإشارة إلى إجهاد الوحدة.

الأنواع المختلفة من الإجهادات يمكن تصنيفها كالآتي:

(١) إجهاد بسيط أو مباشر

(i) شد (ii) ضغط (iii) قص.

(٢) إجهاد غير مباشر

(i) انثناء (ii) شد.

(٣) إجهاد مركب.

أي مزيج محتمل من النوعين (١) و(٢).

هذا الفصل يتعامل مع الإجهادات البسيطة فقط.

٣-١ الإجهاد البسيط Simple stress

الإجهاد البسيط يُعرف غالبًا بالإجهاد المباشر لأنه يتكون تحت حالات التحميل المباشر. وذلك أنه يحدث شد بسيط أو ضغط بسيط عندما تكون القوة المطبقة، التي يُطلق عليه الحمل، في خط واحد مع محور العضو (التحميل المحوري) (الشكل رقم (١) والشكل رقم (٢))، ويحدث قص بسيط، عندما تميل قوى متوازية ومتساوية في المقدار ومتضادة في الاتجاه إلى إحداث سطح للانزلاق منسوبًا إلى السطح الملاصق (الشكل رقم (٣)).

P P	شكل رقم (١)
إجهاد شد	

P P	شكل رقم (٢)
إجهاد ضغط	

شكل رقم (٣)

(a) برشامة مقاومة للقص

(b) انكسار برشامة بسبب القص

في حالات تحميل معينة، نجد أن الإجهادات التي تتكون لا تكون إجهاد بسيطة. فعلى سبيل المثال، وبالرجوع إلى الشكل رقم (٤)، العضو معرض لحمل وهذا الحمل متعامد على محور العنصر (التحميل المستعرض transverse loading) (الشكل رقم (٥)). هذا سوف يجعل العنصر ينثني، مما يؤدي إلى حدوث تشوه للمادة وتتكون الإجهادات داخليًا لمقاومة التشوه. أنواع الإجهادات الثلاثة كلها – الشد، والانضغاط، والقص – سوف تتكون، ولكنها لن تكون إجهادات بسيطة، حيث أنها لم تحدث بواسطة تحميل مباشر.

شكل رقم (٤)

(a) اللكمة وهي تَقتربُ مِنْ الصحن

(b) اللكمة تقص الصحن.

(c) لطمة توضح المنطقة المقصوصة.

W	شكل رقم (٥)
كمرة بسيطة التدعيم (التحميل المستعرض)	

عندما يتكون أي إجهاد بسيط (σ)، فإننا نستطيع حينئذ حساب مقدار الإجهاد عن طريق العلاقة التالية:

$\sigma = P / A$	(1)

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
σ	الإجهاد ويُقاس إما بالـ kN/m^2 أو بالـ N/mmm^2.
P	الحمل (عبارة عن قوة خارجية تتسبب في جعل الإجهاد يتكون) وهو يُقاس إما بالـ kN أو بالـ N.
A	المساحة التي عبرها يتكون الإجهاد، وهي تُقاس إما بالـ m^2 أو بالـ mm^2.

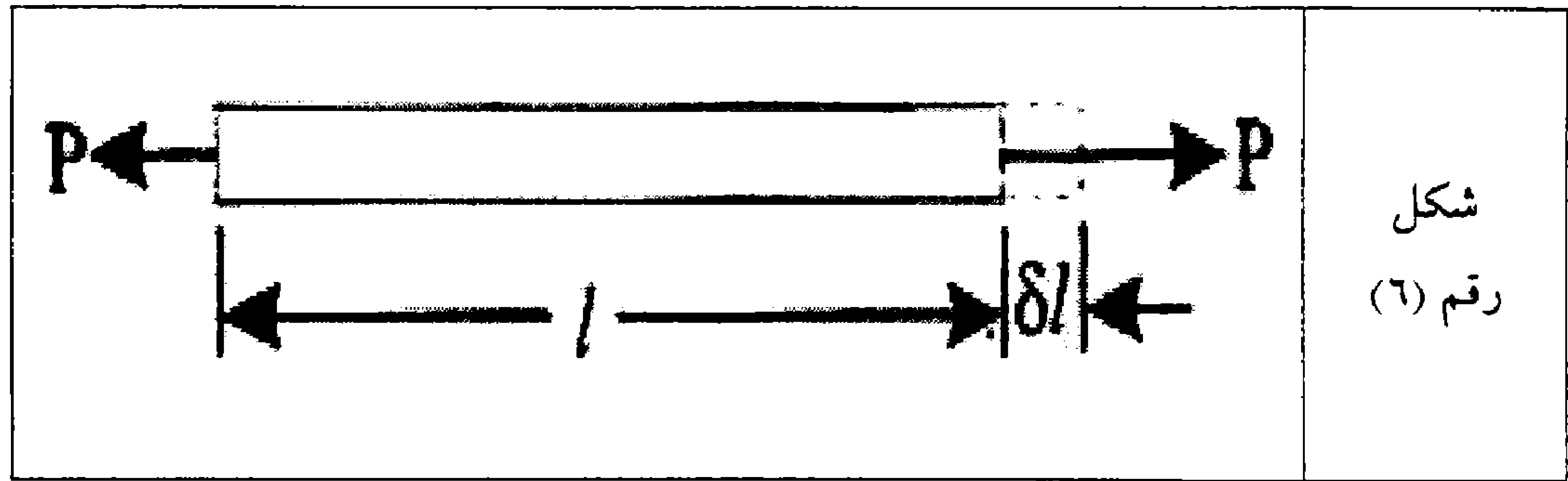
قد يُلاحظ أنه في حالات الشد البسيط أو حالات الضغط البسيط، تكون المناطق المقاومة للحمل متعامدة على اتجاه القوى. وعندما يكون عنصر ما معرضًا لقص بسيط، حينئذ تكون المنطقة المقاومة موازية لاتجاه القوة. هذا، ومن خلال الشكلين رقم (٤) ورقم (٥) نشاهد الحالات الشائعة التي تتسبب في حدوث إجهادات قص.

١-٤ الانفعال Strain

أي عنصر بغض النظر عن مادته يكون معرضًا لإجهاد يُقال عنه أنه منفعل. والانفعال (e) يكون التشوه المنتج بواسطة الإجهاد. والأنواع المختلفة من الانفعالات سيتم شرحها فيما يلي عبارة عن:

١-٤-١ انفعال الشد Tensile Strain

أي قطعة من المادة، لها مقطع عرضي منتظم، ومعرضة لإجهاد شد محوري منتظم، سوف يزيد طولها من (l) إلى (l+δl)، (الشكل رقم (٦)) ومقدار الزيادة في الطول (δl) يكون التشوه الفعلي للمادة.

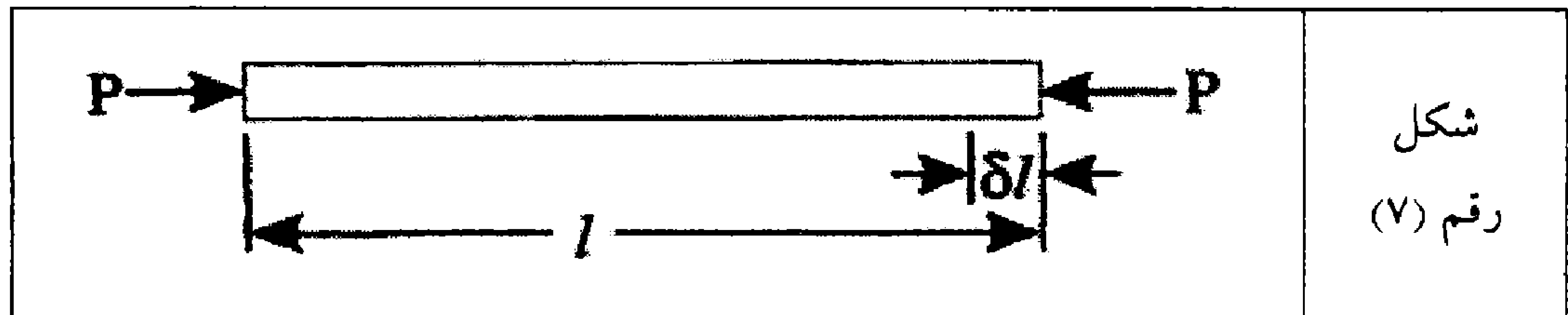
	شكل رقم (٦)

التشوه الجزئي أو انفعال الشد يتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$e_t = \dfrac{\delta l}{l}$	(2)

١-٤-٢ انفعال الانضغاط Compressive Strain

تحت تأثير قوى الانضغاط، فإن قطعة مماثلة من المادة تقل في الطول (الشكل رقم (٧)) من (l) إلى (l-δl).

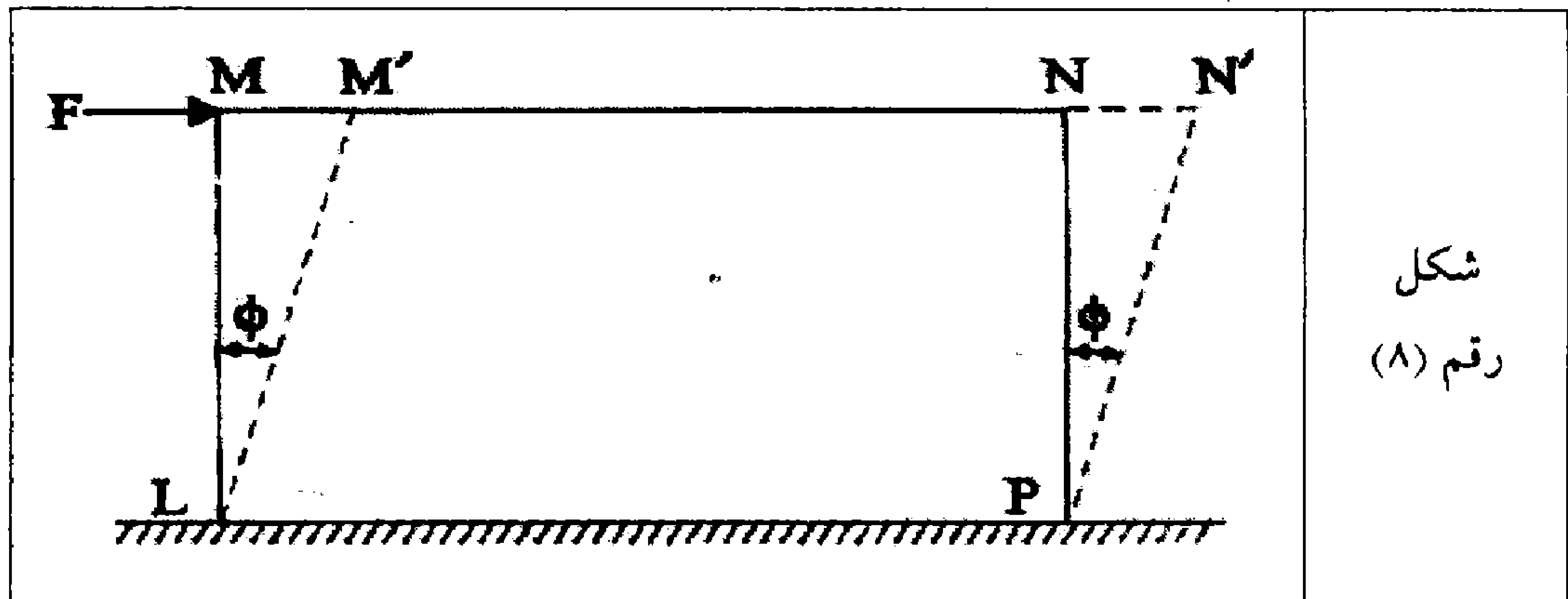
	شكل رقم (٧)

التشوه الجزئي يعطي مرة أخرى الانفعال (e_c) حيث أن:

$e_c = \dfrac{\delta l}{l}$	(2a)

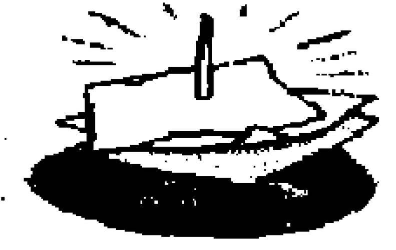
١-٤-٣ انفعال القص Shear Stain

في حالة حمل قص، سيتم إنتاج انفعال قص الذي يُقاس بالزاوية التي من خلالها يحدث تدمير للجسم.

	شكل رقم (٨)

في الشكل رقم (٨) نشاهد بلوك مستطيل (LMNP) مثبت عند وجه ومعرض لقوة (F). وبعد تطبيق القوة، يحدث له تشويه عبر زاوية (ϕ) ويحتل موضع جديد وهو (LM'N'P). انفعال القص (e_s) يتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$$e_s = \frac{NN'}{NP} = \tan \phi = \phi \quad \text{(radians)}$$



في هذه العلاقة نجد أن (e_s=ϕ) لأن ϕ صغيرة جدًا.

النتيجة سالفة الذكر تم التحصل عليها عن طريق افتراض أن (NN') يساوي قوس (حيث أن NN' صغير جدًا) مرسوم من مركز P وبنصف قطر (PN).

١-٤-٤ الانفعال الحجمي Volumetric Strain

يُعرف بأنه النسبة بين التغير في الحجم والحجم الأصلي للجسم، ويتم الإشارة إليه بالرمز (e_v).

إذن، (e_v) = التغير في الحجم / الحجم الأصلي

$e_v = \frac{\text{Change in volume}}{\text{Original volume}} = \frac{\delta V}{V}$	(3)

الانفعالات التي تختفي مع إزالة الحمل تُعرف اصطلاحًا بأنها انفعالات مرنة elastic strains والجسم يكون لدنًا plastic لو أن الانفعالات متواجدة حتى بعد إزالة القوة الخارجية. هناك دائمًا قيمة محددة للحمل والتي عندها يختفي الانفعال كليًا بزوال الحمل – الإجهاد المناظر لهذا الحمل يُعرف بأنه حد المرونة elastic limit.

ولقد اكتشف العالم Robert Hooke معمليًا أنه في داخل حد المرونة، يتباين الإجهاد تباينًا مباشرًا مع الانفعال، أي أن الإجهاد يتناسب طرديًا مع الانفعال، أو أن الإجهاد/الانفعال = قيمة ثابتة.

هذا الثابت يُعرف إصطلاحًا بأنه معامل المرونة Modulus of elasticity.

(i) <u>معامل يانج Young's modulus:</u>

عبارة عن النسبة بين إجهاد الشد وانفعال الشد أو إجهاد الانضغاط وانفعال الانضغاط. وهو يُرمز له بالرمز (E). وهو نفسه معامل المرونة. أو:

$E = \frac{\sigma}{e}\left[= \frac{\sigma_t}{e_t} \text{ or } \frac{\sigma_c}{e_c}\right]$	(4)

(ii) **معامل الصلابة Modulus of rigidity**

يُعرف بأنه نسبة إجهاد القص (τ) إلى انفعال القص ويُرمز له إما بـ C أو N أو G. ويُطلق عليه أيضًا معامل قص المرونة shear modulus of elasticity. أو:

$\frac{\tau}{e_s} = C, N \text{ or } G$	(5)

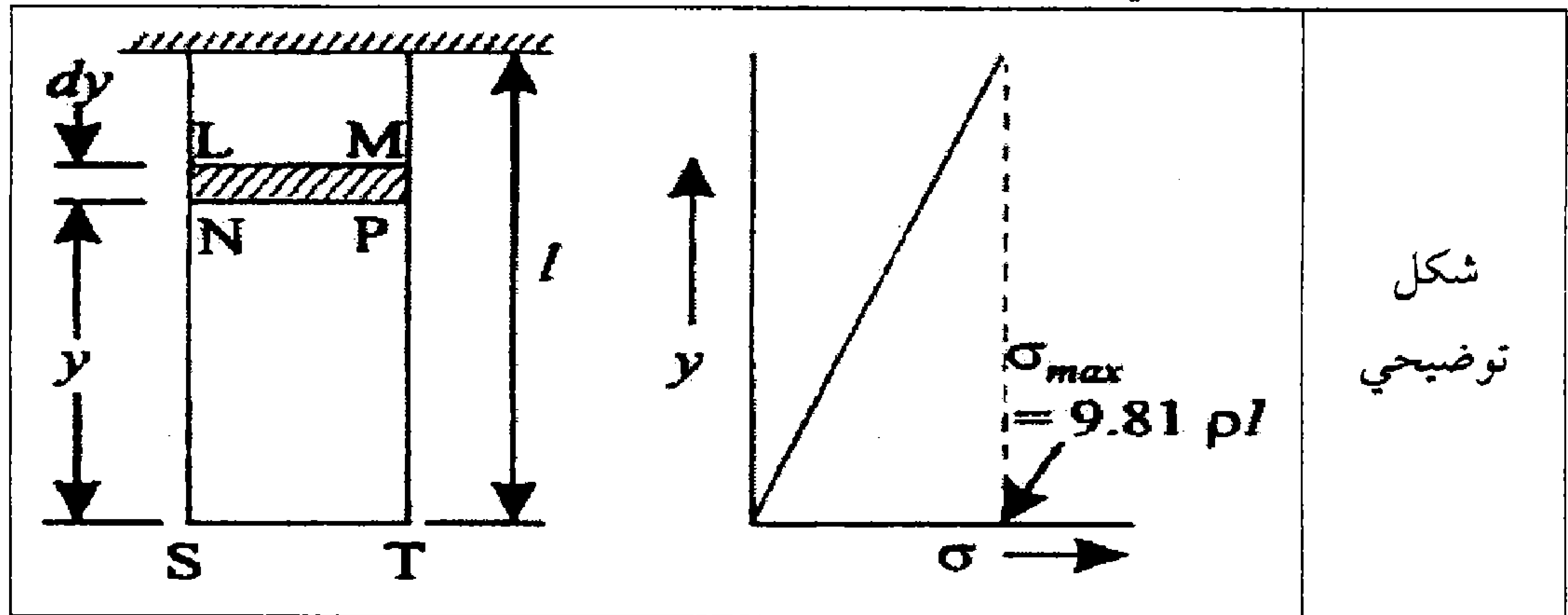
(iii) **معامل المرونة الحجمي Bulk or Volume modulus of elasticity**

يمكن أن يُعرف على إنه نسبة الإجهاد العمودي normal stress (على كل وجه من أوجه مكعب مصمت) إلى الانفعال الحجمي ويُرمز له بالحرف (K). أو:

$\frac{\sigma_n}{e_v} = K$	(6)

١-٥ الإجهاد والاستطالة الناتجان في قضيب بسبب وزنه الذاتي

انظر الشكل التالي:



قضيب طوله "l" متر ومساحة مقطعه العرضي A م٢، مثبت بصلابة عند أحد أطرافه. لنجعل ρ كجم/م٣ عبارة عن كثافة مادة القضيب. ولندس شريحة صغيرة من القضيب (المظللة) LMPN سمكها dy وعلى مسافة y من الطرف الحر. والآن القوة المؤثرة لأسفل عند NP تساوي وزن القضيب NPTS = A*y*ρ.

وأيضًا، الإجهاد المتولد عند المقطع NP يُطعى بـ:

σ = القوة عند NP / مساحة المقطع العرضي للقضيب

$$\sigma = \frac{Ay\rho \times 9.81}{A} = 9.81\,\rho y \;\; N/m^2$$

والذي يعني أن الإجهاد المتولد عند أي مقطع بسبب الوزن الذاتي للقضيب يكون متناسب تناسبًا طرديًا مع y.

إذن، الإجهاد عند الطرف السفلي = صفر.

والإجهاد عند الطرف العلوي يكون:

$$\sigma_{max} = 9.81\ \rho l$$

لو أننا افترضنا dy صغيرة جدًا، فإن التخانات في المقاطع LM وNP تكون متساوية عمليًا.

إذن، الانفعال في الطول dy يكون:

$$dy = \frac{\sigma}{E} = \frac{9.81 \rho y}{E}$$

والتمدد في الطول dy يكون:

$$dy = \frac{9.81 \rho y}{E}\, dy$$

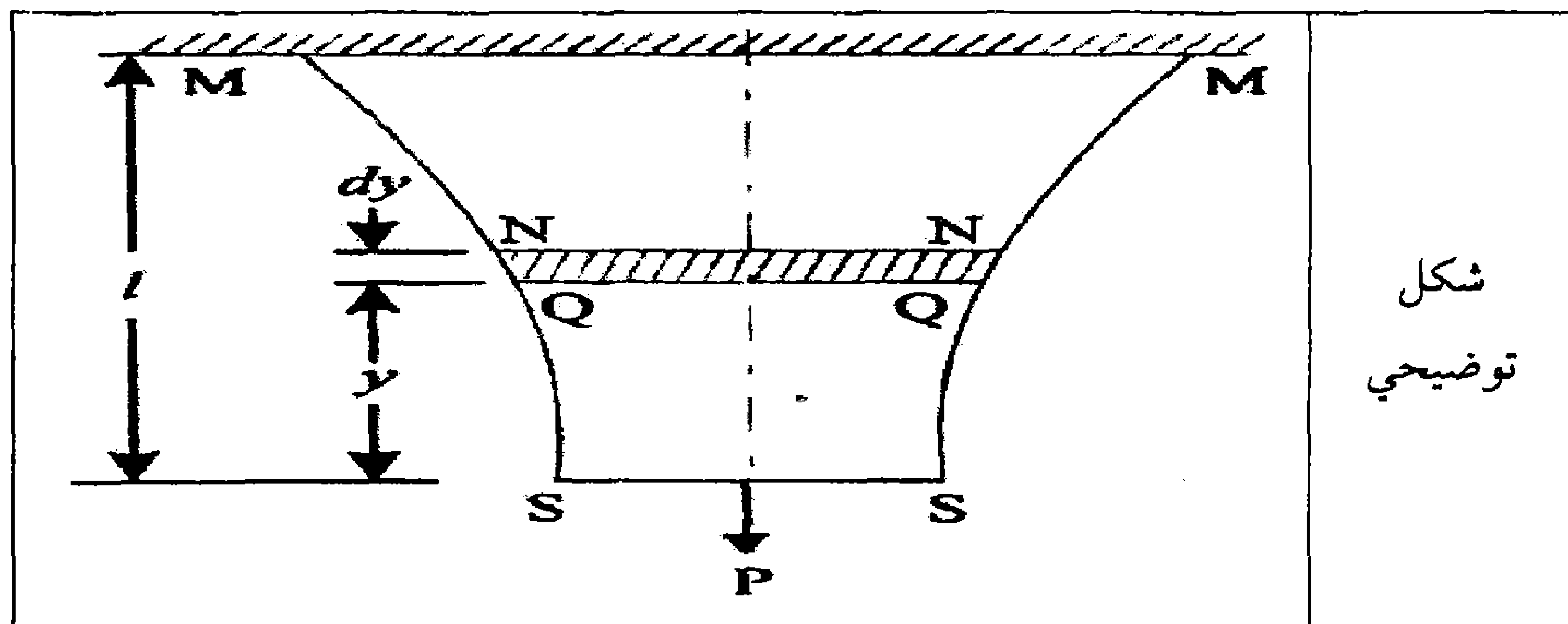
إذن، الاستطالة الكلية في القضيب تكون:

$$\delta l = \int_0^l \frac{9.81\ \rho y}{E}\, dy = \frac{9.81\ \rho}{E} \int_0^l y\ dy = \frac{9.81\ \rho}{E} \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^l$$

$\delta l = \dfrac{9.81\ \rho l^2}{2E}$	(7)

١-٦ الشداد tie bar ذو القوة المنتظمة

الشكل التالي يوضح قضيب شدادي ذو قوة (متانة) منتظمة ويحمل حمل P يُقاس بالنيوتنات.



والآن، لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام	وحدات القياس
σ	الإجهاد المتولد في أي موضع بالقضيب.	نيوتن/م٢
ρ	كثافة مادة القضيب.	كجم/م٣
A	مساحة المقطع العرضي عند QQ.	م٢
A + dA	مساحة المقطع العرضي عند NN.	م٢

لو أن A يتباين من (A_1) إلى (A_2) من المقطع عند SS إلى المقطع عند MM، حينئذ يكون لدينا الآتي:

بالنسبة للمقطع عند SS:

$A_1 * \sigma = P$

$\sigma = P / A_1$	(8)

وبالنسبة للمقطع عند QQ:

$A.\sigma = P + 9.81 \times \text{mass of } SQ \text{ in kg}$	(9)

وبالنسبة للمقطع عند NN ومن المعادلة رقم (٩) نجد أن:

$(A + dA)\ \sigma = P + 9.81 \times \text{mass of portion } SQ \text{ in kg} + 9.81 \times \text{mass of portion } QN \text{ in kg}$
$= A\sigma + 9.81 \times \text{mass of portion } QN \text{ in kg}$

أي أن:

$A.\sigma + dA.\sigma = A.\sigma + 9.81 \times (A.dy)\ \rho$

أو:

$\frac{dA}{A} = \frac{9.81\ \rho}{\sigma}\ dy$	(10)

وبالتكامل نجد أن:

$$[ln\ A]_{A_1}^{A} = \left[\frac{P}{\sigma}\ y\right]_0^y$$

أو:

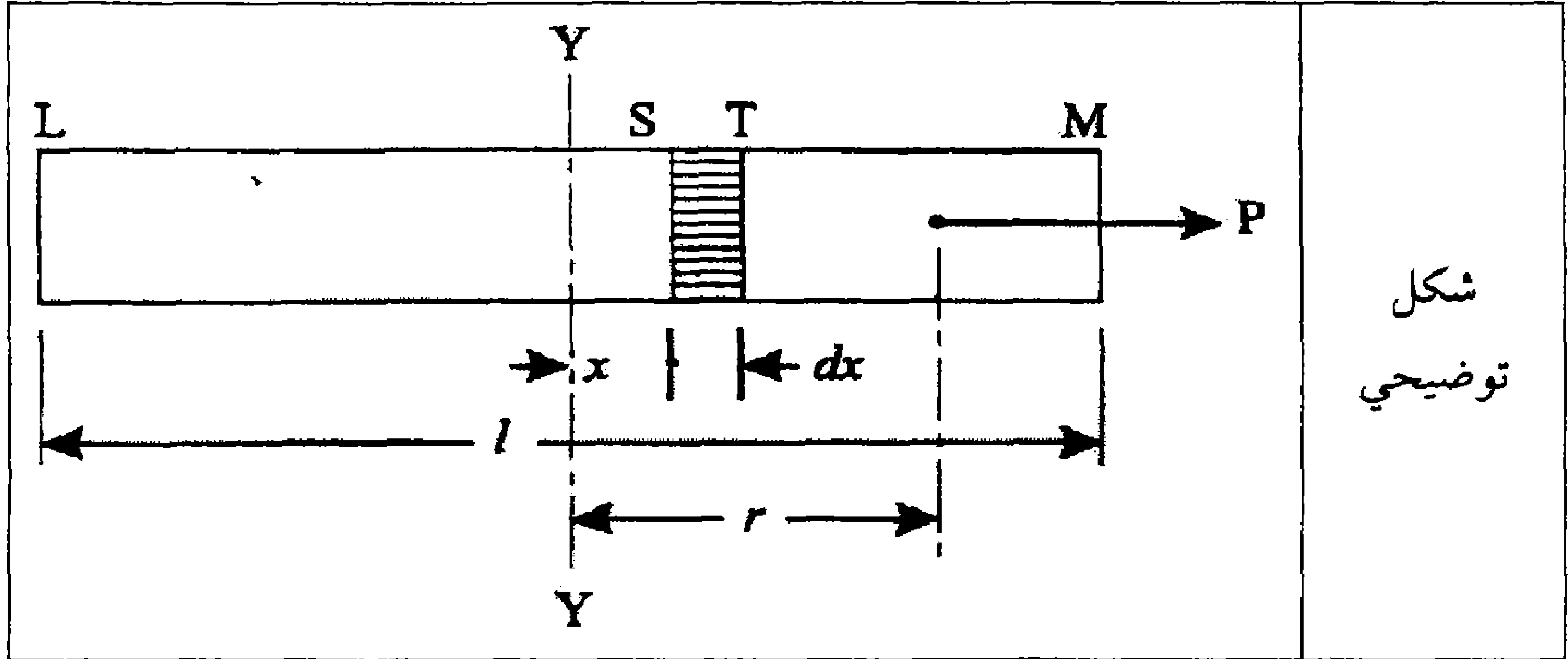
$$ln\ (A/A_1) = \frac{\rho y}{\sigma} \text{ or } A = A_1 e^{9.81\rho y/\sigma}$$

عند (y=l) و(A=A₂)، إذن:

$A_2 = A_1.e^{9.81\rho l/\sigma}$	(11)

١-٧ الإجهاد المتولد في قضيب ما بسبب الدوران

قضيب طوله (l) يدور حول محور Y بسرعة زاوية قدرها (ω) تقاس بـ rad/sec كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل توضيحي	

قوة الشد الواقعة على العنصر ST = قوة الطرد المركزي P الواقعة على الجزء TM

$= \omega^2 * r * M$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
M	كتلة الجزء TM.

ومن ثم، لو أن:

المعامل	المعنى والاستخدام	وحدة القياس
A	مساحة المقطع العرضي للقضيب.	م٢
ρ	كثافة المادة.	كجم/م٣

إذن:

$$P = \rho A\left(\frac{l}{2} - x\right)\omega^2\left[x + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\right]$$

أو:

$$P = 1/2\ \rho A\omega^2\ (l^2/4 - x^2)\ \text{newton}$$

أي أن الإجهاد يكون:

(12)	$\sigma_c = 1/2\ \rho\omega^2\ (l^2/4 - x^2)\ \text{N/m}^2$

أقصى إجهاد سوف يحدث عند (x=0) أي أن:

(13)	$\sigma_{max} = \frac{1}{8}\rho\omega^2 l^2$

تمدد العنصر:

$$ST = \frac{\sigma_c}{E}dx$$

ومن ثم، بالتعويض بقيمة (σ_c) من المعادلة رقم (١٢) وبعمل تكامل، فإنه يمكن حساب التمدد الكلي في القضيب كالآتي:

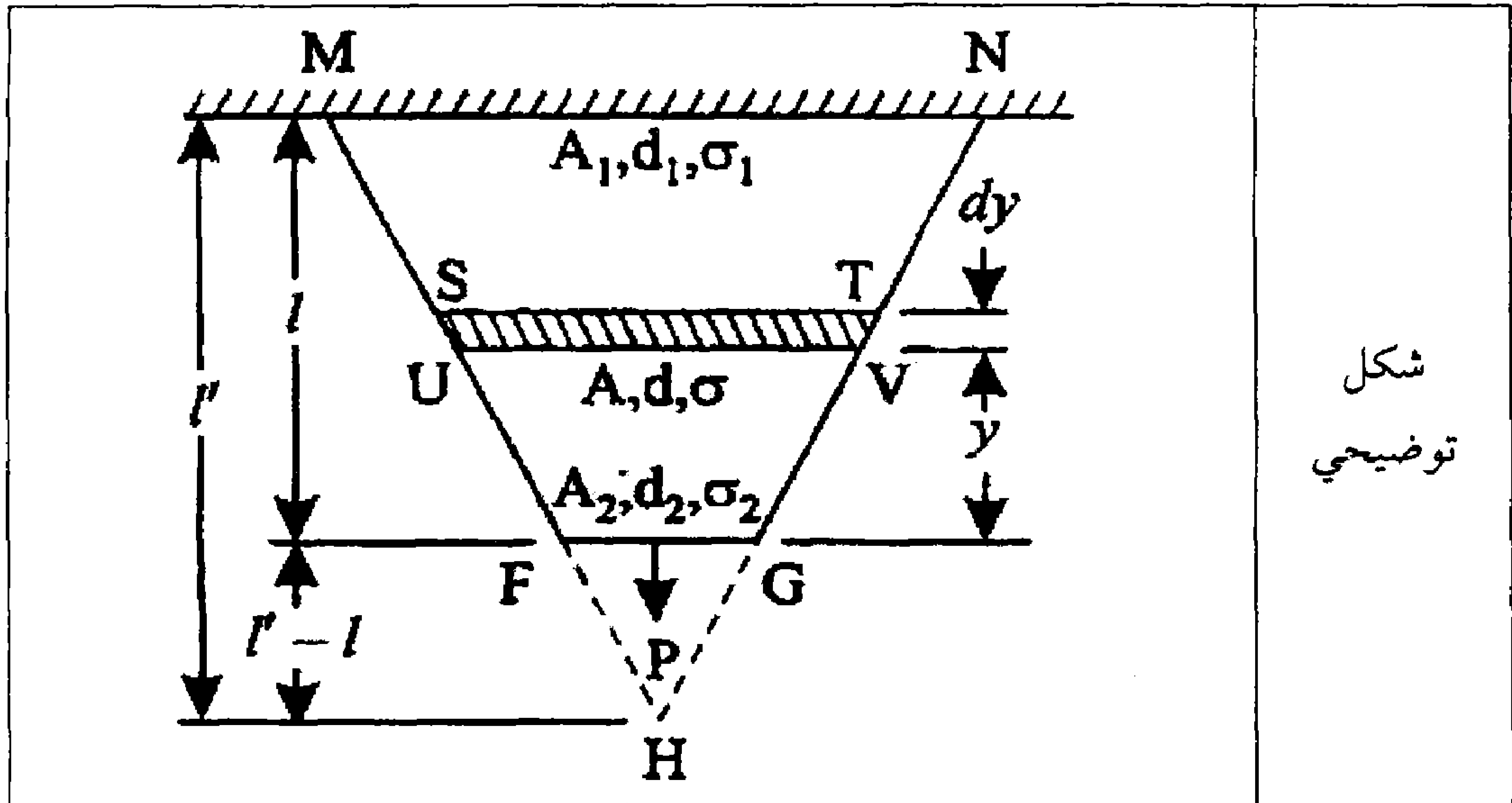
$$\delta l = 2\int_0^{l/2} \frac{1}{2E}\rho\omega^2 \left(l^2/4 - x^2\right) dx = \frac{\rho\omega^2}{E}\left[\frac{l^2}{4}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

أي أن:

$\delta l = \dfrac{\rho\omega^2 l^3}{12E}$ metre	**(14)**

١-٨ الاستطالة في حالة قضيب مستدق taper bar

في هذا الجزء من الفصل سنستعين بالشكل التالي.

	شكل توضيحي

قضيب طوله "l" يستدق بانتظام من قطر قدره (d_1) إلى قطر قدره (d_2). طرفه العريض مثبت في حين أن طرفه السفلي معرض لحمل شد خارجي P.

كل من MF وNG تم تصنيعهما ليلتقيا عند النقطة H.

لندرس سويًا طول صغير "dy" يقع على مسافة "y" من الطرف السفلي.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
A_1	مساحة المقطع العرضي عند قمة القضيب المستدق.
A_2	مساحة المقطع العرضي عند قاع القضيب المستدق.

مساحة المقطع العرضي عند القطاع UV.	A
الإجهاد الناتج عن الحمل P عند قمة القضيب المستدق.	σ_1
الإجهاد الناتج عن الحمل P عند قاع القضيب المستدق.	σ_2
الإجهاد الناتج عن الحمل P عند القطاع UV.	σ

ومن ثم:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2;\ A_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 \text{ and } A = \frac{\pi}{4} d^2$$

كما أن:

$$P = \sigma_1 . A_1 = \sigma_2 . A_2 = \sigma . A$$

أو:

$$\sigma = \frac{\sigma_2 A_2}{A}$$

استطالة الشريحة الصغيرة:

$$STVU = \frac{\sigma}{E} \cdot dy$$

$STVU = \dfrac{\sigma_2 A_2}{AE} \cdot dy = \dfrac{\sigma_2}{E} \cdot \dfrac{d_2^2}{d^2} \cdot dy$	(i)

من المثلثين المتشابهين FGH وUVH، نجد أن:

$$\frac{d_2}{d} = \frac{l' - l}{l' - l + y}$$

وبوضع قيمة (d_2/d) في المعادلة (i)، فإننا نحصل على الآتي:

الاستطالة في الشريحة الصغيرة STUV يكون:

$$= \frac{\sigma_2}{E} \cdot \frac{(l' - l)^2}{(l' - l + y)^2}$$

إذن، الاستطالة الكلية أو التمدد الكلي في القضيب المستدق يكون:

$$\delta l = \int_0^l \frac{\sigma_2}{E} \cdot \frac{(l' - l)^2}{(l' - l + y)^2} \cdot dy = \frac{\sigma_2\ (l' - l)^2}{E} \int_0^l \frac{1}{(l' - l + y)^2} . dy$$

$$\delta l = \frac{\sigma_2\ (l' - l)^2}{E} \left| \frac{-1}{l' - l + y} \right|_0^l = \frac{\sigma_2\ (l' - l)^2}{E} \cdot \left[\frac{-1}{l' - l + l} - \frac{-1}{l' - l + 0} \right]$$

$\delta l = \dfrac{\sigma_2\ (l' - l)^2}{E} \times \dfrac{l}{l'\ (l' - l)} = \dfrac{\sigma_2\ (l' - l)}{l'\ E}\ l$	(ii)

وأيضًا، المثلثين المتشابهين FGH وMNH، نجد أن:

$$\frac{l'-l}{l'} = \frac{d_2}{d_1}$$

وبالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (ii)، فإننا نحصل على الآتي:

$$\delta l = \frac{\sigma_2\, l}{E} \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

أو:

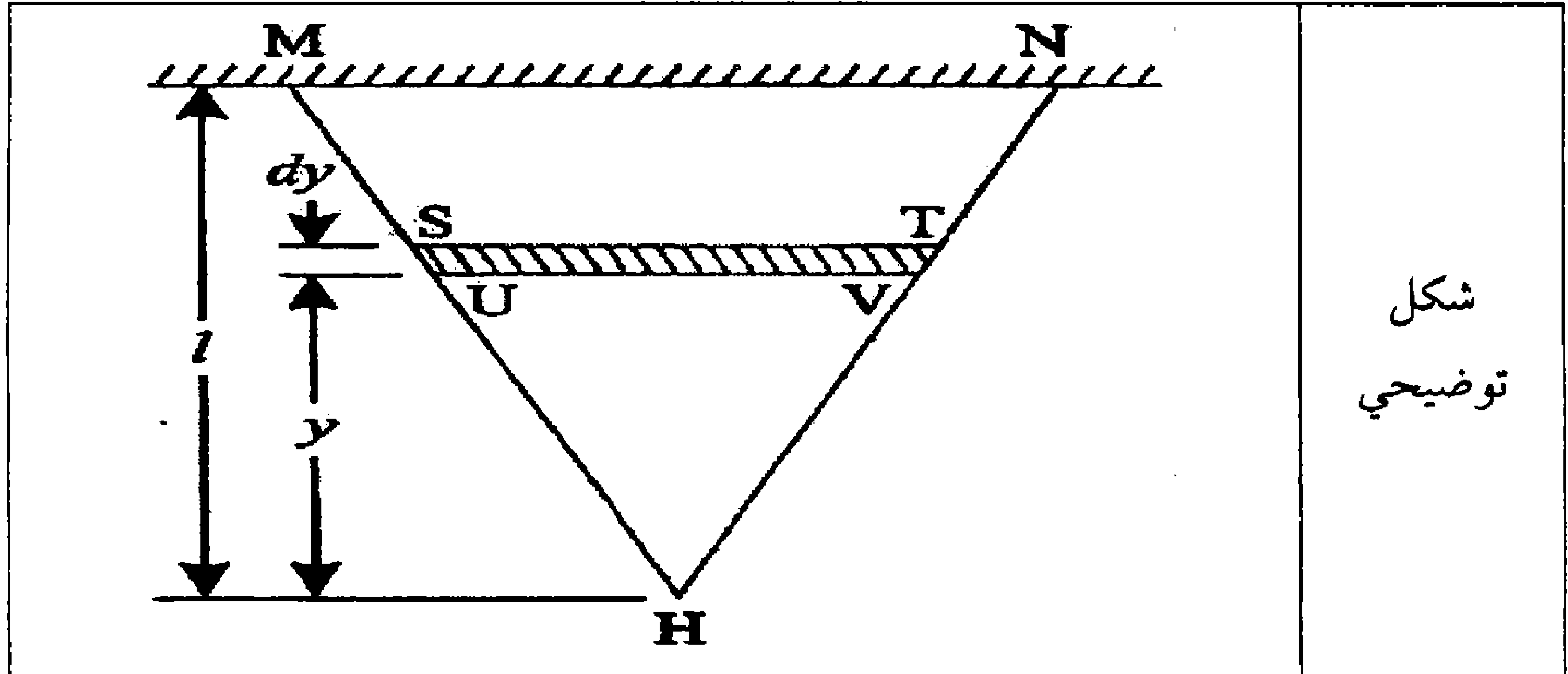
$$\delta l = \frac{Pl}{A_2\ E} \cdot \frac{d_2}{d_1} = \frac{Pl}{(\pi/4)d_2^2 . E} \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

أي أن:

$\delta l = \dfrac{4Pl}{\pi\ E d_1\, d_2}$	(15)

١-٩ استطالة قضيب مخروطي بسبب وزنه الذاتي

انظر الشكل التالي.

	شكل توضيحي

في هذا الشكل نجد أن MNH عبارة عن قضيب مخروطي طوله (l) مع كون طرفه العريض بقطر (d) ومثبت بإحكام عند MN.

لنجعل ρ (بالكجم/م٣) عبارة عن كثافة مادة القضيب. ولندرس شريحة صغيرة تخانتها (dy) وتقع على مسافة (y) من الطرف المنخفض.

يمكن حساب وزن الجزء UVH كالآتي:

$$UVH = 9.81\ \rho\ \frac{\pi\, d_s^2}{4} . \frac{y}{3}$$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
d_s	قطر الشريحة.

من المثلثين المتشابهين MNH وUVH، نجد أن:

$$\frac{MN}{UV} = \frac{l}{y} \text{ or } UV = \frac{MNy}{l} = \frac{d \times y}{l}$$

إذن، يمكن حساب وزن UVH كالآتي:

$$= 9.81\,\rho.\frac{\pi}{4}\left[\frac{d \times y}{l}\right]^2.\frac{y}{3} = 9.81 \times \frac{\pi}{12}.\rho\,\frac{d^2}{l^2}.y^3$$

وإذن، الإجهاد عند المقطع UV = القوة عند UV / مساحة المقطع العرضي عند UV:

$$= \frac{\text{Weight of } UVH}{\frac{\pi d_s^2}{4}} = \frac{9.81 \times \frac{\pi}{12}.\rho\,\frac{d^2}{l^2}.y^3}{\frac{\pi}{4}.\left[\frac{d \times y}{l}\right]^2} = \frac{9.81\,\rho y}{3}$$

إذن، يمكن حساب التمدد في dy كالآتي:

$$= \frac{9.81\,\rho y}{3E}.dy$$

ويتم حساب الامتداد الكلي في القضيب كالآتي:

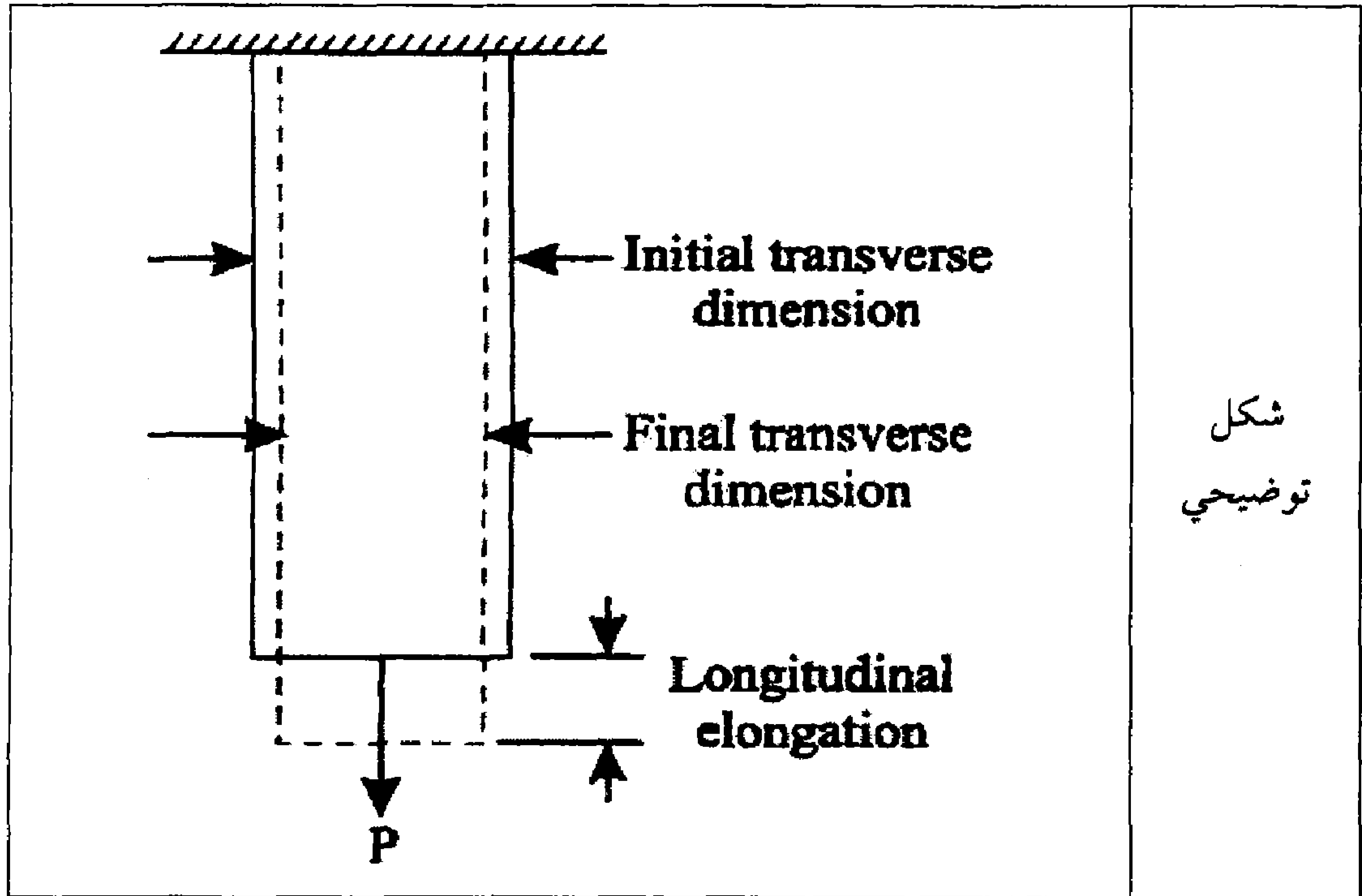
$$\delta l = \int_0^l \frac{9.81\,\rho y}{3E}.dy = \frac{9.81\,\rho}{3E}\int_0^l y\,dy = \frac{9.81\,\rho}{3E}\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^l = \frac{9.81\,\rho l^2}{6E}$$

إذن:

$\delta l = \dfrac{9.81\,\rho l^2}{6E}$	**(16)**

١-١٠ نسبة بواسون

لو أن جسم ما معرض لحمل ما، فإن طوله يتغير؛ ونسبة هذا التغير في الطول إلى الطول الأصلي تُعرف بالانفعال الخطي أو الأساسي linear or primary strain. وبسبب هذا الحمل، فإن أبعاد الجسم تتغير؛ في كافة الاتجاهات بزوايا قائمة على خطوط تطبيق الانفعالات ومن ثم تُعرف الانفعالات الناتجة بالانفعالات الجانبية lateral أو الثانوية secondary أو العرضية transverse وتكون طبيعتها مقابلة لتلك الانفعالات الأساسية. فعلى سبيل المثال، لو أن الحمل عبارة عن شد، حينئذ ستكون هناك زيادة في الطول وسيكون هناك نقص مناظر في مساحة المقطع العرضي للجسم كما هو موضح في الشكل التالي.

	شكل توضيحي

في هذه الحالة، سيكون الانفعال الخطي أو الأساسي عبارة عن شد في حين أن الانفعال الثانوي أو العرضي أو الجانبي سيكون ضغط.

نسبة الانفعال العرضي إلى الانفعال الخطي تُعرف بنسبة بواسون، أي أن نسبة بواسون = الانفعال العرضي أو الجانبي / الانفعال الخطي أو الأساسي:

$\mu = 1/m$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
m	عبارة عن ثابت وقيمته تتباين بين ٣ و٤ بالنسبة لمختلف المواد.

الجدول رقم (١) يعطي القيم المتوسطة لنسبة بواسون للمواد الشائعة الاستخدام.

الجدول رقم (١)

مسلسل	المادة	نسبة بواسون
١	الألومنيوم	٠.٣٣٠
٢	النحاس brass	٠.٣٤٠
٣	البرونز	٠.٣٥٠
٤	الحديد الصلب	٠.٢٧٠

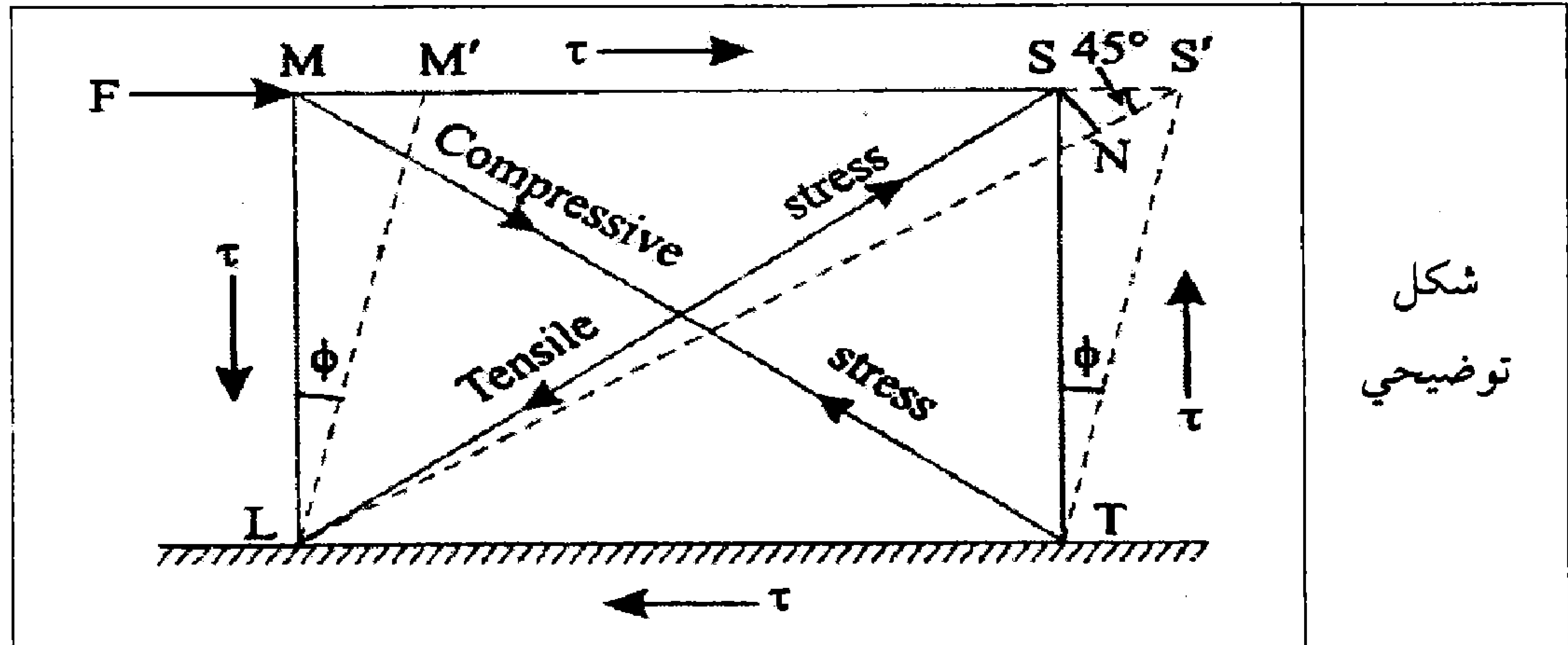
٠.٢٠٠	الخرسانة	٥
٠.٣٥٥	النحاس copper	٦
٠.٢٨٨	الفولاذ steel	٧
٠.٣٠٥	الحديد المقاوم للصدأ Stainless steel	٨
٠.٢٧٨	الحديد المطاوع Wrought iron	٩

١-١١ العلاقات بين معاملات المرونة

هناك مجموعة من العلاقات بين ثوابت المرونة بالنسبة لأي مادة وتلك العلاقات يمكن استخدامها كذلك مع كل المواد التي تقع داخل نطاق المرونة. هذه العلاقات تنتج من حقيقة أن تطبيق أي نوع معين من الإجهاد يُنتج بالضرورة أنواع أخرى من الإجهادات عند أماكن أخرى في المادة. وبعد ذلك، يقوم كل نوع من أنواع الإجهادات بإنتاج الانفعال المناظر له وكل الانفعالات المنتجة ينبغي أن تكون ثابتة.

١-١١-١ العلاقة بين الـ E والـ C

انظر الشكل التالي.



في هذا الشكل نجد أن LMST عبارة عن مكعب مصمت معرض لقوة قص F. لنجعل (τ) عبارة عن إجهاد القص الناتج في الأوجه MS وLT بسبب قوة القص هذه. إجهاد القص المكمل الناتج في الأوجه ML وST سيكون (τ) أيضًا. وبسبب حمل القص، يتم تشويه المكعب ليصبح LM'S'T، وفي حد ذاته، تنتقل الحافة M إلى M'، والحافة S إلى S' والقطر LS إلى L'S.

يتم حساب انفعال القص كالآتي:

$$\phi = \frac{SS'}{ST}$$

وأيضًا يتم حسابه كالآتي:

$$= \frac{\tau}{C}$$

إذن:

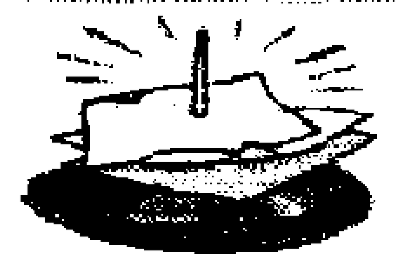
$\frac{SS'}{ST} = \frac{\tau}{C}$	(i)

على القطر 'LS، نرسم خط عمودي SN من نقطة S.

والآن، يمكن حساب الانفعال القطري كالآتي:

$= \frac{NS'}{LN} = \frac{NS'}{LS}$	(ii)

$$NS' = SS' \cos 45° = \frac{SS'}{\sqrt{2}}$$



الزاوية LS'T يُفترض أنها تساوي الزاوية LST حيث أن 'SS صغيرة جدًا.

كما أن:

$$LS = ST \times \sqrt{2}$$

وبوضع قيمة LS في المعادلة رقم (ii)، فإننا نحصل على الآتي:

الانفعال القطري:

$$= \frac{SS'}{\sqrt{2}\ ST \times \sqrt{2}} = \frac{SS'}{2ST}$$

ولكن:

$$\frac{SS'}{ST} = \frac{\tau}{C}$$

إذن، يتم حساب الانفعال القطري كالآتي:

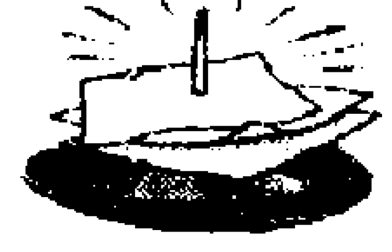
$= \frac{\tau}{2C} = \frac{\sigma_n}{2C}$	(iii)

حيث إن:

المعنى والاستخدام	المعامل
الاجهاد العمودي الناتج عن إجهاد القص (τ).	σ_n

الانفعال الصافي في اتجاه القطر LS يكون:

$$= \frac{\sigma_n}{E} + \frac{\sigma_n}{mE}$$



حيث أن القطر LS معرض لإجهاد شد عمودي في حين أن القطر MT معرض لإجهاد ضغط عمودي.

$= \frac{\sigma_n}{E}\left[1+\frac{1}{m}\right]$	**(iv)**

بمقارنة المعادلتين (iii) و(iv)، نحصل على الآتي:

$$\frac{\sigma_n}{2C} = \frac{\sigma_n}{E}\left[1+\frac{1}{m}\right]$$

أي أن:

$E = 2C\left[1+\frac{1}{m}\right]$	**(17)**

١-١١-٢ العلاقة بين E وK

لو أن المكعب المصمت محل الدراسة معرض لـ (σ_n) (إجهاد ضغط عمودي) على كل الأوجه، حيتئذ يكون الانفعال المباشر في كل محور = (σ_n/E) (ضغط) والانفعال العرضي في المحور الآخر = ($\sigma n/(m*E)$) (شد).

إذن، انفعال الضغط في كل محور يكون:

$$= \frac{\sigma_n}{E} - \frac{\sigma_n}{mE} - \frac{\sigma_n}{mE} = \frac{\sigma_n}{E}\left[1-\frac{2}{m}\right]$$

الانفعال الحجمي (e_v) في هذه الحالة سيكون:

$$e_v = 3 \times \text{linear strain} = 3 \times \frac{\sigma_n}{E}\left[1-\frac{2}{m}\right]$$

ولكن:

$$e_v = \frac{\sigma_n}{K}$$

إذن:

$$\frac{\sigma_n}{K} = \frac{3\sigma_n}{E}\left[1-\frac{2}{m}\right]$$

أو:

$E = 3K\left[1-\frac{2}{m}\right]$	**(18)**

العلاقة بين E, C, K يمكن تأسيسها عن طريق التخلص من m من المعادلتين رقم (١٧) و(١٨) كالآتي:

من المعادلة رقم (١٧):

$$m = \frac{2C}{E-2C}$$

$$E = 3K\left[1 - \frac{2}{2C/(E-2C)}\right]$$

أو:

$$E = 3K\left[1 - \frac{E-2C}{C}\right]$$

أو:

$$\frac{E}{3K} = \frac{C-E+2C}{C} = \frac{3C-E}{C}$$

أو:

$$\frac{E}{3K} + \frac{E}{C} = 3$$

أو:

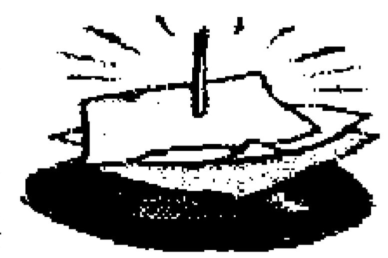
$$EC + 3KE = 9KC$$

أو:

$$E(3K+C) = 9KC$$

أو:

$E = \dfrac{9KC}{3K+C}$	(19)

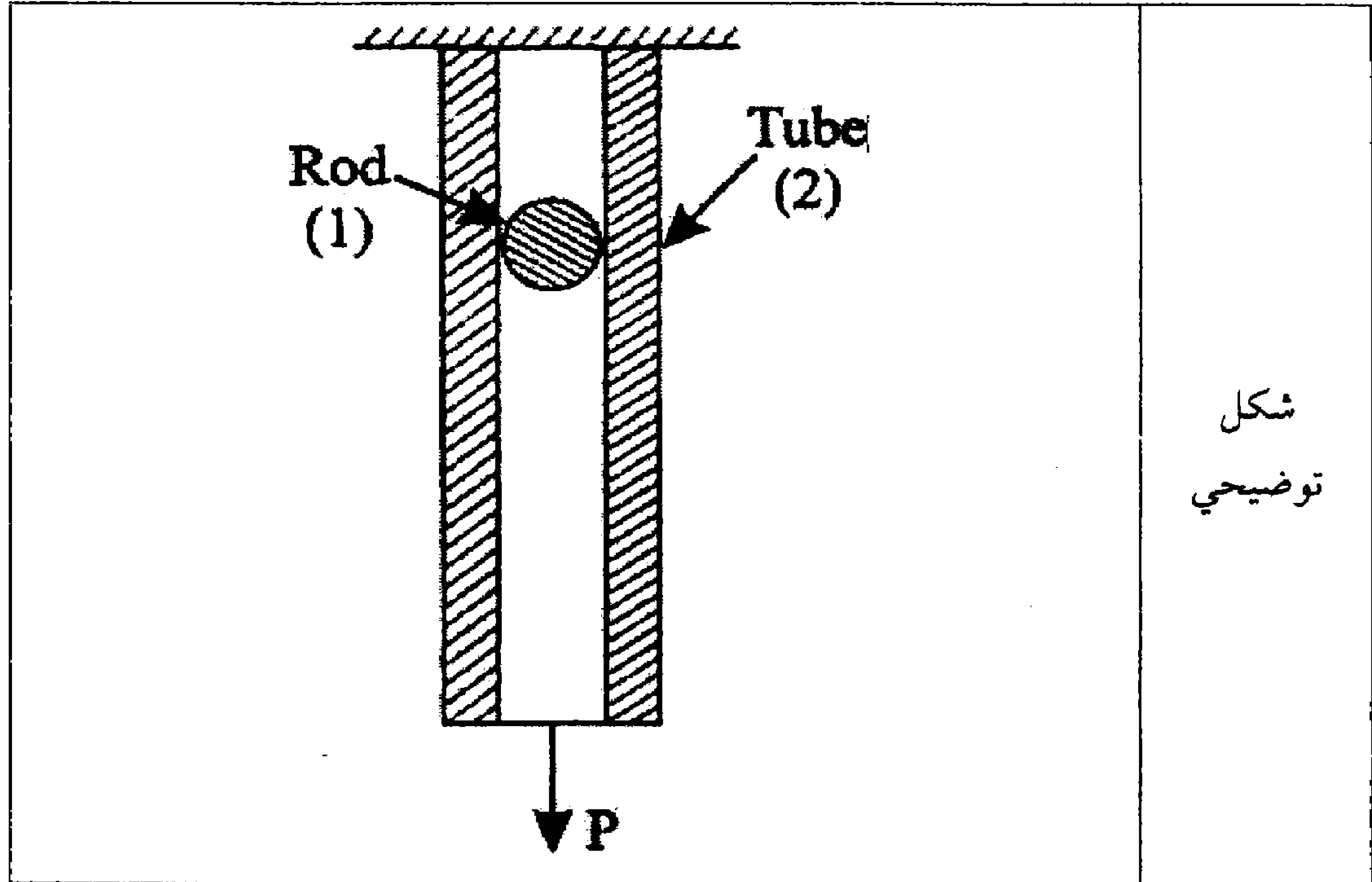


عندما يكون بلوك مربع أو مستطيل معرض لحمل قص وهو في نفس الوقت في حالة اتزان، حينئذ يكون إجهاد القص في مستوى واحد ملحقا دائمًا بإجهاد قص تكميلي (له قيمة مساوية) في مستوى آخر متعامد عليه.

١-١٣ الإجهادات المتولدة في الشدادات أو القوائم الانضغاطية المركبة

كثيرًا ما نجد أن الشدادات تتألف من مادتين، وهاتان المادتان مرتبطتان معًا لمنع حدوث انفعال غير متساوي بالمادتين. في هذه الحالات، يكون من المهم أن يتم حساب توزيع الحمل بين المادتين. وفي أثناء ذلك سيفترض أن المادتين موزعتان بالتماثل حول

محور القضيب، كما هو الحال مع قضيب اسطواني موجود داخل أنبوبة كما هو موضح في الشكل التالي.



لو أن حمل محوري (P) مطبق على القضيب، إذن:

$P = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$	(20)

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
σ_1	الإجهاد المتولد في المادة الأولى.
A_1	مساحة القطع العرضي للمادة الأولى.
σ_2	الإجهاد المتولد في المادة الثانية.

الانفعالات الناتجة (e_1) و(e_2) متساوية، ومن ثم:

$e_1 = e_2$

$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$	(20-a)

١-١٤ الإجهادات والانفعالات الحرارية

لو أن درجة حرارة جسم ما انخفضت أو ارتفعت فإن أبعاده سوف تنقص أو تزيد بالتبعية. ولكن على كل حال، لو أن هذه التغييرات تم فحصها واختبارها في هذه الحالة

تُعرف الإجهادات المتكونة في الجسم بإجهادات درجة الحرارة temperature stresses أما الانفعالات المناظرة فيطلق عليها انفعالات درجة الحرارة temperature strains.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
l	طول قضيب ذو مقطع عرضي منتظم.
t_1	درجة الحرارة الابتدائية للجسم.
t_2	درجة الحرارة النهائية للجسم.
α	معامل التمدد الخطي.

التمدد في القضيب بسبب ارتفاع درجة الحرارة سيكون:

$= \alpha (t_2 - t_1) l.$

لو أن هذه الاستطالة في القضيب مُنعت بقوة خارجية أو بتثبيت أطراف القضيب، فإن انفعال درجة الحرارة المتكون بناءًا على ذلك سوف يُعطى بـ:

$\text{Temperature strain} = \dfrac{\alpha (t_2 - t_1) l}{l} = \alpha (t_2 - t_1)$ (compressive)	(21)

إذن، إجهاد درجة الحرارة المتكون سيكون:

$= \alpha (t_2 - t_1) E$ (compressive)	(22)

ولكن على كل حال، لو أن درجة حرارة القضيب خُفضت، حينئذ سيكون كل من انفعال وإجهاد درجة الحرارة شدًا.

١-١٤ الإجهاد الحلقي Hoop Stress

لو أن إطار رقيق من الصلب أو أي مادة أخرى سيتم تلبيسه بالانكماش داخل عجلة، فإن قطر الإطار سيكون أصغر قليلاً من قطر العجلة بحيث أنه لا يصبح من السهولة بمكان الفصل بينهما. لنجعل D عبارة عن قطر العجلة وd عبارة عن قطر الإطار الصلب. إن درجة حرارة الإطار الصلب ستزيد بمقدار (t°) بحيث أنه يزداد قطره من d إلى D. وعندما يكون الإطار الصلب منزلق داخل العجلة وتنخفض درجة الحرارة، فإن الإطار الصلب سيحاول أن يعود إلى قطره الأصلي وبفعل هذا يتم تكوين الإجهاد الحلقي (وهو إجهاد شد).

انفعال درجة الحرارة (e) = الانكماش الممنوع/الطول الأصلي، أي أن:

$$e = \frac{\pi D - \pi d}{\pi d}$$

إذن:

$$e = \frac{D - d}{d}$$

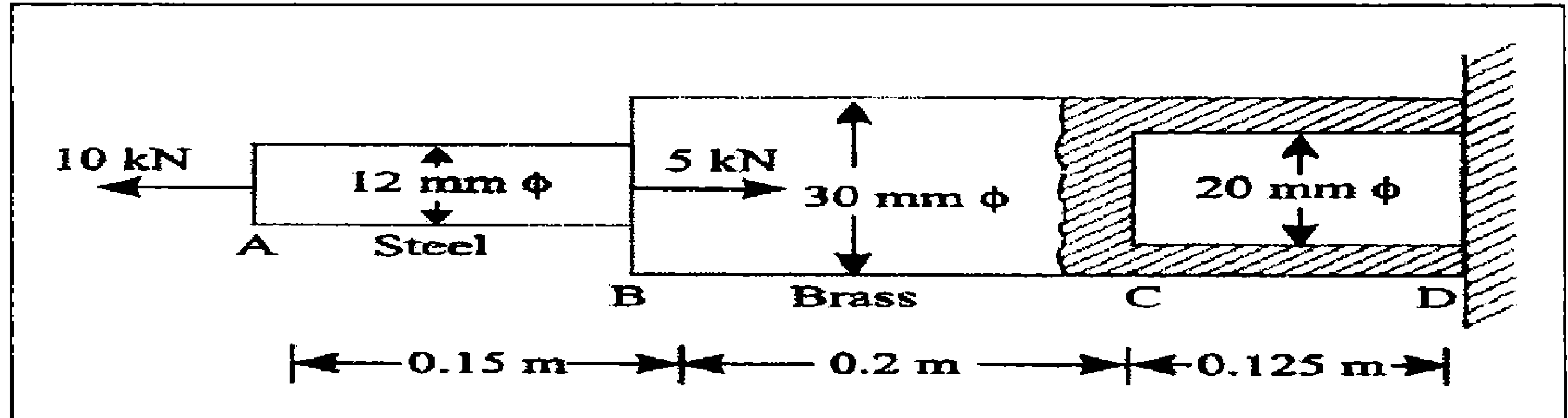
إذن، الإجهاد المحيطي أو الإجهاد الحلقي المتكون بسبب انخفاض درجة الحرارة يكون:

$= \frac{D - d}{d} E$	(23)

الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

في الشكل التالي نشاهد أقطار القطعة النحاسية والقطعة الحديدية لقضيب محمل محوريًا وهي ٣٠ مم و١٢ مم على الترتيب. أما قطر المقطع المفرغ في القطعة النحاسية فعبارة عن ٢٠ مم.



المطلوب

تحديد الآتي:

(i) الإجهاد العمودي الأقصى المتولد في كل من الحديد والنحاس.

(ii) مقدار إزاحة الطرف الحر.

خذ الآتي:

$E_s = 210\ GN/m^2$
$E_b = 105\ GN/m^2$

الحل

$$A_s = \frac{\pi}{4} \times (12)^2 = 36\pi\ \text{mm}^2 = 36\pi \times 10^{-6}\text{m}^2$$

$$(A_b)_{BC} = \frac{\pi}{4} \times (30)^2 = 225\pi\ \text{mm}^2 = 225\pi \times 10^{-6}\text{m}^2$$

$$(A_b)_{CD} = \frac{\pi}{4}\left[(30)^2 - (20)^2\right] = 125\pi \text{ mm}^2 = 125\pi \times 10^{-6} \text{m}^2$$

(i) الإجهاد العمودي الأقصى المتولد في كلا من الحديد والنحاس:

$$\sigma_s = \frac{10 \times 10^3}{36\pi \times 10^{-6}} \times 10^{-6} \text{ MN/m}^2 = \mathbf{88.42 \text{ MN/m}^2}$$

$$(\sigma_b)_{BC} = \frac{5 \times 10^3}{225\pi \times 10^{-6}} \times 10^{-6} \text{ MN/m}^2 = \mathbf{707 \text{ MN/m}^2}$$

$$(\sigma_b)_{BC} = \frac{5 \times 10^3}{125\pi \times 10^{-6}} \times 10^{-6} \text{ MN/m}^2 = \mathbf{12.73 \text{ MN/m}^2}$$

(ii) إزاحة الطرف الحر:

يتم حساب إزاحة الطرف الحر كالآتي:

$$\delta l = (\delta l_s)_{AB} + (\delta l_b)_{BC} + (\delta l_b)_{CD}$$

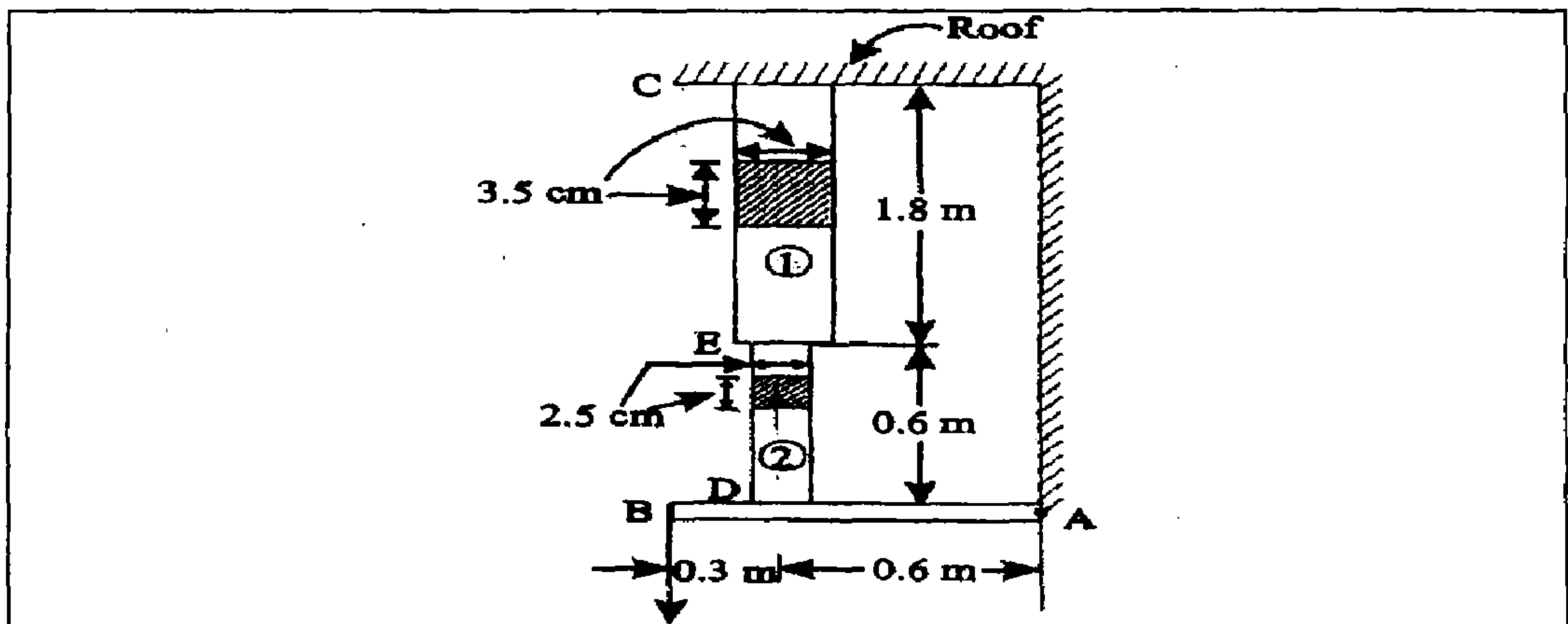
$$\delta l = \frac{88.42 \times 0.15}{210 \times 10^9 \times 10^{-6}} + \frac{7.07 \times 0.2}{105 \times 10^9 \times 10^{-6}} + \frac{12.73 \times 0.125}{105 \times 10^9 \times 10^{-6}} \quad \left(\because \ \delta l = \frac{\sigma l}{E}\right)$$

$$\delta l = 6.316 \times 10^{-5} + 1.347 \times 10^{-5} + 1.515 \times 10^{-5}$$

$$\delta l = 9.178 \times 10^{-5} \text{ m or } \mathbf{0.09178 \text{ mm}}$$

المثال رقم (٢)

كمرة **AB** معلقة مفصليًا من عند **A** ومحملة عند **B** كما هو موضح في الشكل الخاص بهذا المثال. تم سندها من السقف بواسطة قضيب معدني رأسي **CD** طوله ٢.٤ متر وهذا القضيب له مقطعين عرضيين أحدهما مربع طول ضلعه ٣.٥ سم في مسافة قدرها ١.٨ متر من طول القضيب المعدني والثاني مربع طول ضلعه ٢.٥ سم في الجزء المتبقي من طول القضيب المعدني. وقبل أن يتم تطبيق الحمل كانت الكمرة أفقية.



المطلوب

تحديد الآتي:

(i) الإجهاد الأقصى في القضيب المعدني **CD**.

(ii) الاستطالة الكلية للقضيب

خذ البيان التالي:

$E_s = 210\ GN/m^2$

الحل

معطى لدينا الآتي:

$A_2 = 2.5 \times 2.5 = 6.25\ cm^2 = 6.25 \times \times 10^{-4}\ m^2;$
$A_1 = 3.5 \times 3.5 = 12.25 \times 10^{-4}\ m^2;$
$l_1 = 1.8\ m$
$l_2 = 0.6\ m$
$E_s = 210\ GN/m^2$

ولنجعل (P) عبارة عن الجذب في القضيب CD.

ومن ثم، وبأخذ العزوم حول A، فإننا نحصل على الآتي:

P * 0.6 = 60 * 0.9 ===> P = 90 kN

(i) الإجهاد الأقصى المتولد في القضيب المعدني **CD** (σ_{max}):

الإجهاد سيصل إلى الحد الأقصى في الجزء DE من القضيب المعدني CD. وإذن:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_2} = \frac{90 \times 10^3}{6.25 \times 10^{-4}} \times 10^{-6}\ MN/m^2 = \mathbf{144\ MN/m^2}$$

(ii) الاستطالة الكلية للقضيب **CD** (δ):

$$\delta = \delta l_1 + \delta l_2 = \frac{Pl_1}{A_1 E} + \frac{Pl_2}{A_2 E} = \frac{P}{E}\left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right)$$

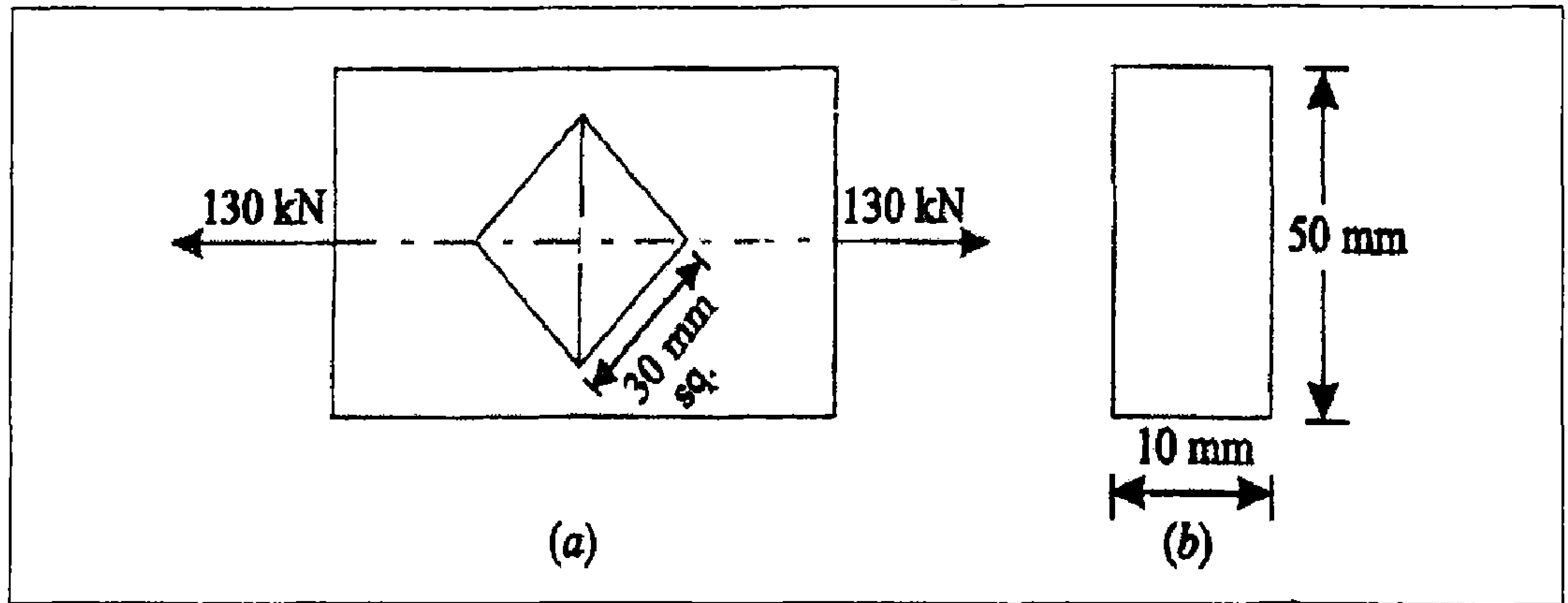
$$\delta = \frac{90 \times 10^3}{210 \times 10^9}\left(\frac{1.8}{12.25 \times 10^{-4}} + \frac{0.6}{6.25 \times 10^{-4}}\right)$$

$$\delta = 0.428 \times 10^{-6}\ (1469.38 + 960) = 0.001039m = \mathbf{1.04\ mm}$$

المثال رقم (٣)

قضيب منبسط مقطعه العرضي عبارة عن ٥٠ مم × ١٠ مم معرض لجذب محوري قدره ١٣٠ كيلونيوتن. أحد جوانب القضيب ملمع وتم حفر خطوط عليه لتكوين مربع أبعاده طول ضلعه ٣٠ مم، وأحد قطري المربع كان بطول الخط المنصف للجانب

الملمع. لو أن E = 200 GN/m2 ونسبة بواسون عبارة عن ٠.٢٥، إذن احسب مقدار التغير في زوايا وأضلاع المربع.



الحل

معطى لدينا الآتي:

مساحة المقطع العرضي للقضيب = ٥٠ مم × ١٠ مم = ٥٠٠ مم٢.

الجذب المحوري (P) = ١٣٠ كيلونيوتن = ١٣٠ × ١٠^(٣) نيوتن

طول ضلع المربع = ٣٠ مم.

معامل المرونة (E) = ٢٠٠ جيجانيوتن/م٢ = ٢٠٠ × ١٠^(٩) نيوتن/م٢ = ٢٠٠ × ١٠^(٣) نيوتن/مم٢.

نسبة بواسون:

$\mu = 1/m = 0.25$

<u>التغيرات في زوايا وأضلاع المربع</u>

طول قطر المربع:

$$l = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2}\ \text{mm} = 42.43\ \text{mm}$$

التغير في الطول (δl) في الاتجاه القطري بسبب القوة يتم حسابه كالآتي:

$$e_L = \frac{(\delta l)_L}{l} = \frac{P/A}{E} = \frac{130 \times 10^3}{500 \times 200 \times 10^3} = 0.0013$$

إذن:

$$\delta l = 42.43 \times 0.0013 = 0.05516\ \text{mm}$$

والآن، التغير في الطول في الاتجاه العرضي أي ($(\delta l)_T$) يتم حسابه كالآتي:

$$e_L = \frac{(\delta l)_T}{l} = -\mu e_L = -(0.25)(0.0013) = -0.000325$$

إذن:

$$(\delta l)_T = (-0.000325)\ (42.43) = -0.01379\ \text{mm}$$

بعد التشوه، طول القطر عبر المحور يكون:

$$(l)_L = l + (\delta l)_L = 42.43 + 0.05516 = 42.4852\ \text{mm}$$

طول القطر المتعامد على المحور:

$$(l)_T = l - (\delta l)_T = 42.43 - 0.01379 = 42.4162\ \text{mm}$$

قبل التشوه، الزاوية بين القطر والضلع (α) = ٤٥ درجة.

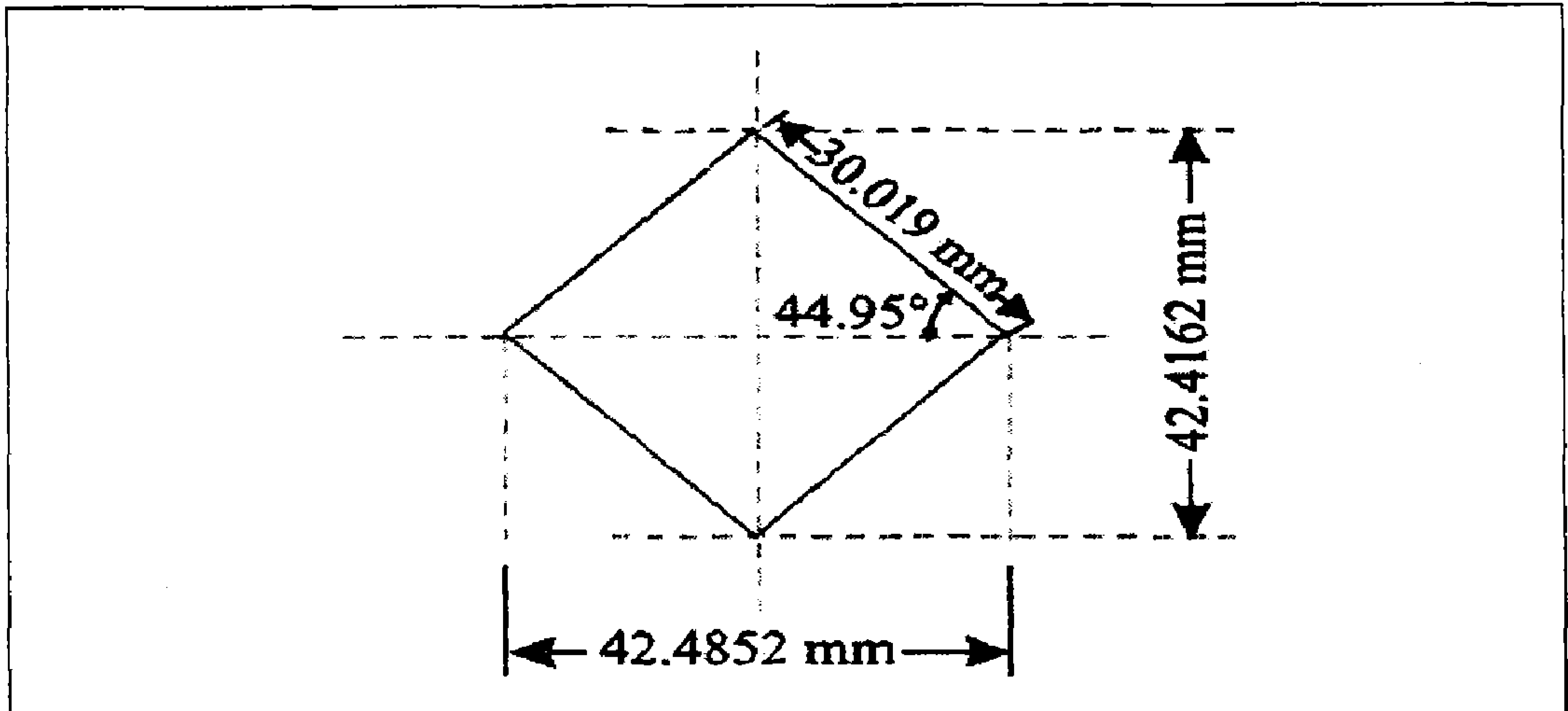
بعد التشوه، فإن الزاوية تكون:

$$\alpha' = \tan^{-1}\left[\frac{(42.4162/2)}{(42.4852/2)}\right] = \mathbf{44.95^\circ}$$

طول ضلع المربع يكون:

$$= \frac{(42.4162/2)}{\sin 44.95^\circ} = \mathbf{30.019\ mm}$$

هذا نشاهده في الشكل التالي:

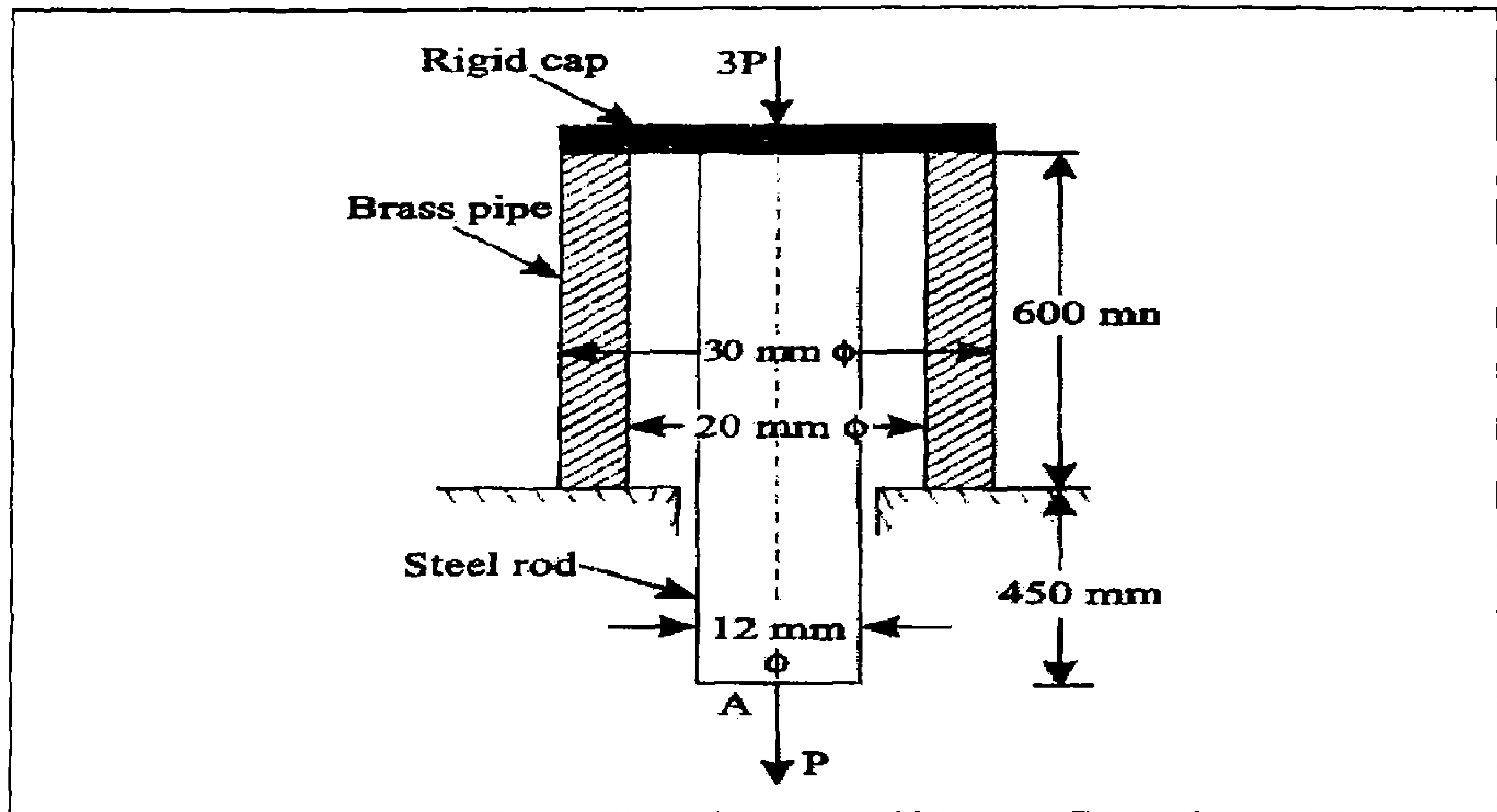


المثال رقم (٤)

قضيب من الصلب، قطره ١٢ مم، تم لحامه بلوح جاسيء مرتكز على ماسورة من النحاس قطرها الخارجي ٣٠ مم وقطرها الداخلي ٢٠ مم، كما هو موضح في الشكل الخاص بهذا المثال. لو أن (P) = ٥ كيلونيوتن، و(E_s) = ٢١٠ جيجانيوتن/م٢، و(E_b) = ١٠٥ جيجانيوتن/م٢، إذن حدد الآتي:

(i) إزاحة النقطة A.

(ii) الإجهادات المتولدة في كل من الصلب والنحاس.



الحل

لدينا الآتي:

$P = 5$ kN; $E_s = 210$ GN/m^2; $E_b = 105$ GN/m^2.

مساحة المقطع العرضي للأنبوبة النحاسية:

$$A_s = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{12}{1000}\right)^2 = 36\pi \times 10^{-6} \text{m}^2$$

مساحة المقطع العرضي للقضيب الصلب:

$$A_b = \frac{\pi}{4}\left[\left(\left(\frac{30}{1000}\right)^2 - \left(\frac{20}{1000}\right)^2\right)\right] = 125\pi \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

(i) إزاحة النقطة **A**:

مقدار الانضغاط في الأنبوبة النحاسية:

$$(\delta l)_b = \frac{4P \times (600/1000)}{125\pi \times 10^{-6} \times 105 \times 10^9}$$

$$(\delta l)_b = \frac{4 \times 5 \times 10^3 \times (600/1000)}{125\pi \times 10^{-6} \times (105 \times 10^9)}$$

$$(\delta l)_b = 0.2907 \times 10^{-3} \text{ m or } 0.2907 \text{ mm}$$

مقدار التمدد في القضيب الصلب:

$$(\delta l)_s = \frac{P \times (450/1000)}{36\pi \times 10^{-6} \times 210 \times 10^9}$$

$$(\delta l)_s = \frac{5\times10^3 \times (1050\times1000)}{36\pi\times10^{-6}\times(210\times10^9)} = 0.221\times10^{-3}\text{m} \quad \text{or} \quad 0.221 \text{ mm}$$

إزاحة النقطة A = ٠.٢٩٠٧ + ٠.٢٢١ = ٠.٥١١٧ مم.

(ii) الإجهادات المتكونة في كل من الصلب والنحاس:

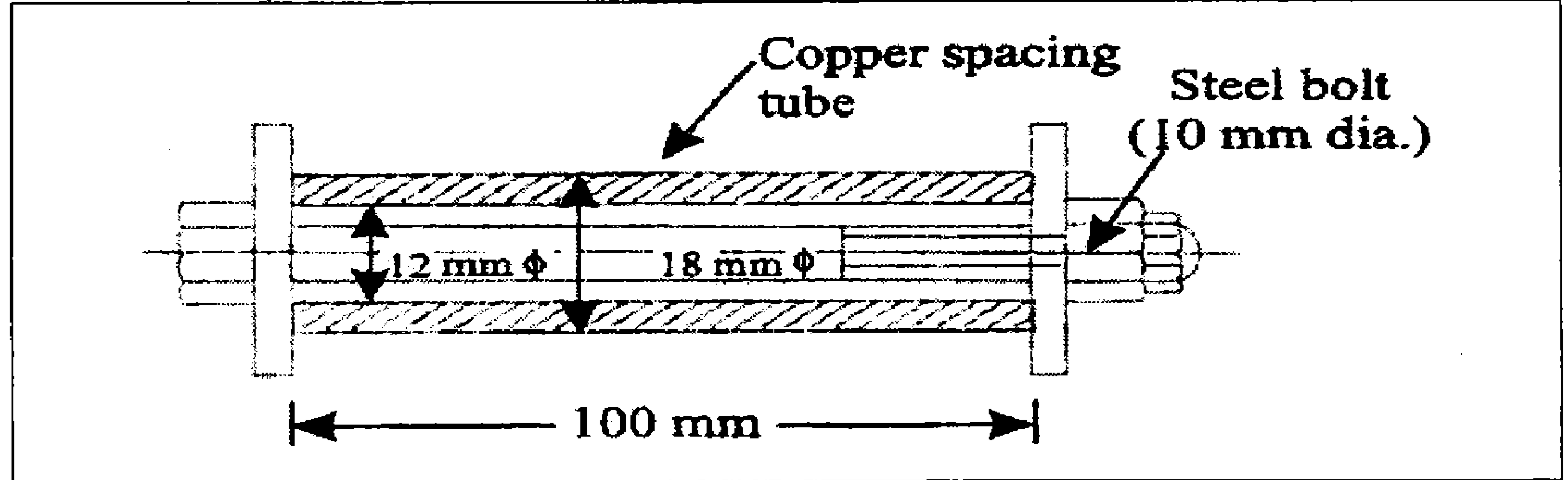
$$\sigma_s = \frac{5\times10^3}{36\pi\times10^{-6}}\times10^{-6}\ \text{MN/m}^2 = \mathbf{44.21\ MN/m^2}\ \textit{(tensile)}$$

$$\sigma_b = \frac{4\times(5\times10^3)}{125\pi\times10^{-6}}\times10^{-6}\ \text{MN/m}^2 = \mathbf{50.3\ MN/m^2}\ \textit{(comp).}$$

المثال رقم (٥)

المسار الصلب الموضح في الشكل الخاص بهذا المثال له **thread pitch** = ١.٦ مم. لو أن الصامولة تم ربطها يدويًا ابتداءًا بحيث أنه لا يحدث أي إجهاد في أنبوبة الحيز النحاسية، إذن احسب الإجهادات المتولدة في الأنبوبة وفي المسمار لو أنه تم بعد ذلك استخدام **spanner** للف الصامولة ٩٠ درجة. خذ البيانات التالية:

Ec = 100 GPa, Es = 209 GPa



الحل

في هذا المثال لدينا الآتي:

p = 1.6 mm, Ec = 100 GPa, Es = 209 GPa

الإجهادات المتولدة في الأنبوبة (σ_c) والمسمار (σ_s):

$$A_s = \frac{\pi}{4}\times\left(\frac{10}{1000}\right)^2 = 7.854\times10^{-5}\text{m}^2$$

$$A_c = \frac{\pi}{4}\times\left[\left(\frac{18}{1000}\right)^2 - \left(\frac{12}{1000}\right)^2\right] = 14.14\times10^{-5}\text{m}^2$$

قوة الشد الواقعة على المسمار الصلب (P_s) = قوة الانضغاط في الأنبوبة النحاسية $P = (P_c)$.

وأيضًا، الزيادة في طول المسمار + النقص في طول الأنبوبة = الإزاحة المحورية للصامولة، أي أن:

$$(\delta l)_s + (\delta l)_c = 1.6 \times \frac{90}{360} = 0.4 \text{ mm} = 0.4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

أو:

$$\frac{Pl}{A_s E_s} + \frac{Pl}{A_c E_c} = 0.4 \times 10^{-3} \quad (\because\ l_s = l_c = l)$$

أو:

$$Pl\left[\frac{1}{A_s E_s} + \frac{1}{A_c E_c}\right] = 0.4 \times 10^{-3}$$

أو:

$$P \times \left(\frac{100}{1000}\right)\left[\frac{1}{7.854 \times 10^{-5} \times 209 \times 10^{9}} + \frac{1}{14.14 \times 10^{-5} \times 100 \times 10^{9}}\right] = 0.4 \times 10^{-3}$$

أو:

$$0.1\, P\,(6.092 \times 10^{-8} + 7.072 \times 10^{-8}) = 0.4 \times 10^{-3}$$

أو:

$$P = \frac{0.4 \times 10^{-3}}{0.1(6.092 \times 10^{-8} + 7.072 \times 10^{-8})} = 30386 \text{ N}$$

إذن:

$$\sigma_s = \frac{P}{A_s} = \frac{30386}{7.854 \times 10^{-5}} \times 10^{-6} \text{ MPa} = \mathbf{386.88\ MPa}$$

الفصل الثانى

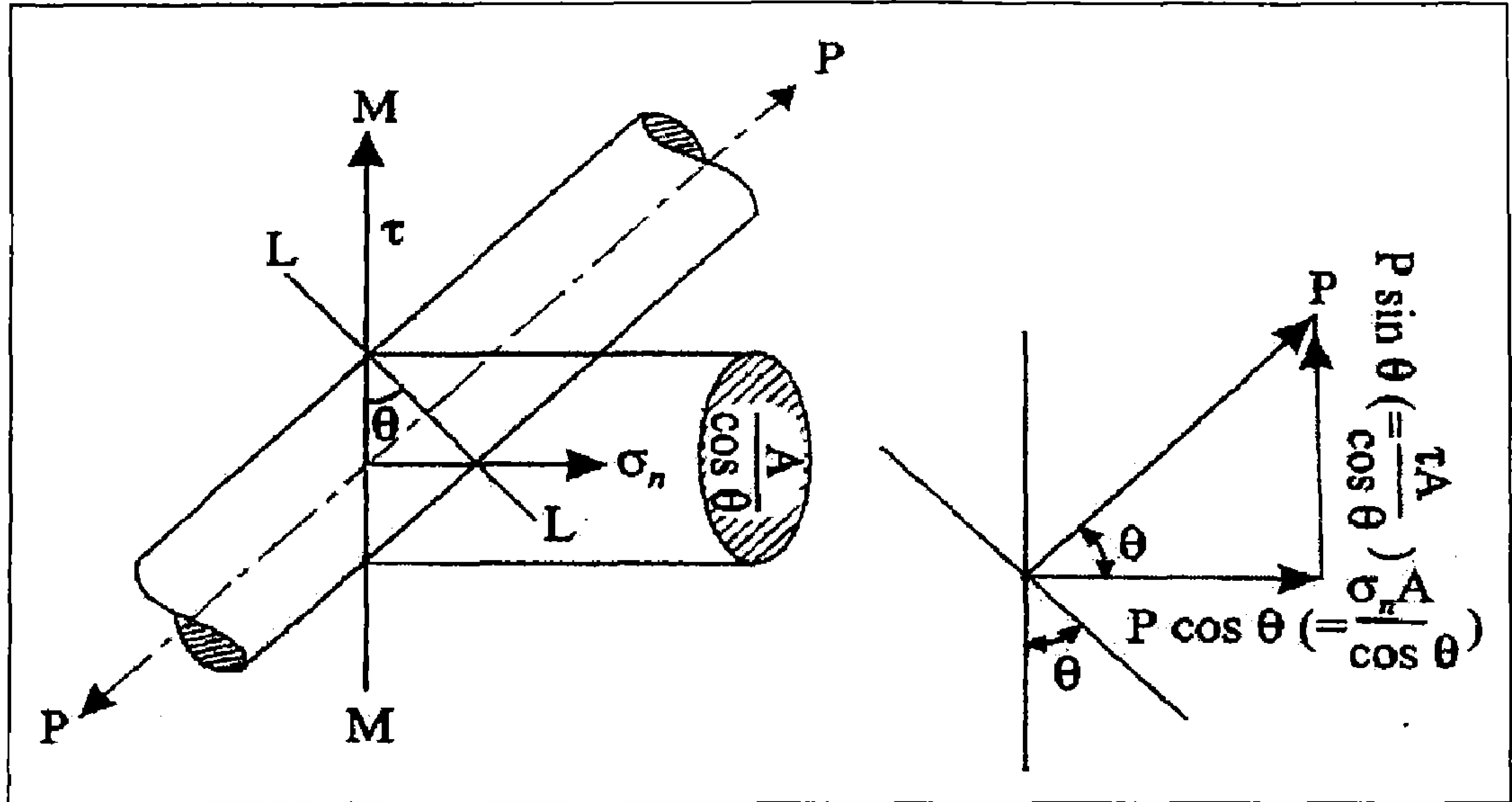
الإجهادات والانفعالات الأساسية

في هذا الفصل

- الإجهادات في عنصر معرض لقوة شد.
- الإجهادات الناتجة عن القص الصافي.
- الإجهادان المباشران المتعامدان على بعضهما البعض.
- المستويات الأساسية والإجهادات الأساسية.
- نظام الإجهاد الثنائي الأبعاد (نظرة عامة).
- الطرق البيانية - دائرة مور.
- العزم المدمج والالتواء.
- تحليل الانفعال.

١-٢ الإجهادات المتولدة في عنصر معرض لقوة شد

انظر الشكل التالي.



عندما يكون قضيب له مقطع عرضي منتظم مساحته A معرضًا لحمل محوري، حينئذ يكون الاجهاد المؤثر على أي مقطع عرضي مُعطى بـ LL العمودي على المحور عبارة عن P/A. وبدراسة مقطع عرضي آخر مُعطى بواسطة المستوى MM المائل بزاوية θ على LL، نجد أن المساحة المقطوعة بالمستوى تكون ((A/cos(θ)). والآن، لنجعل الإجهاد العمودي عبر MM عبارة عن (σ_n).

ويتحليل العمودي على MM، نجد أن:

$$\sigma_n . \frac{A}{\cos\theta} = P\cos\theta$$

إذن:

$\sigma_n = \frac{P}{A}\cos^2\theta$	(2-1)

بعد ذلك سيكون هناك إجهاد قص قدره (τ) يؤثر موازيًا لـ MM وبالتحليل في هذا الاتجاه نجد أن:

$$\tau . \frac{A}{\cos\theta} = P\sin\theta$$

$\tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$	(2-2)

هذا يعني أنه عندما يكون قضيب ما معرضًا لشد فقط، حينئذ ينتج كلا من إجهاد الشد وإجهاد القص. وفي أي مادة واقعة تحت ضغط مباشر، فإن الإجهادات المناظرة ستكون إجهاد ضغط وإجهاد قص. هذا، ومن الممكن أن يكون إجهاد القص الناتج أكثر أهمية من الاجهاد المطبق. وفي هذا الصدد نقول أنه يمكن حساب أكبر إجهاد قص كالآتي:

$\tau = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta = \frac{P}{A}\frac{\sin 2\theta}{2}$	(2-2a)

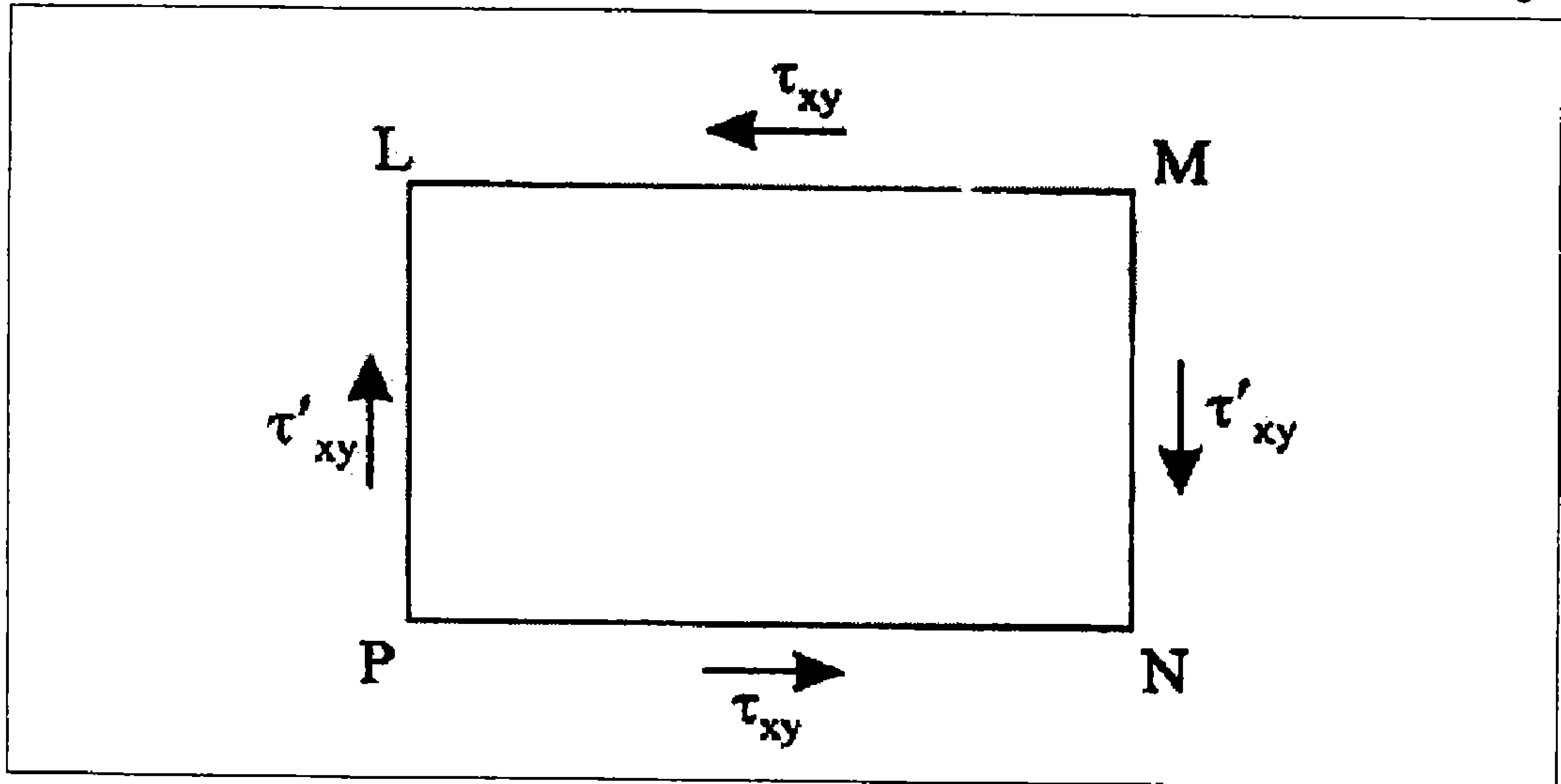
إذن، القيمة الأكبر تكون:

$\tau_{max} = \frac{P}{2A}$	(2-2b)

ملاحظة	انهيار الخرسانة في الانضغاط يحدث عادة عبر مستويات القص التي تميل بزاوية ٤٥ درجة على الحمل المطبق.

٢-٢ الإجهادات الناتجة عن القص فقط

في الشكل التالي نشاهد بلوك مستطيل LMNP، عمقه الوحدة ومتعامد على مستوى الورقة.



لنجعل (τ_{xy}) يرمز لإجهادات القص التي تؤثر عبر الأوجه ML وPN. ومن أجل الاتزان قد لا تكون هناك محصلة قوة ولا حتى محصلة ازدواج. وحيث أن $\tau_{xy} \times ML = \tau_{xy} \times PN$ فمن من ثم لن تكون هناك محصلة قوة أفقية، ولكن الازدواج الناتج عن هذا سيكون $\tau_{xy} \times ML \times MN$. لو أن إجهادات القص ($\tau'_{xy}$) تتولد على الأوجه PL وMN لموازنة الازدواج الـ outstanding من أجل الاتزان، إذن:

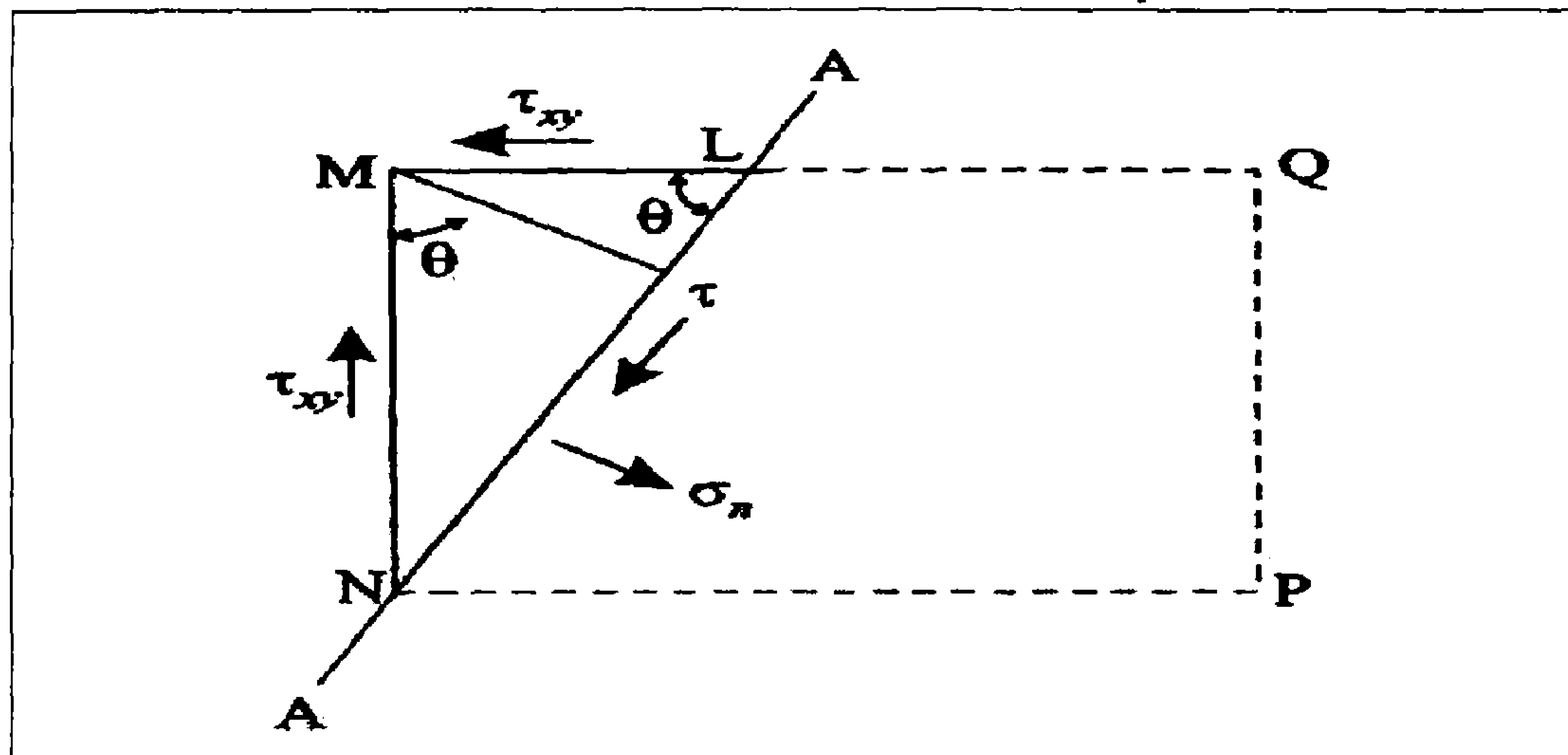
$\tau'_{xy} \times MN \times ML = \tau_{xy} \times ML \times MN$	(2-3)

أو:

$\tau_{xy} = \tau'_{xy}$

ومن ثم، من أجل الاتزان، يجب أن تتولد إجهادات قص متممة (τ'_{xy}).

انظر الشكل التالي:



لو أن مستوى AA تم اختياره اعتباطيًا ليقطع البلوك بحيث يصنع زاوية (θ) مع LM، حينئذ يمكن تحديد الإجهادات المؤثرة عبر المستوى عن طريق التحليل. لنجعل (σ_n) ترمز إلى الإجهاد المباشر ولنجعل (τ) إجهاد القص عبر AA.

بتحليل المتعامد على AA، نحصل على الآتي:

$$\sigma_n \times LN = \tau_{xy} \times LM \sin\theta + \tau_{xy} \times MN \cos\theta$$

إذن:

$$\sigma_n = \tau_{xy} \times \frac{LM}{LN} \sin\theta + \tau_{xy} \times \frac{MN}{LN} \cos\theta$$

$$\sigma_n = \tau_{xy} \cos\theta \sin\theta + \tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\sigma_n = 2\,\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$\sigma_n = \tau_{xy} \sin 2\theta$	(2-4)

أقصى قيمة سوف تحدث عندما $2\theta = 90^\circ$ أو $\sigma_n = \tau_{xy}$ عندما $\theta = 45^\circ$. أما أدنى قيمة فتحدث عندما $2\theta = -90^\circ$ أو $\sigma_n = -\tau_{xy}$ (انضغاط). وبعبارة أخرى، حالة القص الصافي (القص فقط) تكافئ إجهاد شد مباشر وإجهاد انضغاط مباشر يؤثران وهما متعامدان على بعضهما البعض.

وبتحليل الموازي إلى AA، نحصل على الآتي:

$$\tau \times LN = \tau_{xy} \times MN \sin\theta - \tau_{xy} \times LM \cos\theta$$

$$\tau = \tau_{xy} \frac{MN}{LN} \sin\theta - \tau_{xy} \times \frac{LM}{LN} \cos\theta$$

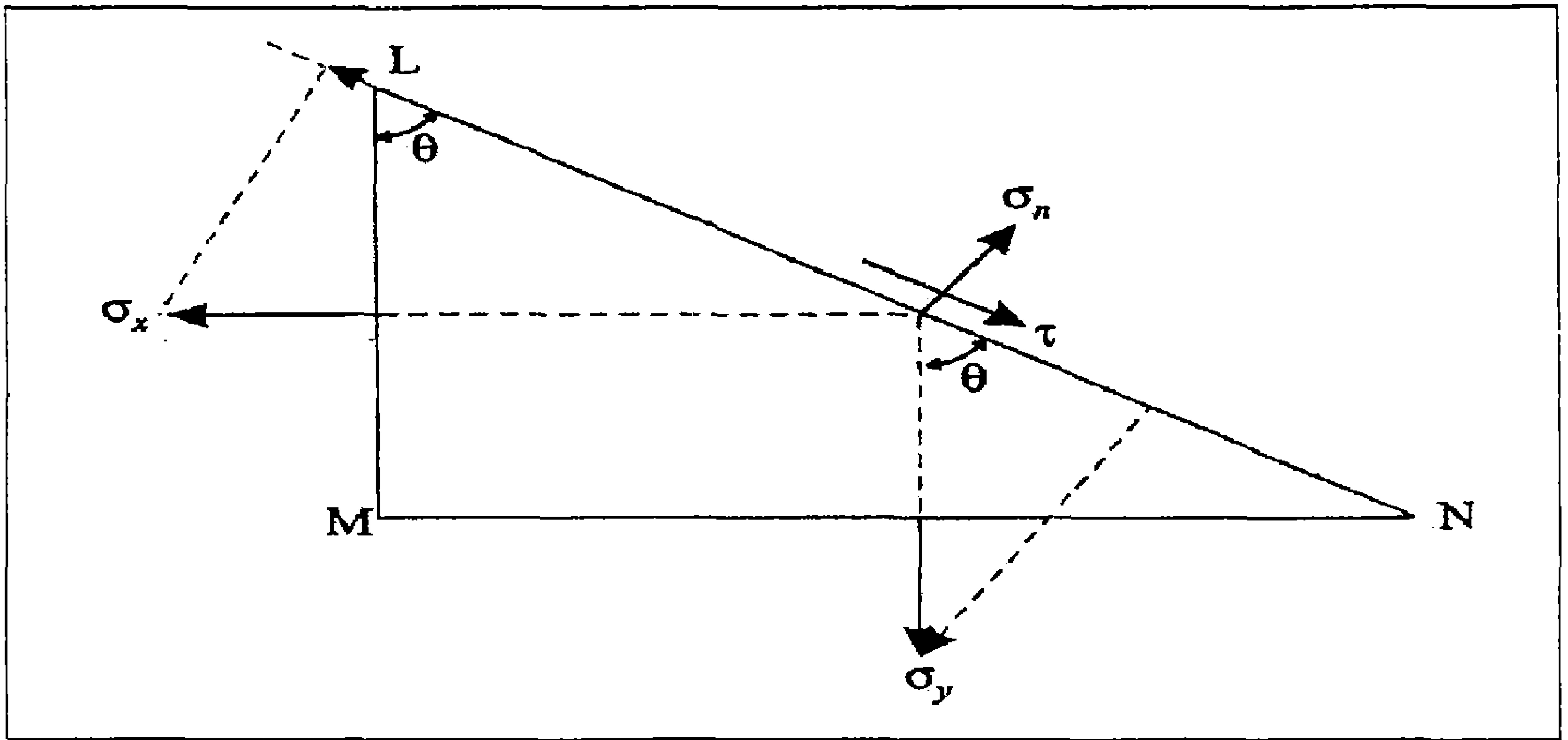
$$\tau = \tau_{xy} \times \sin\theta \sin\theta - \tau_{xy} \cos\theta \cos\theta = \tau_{xy} (\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

$\tau = (-)\, \tau_{xy} \cos 2\theta$	**(2-5)**

إذن، ستكون (τ) صفرًا عندما $\theta = \pm 45°$.

٢-٣ الإجهادات المباشرة المتعامدة على بعضها

انظر الشكل التالي:



عند أي نقطة في مادة ما حيث يوجد إجهاد مؤثر، يكون من الممكن افتراض أن النقطة تتألف من بلوك مثلثي صغير جدًا، بحيث أن الإجهادات تؤثر عبر أوجه البلوك. لنعتبر أن الإجهادات المباشرة (σ_x) و(σ_y) تؤثر عبر الأوجه LM وMN وأن البلوك له عمق يساوي الوحدة في الاتجاه المتعامد على LMN. لنجعل الإجهادات (τ) و(σ_n) تؤثر على نفس المستوى وتصنع زاوية θ مع LM.

بالتحليل في الاتجاه العمودي على LN، نحصل على الآتي:

$$\sigma_n \times LN = \sigma_x \times LM \cos\theta + \sigma_y\, MN \sin\theta$$

$$\sigma_n = \sigma_x \times \frac{LM}{LN} \cos\theta + \sigma_y \frac{MN}{LN} \sin\theta$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta = \frac{\sigma_x}{2} \times 2\cos^2\theta + \frac{\sigma_y}{2} \times 2\sin^2\theta$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 - \sin^2\theta + \cos^2\theta) + \frac{\sigma_y}{2} (1 - \cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sigma_x \left[\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2}\right] - \sigma_y \left[\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2}\right]$$

$\sigma_n = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta$	**(2-6)**

وعندما تكون (θ=0)، إذن:

$\sigma_n = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_x$	**(2-6a)**

وعندما تكون (θ=π/2)، إذن:

$\sigma_n = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_y$	**(2-6b)**

وبالتحليل في الاتجاه الموازي لـ LN، نحصل على الآتي:

$$\tau \times LN = \sigma_x \times LM \sin\theta - \sigma_y \times MN \cos\theta$$

$$\tau = \sigma_x \times \frac{LM}{LN}\sin\theta - \sigma_y \times \frac{MN}{LN}\cos\theta$$

$$\tau = \sigma_x \cos\theta \sin\theta - \sigma_y \sin\theta\cos\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta$$

$\tau = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta$	**(2-7)**

القيمة القصوى لـ (τ) تحدث عندما $2\theta = \pi/2$ أو $\theta = \pi/4$، ومن ثم:

$\tau_{max} = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$	**(2-7a)**

الإجهاد المحصلة:

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\tau}{\sigma_n}$$

حيث إن:

المعنى والاستخدام	المعامل
الزاوية التي يصنعها الإجهاد المحصلة مع الاتجاه العمودي على المستوى وهي تُعرف بالميلان **obliquity**.	ϕ

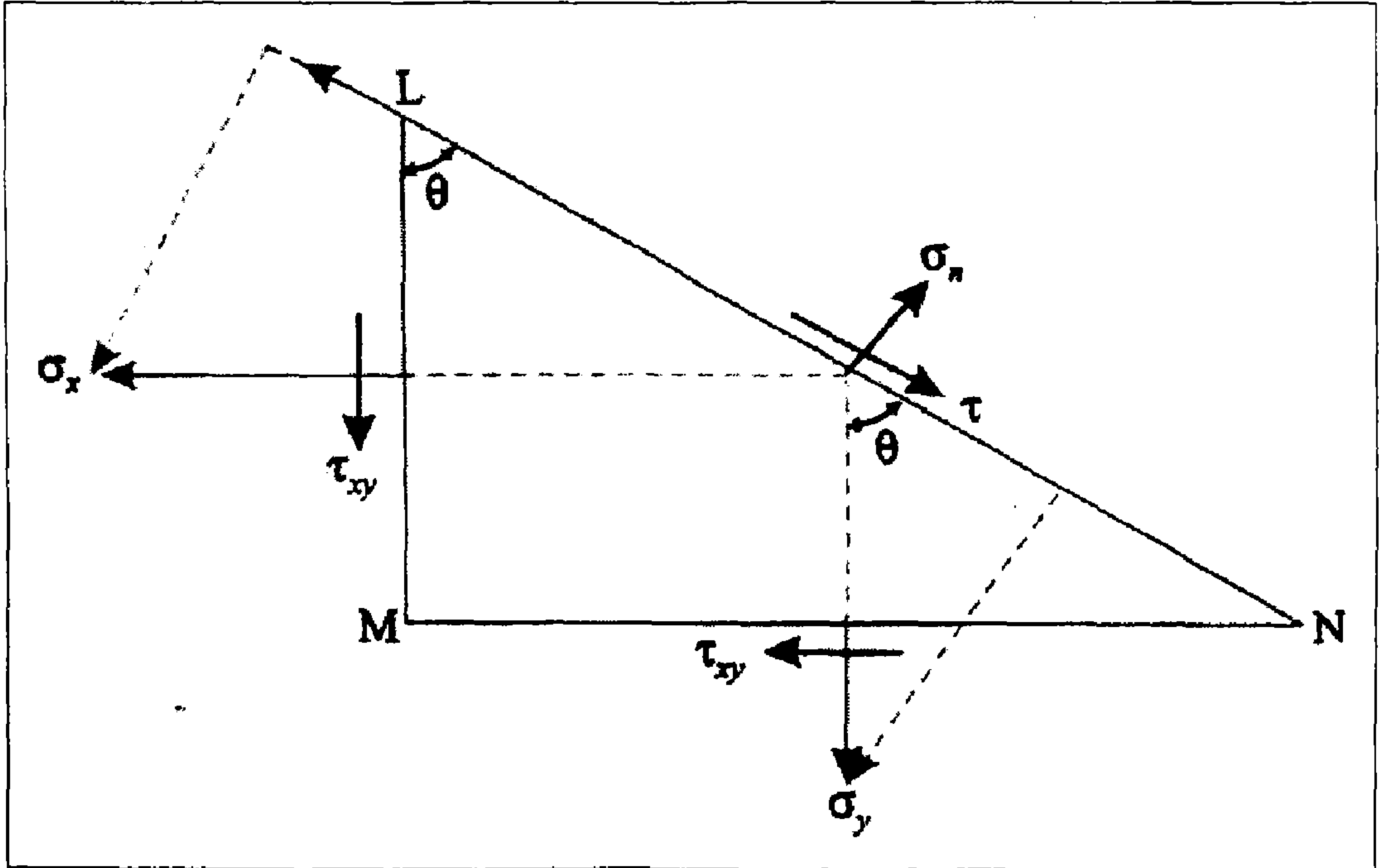
٢-٤ المستويات الأساسية والإجهادات الأساسية

أي جسم يمكن أن يكون معرضًا لإجهادات في مستوى واحد أو في مستويات مختلفة. هناك دائمًا ثلاثة مستويات متعامدة على بعضها البعض والتي عبرها يمكن تحليل

الإجهادات عند نقطة معينة (في أي جسم) بالكامل إلى إجهادات عمودية على تلك المستويات. هذه المستويات التي تمر عبر النقطة بطريقة تجعل الإجهاد المحصلة عبرهم عبارة عن إجهاد عمودي كليًا تُعرف بـ "المستويات الأساسية Principal Planes" والإجهادات العمودية عبر تلك المستويات تُعرف إصطلاحًا بـ "الإجهادات الأساسية Principal Stresses". المستوى الذي يحمل الإجهاد العمودي الأقصى يسمى المستوى الأساسي الأكبر major principal plane والإجهاد المناظر يسمى الإجهاد الأساسي الأكبر major principal stress. أما المستوى الذي يحمل الإجهاد العمودي الأدنى فيُسمى المستوى الأساسي الأصغر minor principal plane والإجهاد المناظر يسمى الإجهاد الأصغر الأكبر minor principal stress.

٢-٥ نظام الإجهاد الثنائي الأبعاد (العام)

عندما تعتبر الإجهادات عند نقطة ما أنها تؤثر على بلوك مثلثي صغير عند نقطة ما مثلما ذكرنا في الفقرة رقم ٢-٣، إذن سوف يتألف نظام الإجهاد العام من إجهادات مباشرة وإجهادات قص تؤثر عبر أوجه البلوك. لندرس مستوى ما LN يصنع زاوية (θ) مع مستوى الإجهاد، كما هو موضح في الشكل التالي:



وبالتحليل في الاتجاه العمودي على LN، نحصل على الآتي:

$$\sigma_n \times LN = \tau_{xy}\, LM \sin\theta + \sigma_x\, LM \cos\theta + \tau_{xy}\, MN \cos\theta + \sigma_y\, MN \sin\theta$$

إذن:

$$\sigma_n = \tau_{xy}\frac{LM}{LN}\sin\theta + \sigma_x\frac{LM}{LN}\cos\theta + \tau_{xy}\frac{MN}{LN}\cos\theta + \sigma_y\frac{MN}{LN}\sin\theta$$

$$\sigma_n = \tau_{xy}\cos\theta\sin\theta + \sigma_x\cos^2\theta + \tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_y\sin^2\theta$$

$$\sigma_n = 2\,\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta$$

$\sigma_n = \tau_{xy}\sin 2\theta + \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta$	**(2-8)**

وبالتحليل عبر LN، نحصل على الآتي:

$$\tau\times LN = \tau_{xy}\times MN\sin\theta + \sigma_x\times LM\sin\theta - \tau_{xy}\times LM\cos\theta - \sigma_y\times MN\cos\theta$$

$$\tau = \tau_{xy}\frac{MN}{LN}\sin\theta + \sigma_x\frac{LM}{LN}\sin\theta - \tau_{xy}\frac{LM}{LN}\cos\theta - \sigma_y\frac{MN}{LN}\cos\theta$$

$$\tau = \tau_{xy}\sin\theta\sin\theta + \sigma_x\cos\theta\sin\theta - \tau_{xy}\cos\theta\cos\theta - \sigma_y\sin\theta\cos\theta$$

$$\tau = \tau_{xy}\sin^2\theta + \sigma_x\sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}\cos^2\theta - \sigma_y\sin\theta\cos\theta$$

$$\tau = \tau_{xy}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta$$

$\tau = \left[\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right]\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta$	**(2-9)**

(i) من أجل العثور على الإجهادات الأساسية، ينبغي الحصول على القيم القصوى والدنيا لـ (σ_n).

بتفاضل (σ_n) بالنسبة لـ (θ) في المعادلة رقم (2-8)، نحصل على الآتي:

$$\frac{d(\sigma_n)}{d\theta} = 2\,\tau_{xy}\cos 2\theta - \frac{2(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\theta$$

وبمساواة هذا بالصفر من أجل الـ (σ_x) القصوى، نحصل على الآتي:

$$0 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta$$

وبالمقارنة مع المعادلة رقم (2-9)، نجد أن $(\tau=0)$.

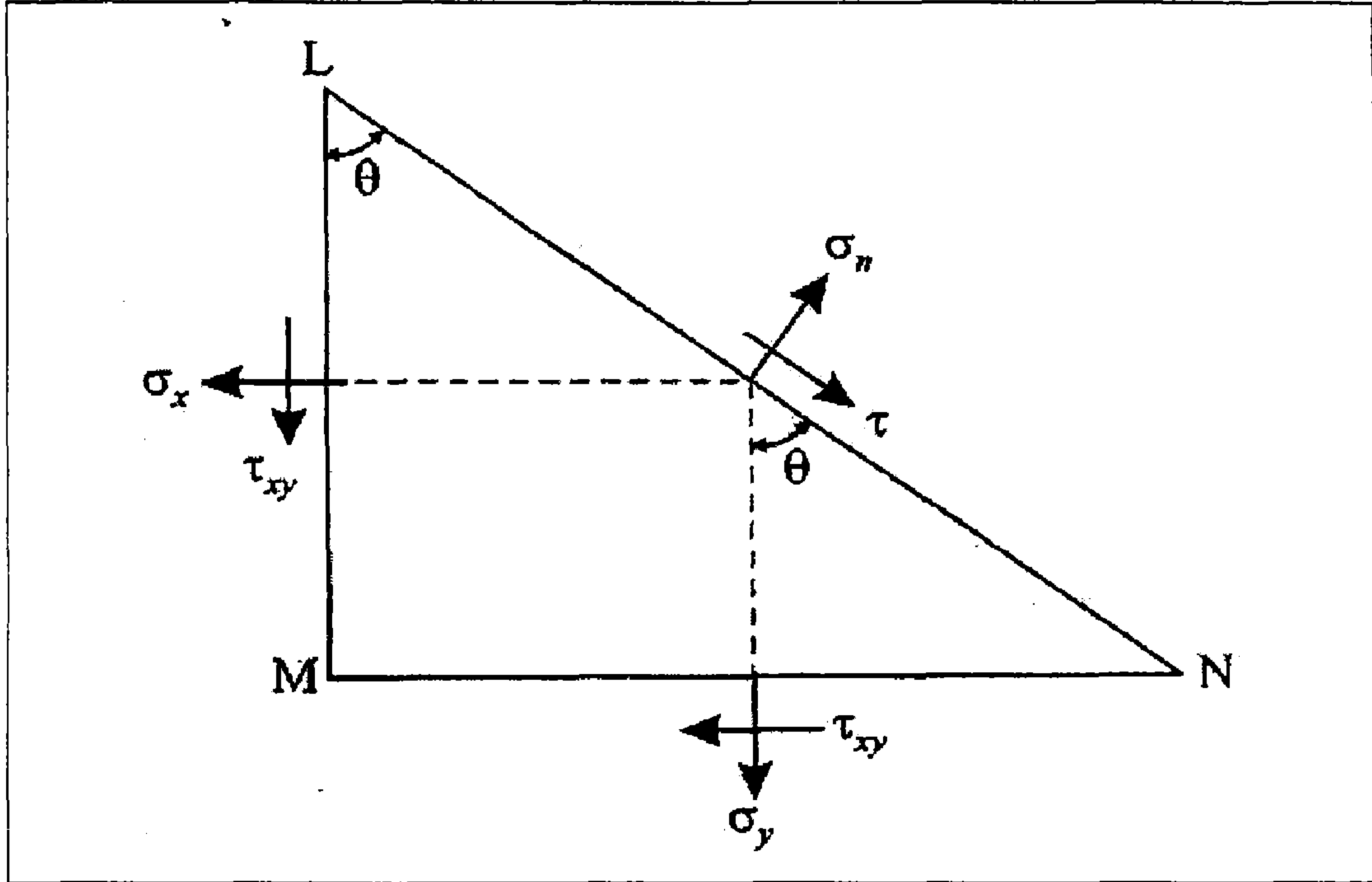
ومن ثم، بالنسبة لأي مستوى أساسي قد لا يكون هناك إجهاد قص يؤثر. وأيضًا:

$$\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta = \tau_{xy}\cos 2\theta$$

أو:

$\tan 2\theta = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$	**(2-10a)**

هذا يؤدي إلى أنه بالنسبة لأي نظام معين، يمكن حساب الإجهادات الأساسية عن طريق الأخذ في الاعتبار المستويات التي لا تحمل إجهاد قص (الشكل التالي).



(ii) للحصول على أقصى قيمة لـ (τ)، فبتفاضل (τ) بالنسبة لـ (θ) في المعادلة رقم (2-9) وبالمساواة بالصفر، نحصل على الآتي:

$$\frac{d(\tau)}{d\theta} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) 2 \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \times 2 = 0$$

أو:

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta = -2\,\tau_{xy} \sin 2\theta$$

أو:

$$\tan 2\theta = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2\,\tau_{xy}}$$

وأيضًا:

$$\cot (180° - 2\theta_1) = -\cot 2\theta_1$$

وكذلك:

$$\cot (360° - 2\theta_2) = -\cot 2\theta_2$$

حيث أن (θ_1) و(θ_2) عبارة عن ميول إجهاد القص الأقصى على مستوى إجهاد الشد (σ_x). إذن:

$\cot(180° - 2\theta_1) = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$	(2-10b)

وكذلك:

$$\cot(360° - 2\theta_2) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

وبتحليل العمودي على LM، نحصل على الآتي:

$$\sigma_x \times LM + \tau_{xy} \times MN = \sigma_n \times LN \cos\theta$$

وبقسمة كلا الطرفين على LN، نحصل على الآتي:

$$\sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta = \sigma_n \cos\theta \qquad \left[\because \frac{LM}{LN} = \cos\theta, \frac{MN}{LN} = \sin\theta\right]$$

$\sigma_x + \tau_{xy} \tan\theta = \sigma_n$	(2-11)

وبتحليل الموازي لـ LM، نحصل على الآتي:

$$\sigma_y \times MN + \tau_{xy} \times LM = \sigma_n \times LN \sin\theta$$

وبقسمة كلا الطرفين على LN، نحصل على الآتي:

$$\sigma_y \sin\theta + \tau_{xy} \cos\theta = \sigma_n \sin\theta$$

$\sigma_y + \tau_{xy} \cot\theta = \sigma_n$	(2-11a)

ومن ثم:

$\tau_{xy} \tan\theta = \sigma_n - \sigma_x$	(i)

وكذلك:

$\tau_{xy} \cot\theta = \sigma_n - \sigma_y$	(ii)

$$\tau_{xy}^2 = (\sigma_n - \sigma_x)(\sigma_n - \sigma_y)$$

أو:

$$\tau_{xy}^2 = \sigma_n{}^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_n + \sigma_x \sigma_y$$

وبحل هذه المعادلة، نجد أن:

$$\sigma_n\ (= \sigma \text{ say}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4\sigma_x \sigma_y + 4\tau_{xy}^2}$$

أي أن:

$\sigma = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$	(2-12)

إذن، الإجهاد الأساسي الأكبر يكون:

$\sigma_1 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	(2-12a)

والإجهاد الأساسي الأصغر يكون:

$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	(2-12b)

وأيضًا:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

أو:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

أو:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(وأيضًا، $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$).

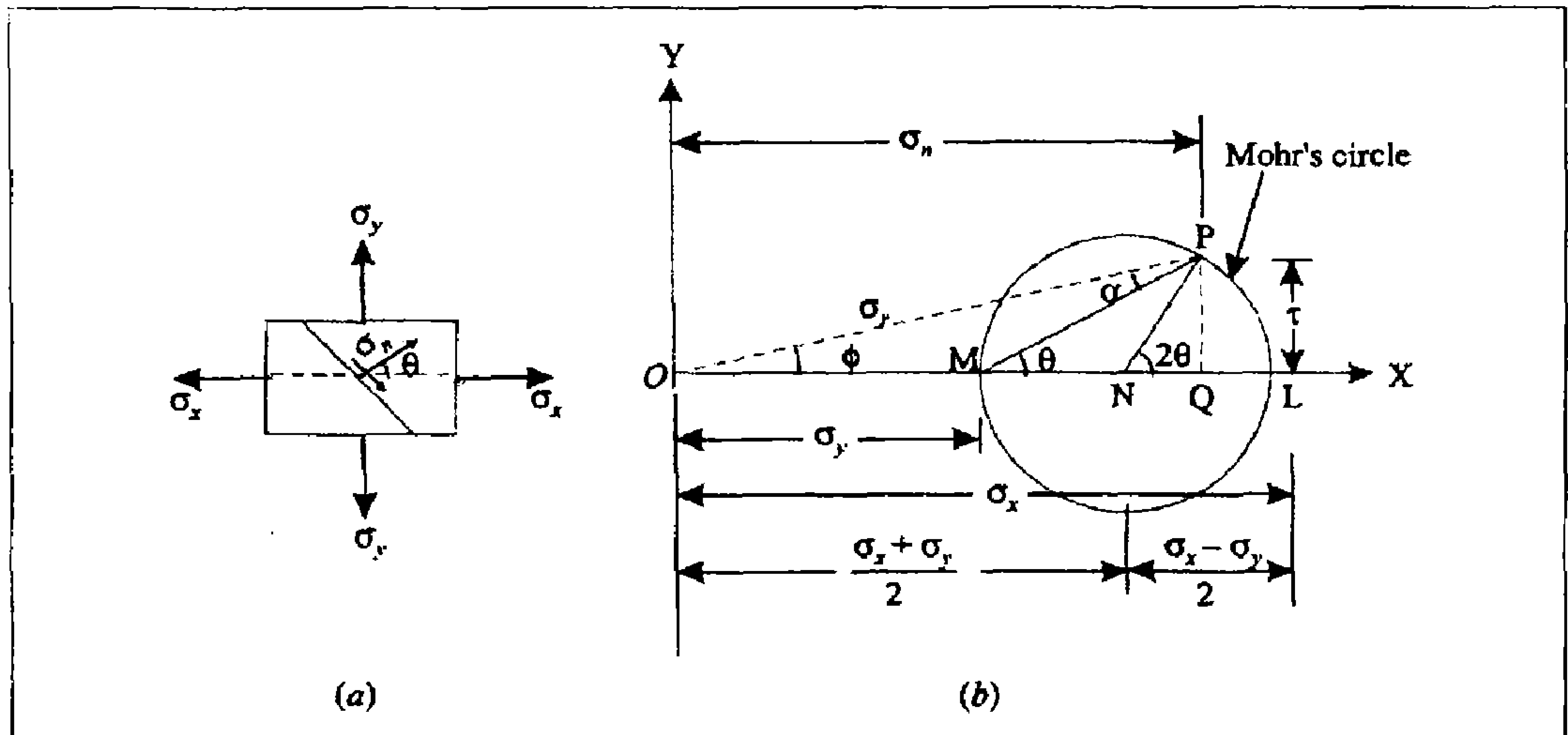
٢-٦ الطرق والأساليب الرسومية أو البيانية Graphical Methods

٢-٦-١ دائرة مور Mohr's Circle

لقد قام العالم الألماني Otto Mohr بابتكار طريقة بيانية من أجل إيجاد الإجهادات العمودية وإجهادات القص على أي وجه من أوجه أي عنصر عندما يكون معرضًا لإجهادين متعامدين على بعضهما البعض. هذه الطريقة سنشرحها كالآتي:

٢-٦-١-١ بناء دائرة مور من أجل الإجهادات المتشابه like stresses

انظر الشكل التالي:



فيما يلي خطوات بناء دائرة مور:

(١) باستخدام مقياس رسم مناسب، نجعل طول OL يساوي الإجهاد (σ_x) ونجعل طول OM يساوي الإجهاد (σ_y) وذلك على المحور OX.

(٢) نقوم بتنصيف LM عند N.

(٣) مع جعل N مركز وNL أو NM نصف القطر، نقوم برسم دائرة.

(٤) عند المركز N نرسم خط NP يصنع مع المحور OX زاوية قدرها ($2*\theta$)، في نفس الاتجاه الذي يصنعه العمودي على المستوى مع اتجاه الإجهاد (σ_x). في الجزء (a) بالشكل التوضيحي السابق الذي يقدم نظام الإجهاد، نجد أن العمودي على المستوى يصنع زاوية قدرها (θ) مع اتجاه الإجهاد (σ_x) في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. ومن ثم، يتم رسم الخط NP في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

(٥) من P، نسقط عمود PQ على المحور OX. الـ PQ سوف يمثل (σ) كما أن OQ سوف يمثل (σ_n).

الآن، من ديجرام الإجهاد نجد أن:

$$NP = NL = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

وباستخدام المعادلة رقم (٢-٧)، نحصل على الآتي:

$$PQ = NP \sin 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta = \tau$$

وبالمثل لو استخدمنا المعادلة رقم (٢-٦) نحصل على الآتي:

$$OQ = ON + NQ = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta = \sigma_n$$

وأيضًا، من دائرة الإجهاد، تكون (τ) عند الحد الأقصى عندما:

$$2\theta = 90^\circ, \text{ or } \theta = 45^\circ$$

كما إنه باستخدام المعادلة رقم (2-7a)، نحصل على الآتي:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

الإشارات المستخدمة:

(i) من أجل تعليم (τ) في نظام الإجهاد، سوف نأخذ القص الذي في اتجاه عقارب الساعة موجب والذي في عكس اتجاه عقارب الساعة سالب.

(ii) القيم الموجبة لـ (τ) ستكون فوق المحور والقيم السالبة ستكون أسفل المحور.

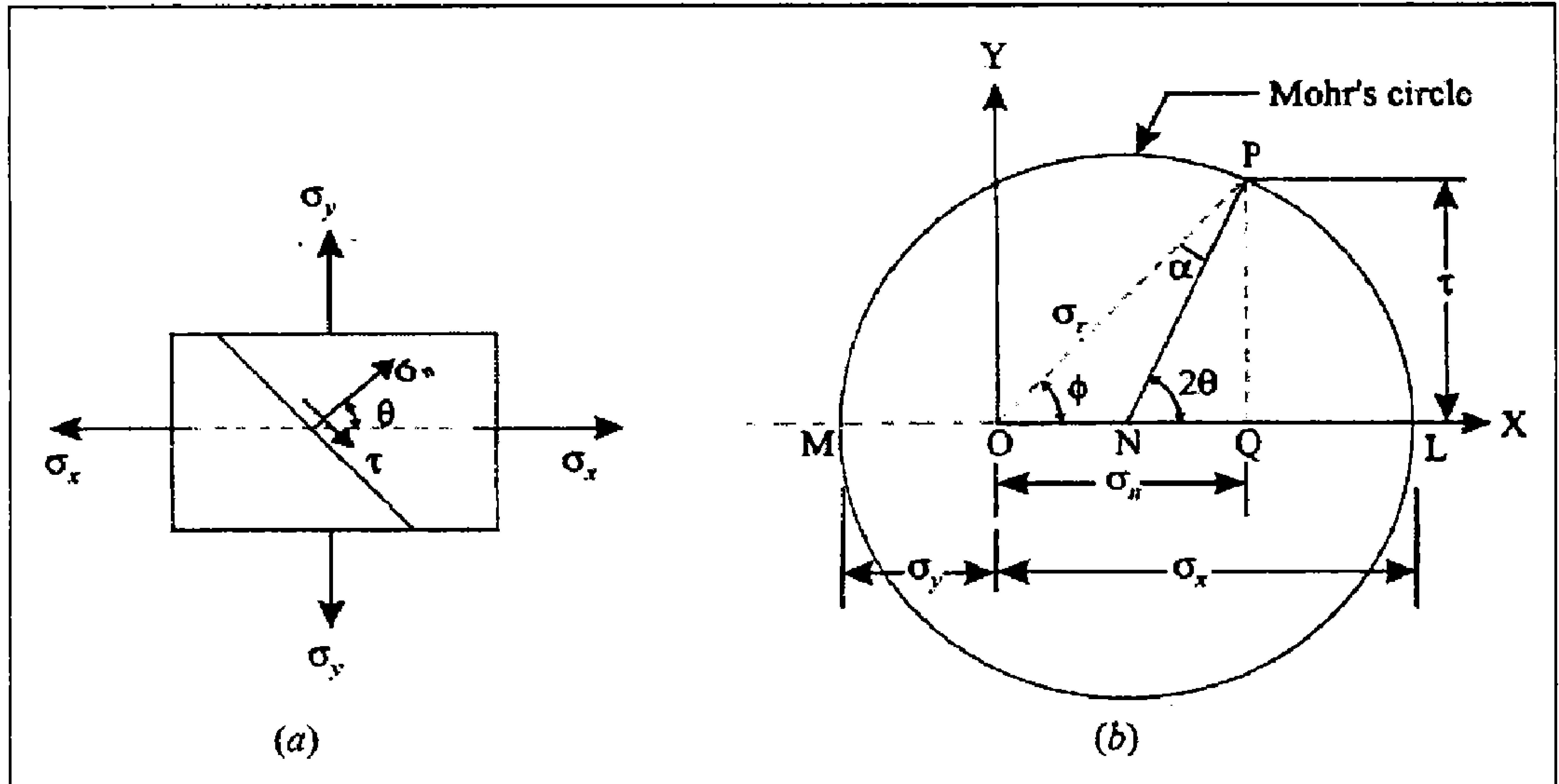
(iii) لو أن (θ) في عكس اتجاه عقارب الساعة، حينئذ سيكون متجه نصف القطر فوق المحور وستكون (θ) موجبة. ولو أن (θ) في نفس اتجاه عقارب الساعة، حينئذ سيكون متجه نصف القطر أسفل المحور وستكون (θ) سالبة.

(iv) إجهاد الشد سيكون موجبًا وسيتم توقيعه على يمين نقطة الأصل O.

(v) إجهاد الانضغاط سيكون سالبًا وسيتم توقيعه على يسار نقطة الأصل O.

٢-٦-١-٢ بناء دائرة مور من أجل الإجهادات غير المتشابه unlike stresses

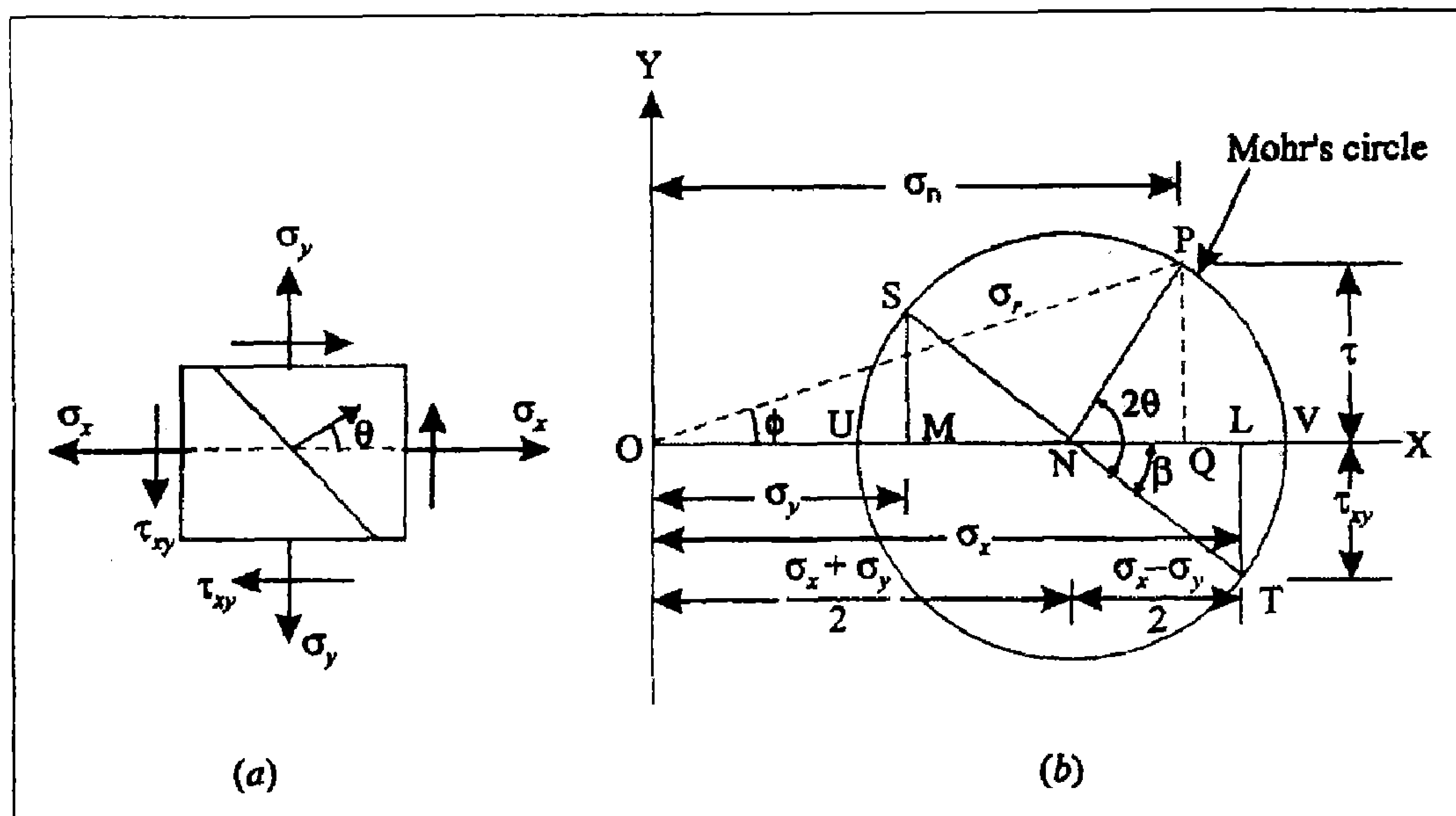
في حالة كون (σ_x) و(σ_y) مختلفان، حينئذ سيتم إتباع نفس الإجراء باستثناء أنه سيتم قياس (σ_x) و(σ_y) على جانبي نقطة الأصل. هذا البناء نشاهده في الشكل التالي:



من الممكن ملاحظة أن اتجاه (σ_n) سوف يعتمد على موضعه بالنسبة للنقطة O. فلو أنه على يمين O، إذن سيكون اتجاه (σ_n) مثل اتجاه (σ_x).

٢-٦-١-٣ بناء دائرة مور من أجل إجهادين مباشرين متعامدين على بعضهما البعض مع حالة القص البسيط

انظر الشكل التالي:



اتبع خطوات البناء التي تتبع لو أن المادة معرضة لإجهادات مباشرة (σ_x) و(σ_y) مع حالة القص البسيط.

(١) باستخدام مقياس رسم مناسب، نجعل طول OL - (σ_x) ونجعل طول OM - (σ_y) عبر المحور OX.

(٢) عند L نرسم LT المتعامد على OX ويساوي (τ_{xy}). لقد تم رسم LT لأسفل (بناءً على نظام الإشارات المعمول به) بسبب أن (τ_{xy}) يؤثر لأعلى بالنسبة للمستوى الذي عبره يؤثر الـ (σ_x)، مما يؤدي إلى تدويره في *عكس اتجاه عقارب الساعة* ويكون *سالبًا*.

(٣) بالمثل، نجعل MS متعامد على OX ويساوي (τ_{xy})، ولكن أعلى OX.

(٤) نصل بين S وT ليقطع المحور في N.

(٥) مع كون N مركزًا وNS أو NT عبارة عن نصف قطر، نرسم دائرة.

(٦) عند N نرسم NP بحيث يصنع زاوية ($2*\theta$) مع NT في عكس اتجاه عقارب الساعة.

(٧) نرسم PQ متعامد على المحور. إن طول PQ سوف يعطي قيمة (τ) في حين أن طول OQ سوف يعطي قيمة (σ_n) كما أن طول OP سوف يعطي قيمة (σ_r).

<u>الإثبات الرياضي:</u>

لنجعل نصف قطر دائرة الإجهاد عبارة عن R ومن ثم:

$$R = \sqrt{NL^2 + LT^2} = \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

وأيضًا:

$$R \cos \beta = NL = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$
$$R \sin \beta = LT = \tau_{xy}$$

والآن:

$$OQ = ON + NQ = ON + R \cos (2\theta - \beta)$$
$$OQ = ON + R \cos 2\theta \cos \beta + R \sin 2\theta \sin \beta$$

وبناءًا على المعادلة رقم (٢-٨)، فإن:

$$OQ = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$
$$OQ = \sigma_n$$

وبالمثل:

$$PQ = R \sin (2\theta - \beta) = R \sin 2\theta \cos \beta - R \cos 2\theta \sin \beta$$

وبناءًا على المعادلة رقم (٢-٩)، فإن:

$$PQ = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

الاستنتاجات التالية يمكن استخلاصها من دائرة الإجهاد:

(i) عندما تنطبق P على V، فإن (σ_n) تصل إلى القيمة القصوى.

$$\sigma_{n(max)} = OV = ON + NV$$

وبما إن:

$$NV = NT \text{ and, } NT^2 = NL^2 + LT^2$$

إذن:

$$\sigma_{n(max)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

الـ [$\sigma_{n(max)}$] أو (σ_1) تُعرف *بالإجهاد الأساسي الأكبر.*

$$\tau = 0; \sigma_{r\,(max)} = \sigma_{n\,(max)}$$

وبناءًا على المعادلة رقم (٢-١٠)، فإن:

$$\tan 2\theta = \tan \beta = \frac{\tau_{xy}}{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(i) عندما تنطبق P على U، فإن (σ_n) تصل إلى القيمة الدنيا.

$$\sigma_{n\ (min)} = OU = ON - NU$$

وبما إن:

$$NU = NS = NT \text{ and } NU^2 = NT^2 = NL^2 + LT^2$$

إذن:

$$\sigma_{n\ (min)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

الـ [$\sigma_{n(min)}$] أو (σ_2) تُعرف بالإجهاد الأساسي الأصغر.

$$\tau = 0; \sigma_{r\ (min)} = \sigma_{n\ (min)}\ ; \theta = 90° + \beta/2$$

(iii) عندما $2\theta = \beta + 90°$، فإن (τ) تصل إلى أقصى قيمة.

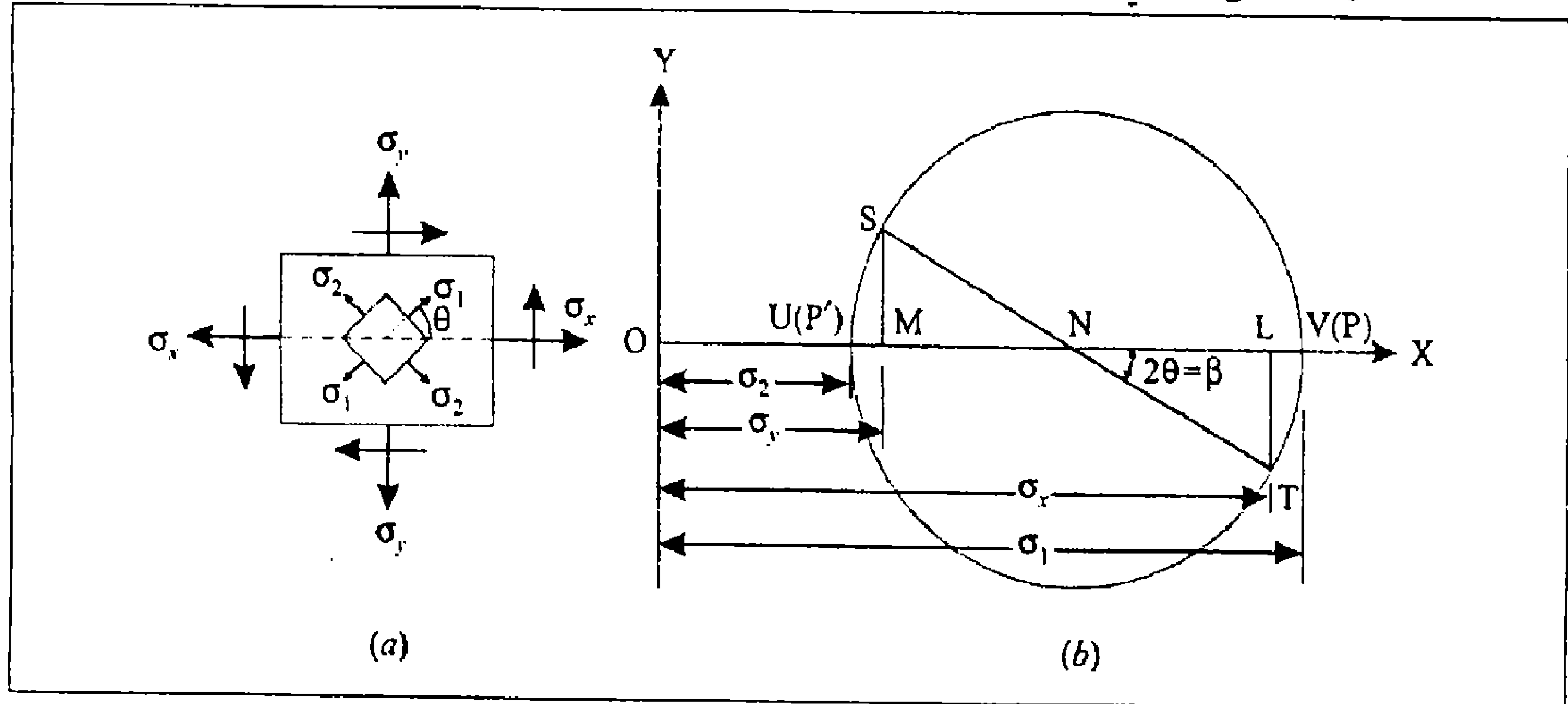
$$\tau_{max} = \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

وعندما $2\theta = \beta + 270°$، فإن:

$$\tau_{max} = -\sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

٢-٦-١-٤ بناء دائرة مور من أجل الإجهادات الأساسية

انظر الشكل التالي:



(a) (b)

فيما يلي خطوات بناء دائرة مور من أجل الإجهادات الأساسية:

(١) من خلال مقياس رسم مناسب، نجعل طول كل من OL وOM متناسب مع قيمة كل من (σ_x) و(σ_y) على الترتيب.

(٢) عند L نقيم العمود LT وعند M نقيم العمود MS بحيث أن (LT=MS) ومن خلال مقياس الرسم المناسب نجعل طولهما متناسب مع قيمة (τ_{xy}) في الاتجاهات المناسبة.

(٣) نصل بين S وT، ليقطع المحور في N.

وحيث أن ($\tau=0$)، فإن NV يمثل المستوى الأساسي الأكبر، مع كون P منطبقة على V.
وبالمثل، فإن 'NP يمثل المستوى الأساسي الأصغر، مع كون 'P منطبقة على U.

$$OV = ON + NV = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$$

حيث أن R عبارة عن نصف قطر الدائرة.

$$OV = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_1$$

وبالمثل:

$$OU = ON - NU$$

$$OU = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_2$$

$$\tan\beta = \frac{LT}{LN} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

$$\tan\beta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan 2\theta$$

٧-٢ الانثناء والالتواء المدمج

لندرس سويًا shaft قطره d ومعرض لعزم انحناء M ولعزم التواء T عند مقطع عرضي ما.

إجهاد الانثناء (σ_b) عند أي نقطة في المقطع العرضي عند نصف قطر r وعلى مسافة y من المحور الطبيعي يتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$\sigma_b = \frac{M}{I}y$	(i)

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
I	عزم القصور الذاتي للمقطع العرضي حول المحور الطبيعي.

أما إجهاد القص (τ) عند النقطة فيتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$\tau = \frac{T}{I_P} r$	(ii)

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
I_p	عزم القصور الذاتي القطبي.

مواضع المستويات الأساسية التي تمر عبر النقطة يتم حسابها من خلال العلاقة التالية:

$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_b}$	(iii)

كذلك، يتم حساب الإجهادات الأساسية من خلال العلاقة التالية:

$\sigma_1 = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{4} + \tau^2}$	(2-13)
$\sigma_2 = \frac{\sigma_b}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{4} + \tau^2}$	(2-14)

عند النقط L وM نجد أن تأثير عزم الانثناء والالتواء سيكون هو المسيطر. وعند تلك النقط يتم حساب إجهاد الانثناء الأقصى كالآتي:

$$\sigma_{b(\max)} = \frac{M}{Z} = \frac{M}{\pi d^3 / 32}$$

$\sigma_{b(\max)} = \frac{32M}{\pi d^3}$ (compressive at L and tensile at M)	(iv)

عند تلك النقط يتم حساب إجهاد القص كالآتي:

$$\tau = \frac{Tr}{I_p} = \frac{T \times d/2}{\frac{\pi d^4}{32}}$$

أي أن:

$\tau = \frac{16T}{\pi d^3}$	(v)

ومن ثم، يمكن حساب مواضع المستويات الأساسية التي تمر عبر أي من تلك النقط من خلال العلاقات التالية:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_b} \quad \text{or} \quad \tan 2\theta = \frac{T}{M}$$

والآن، يتم حساب الإجهادات الأساسية من خلال العلاقات التالية:

$\sigma_1 = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{4} + \tau^2} = \frac{16}{\pi d^3}\left\{M + \sqrt{M^2 + T^2}\right\}$	(2-15)
$\sigma_2 = \frac{\sigma_b}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{4} + \tau^2} = \frac{16}{\pi d^3}\left\{M - \sqrt{M^2 + T^2}\right\}$	(2-16)

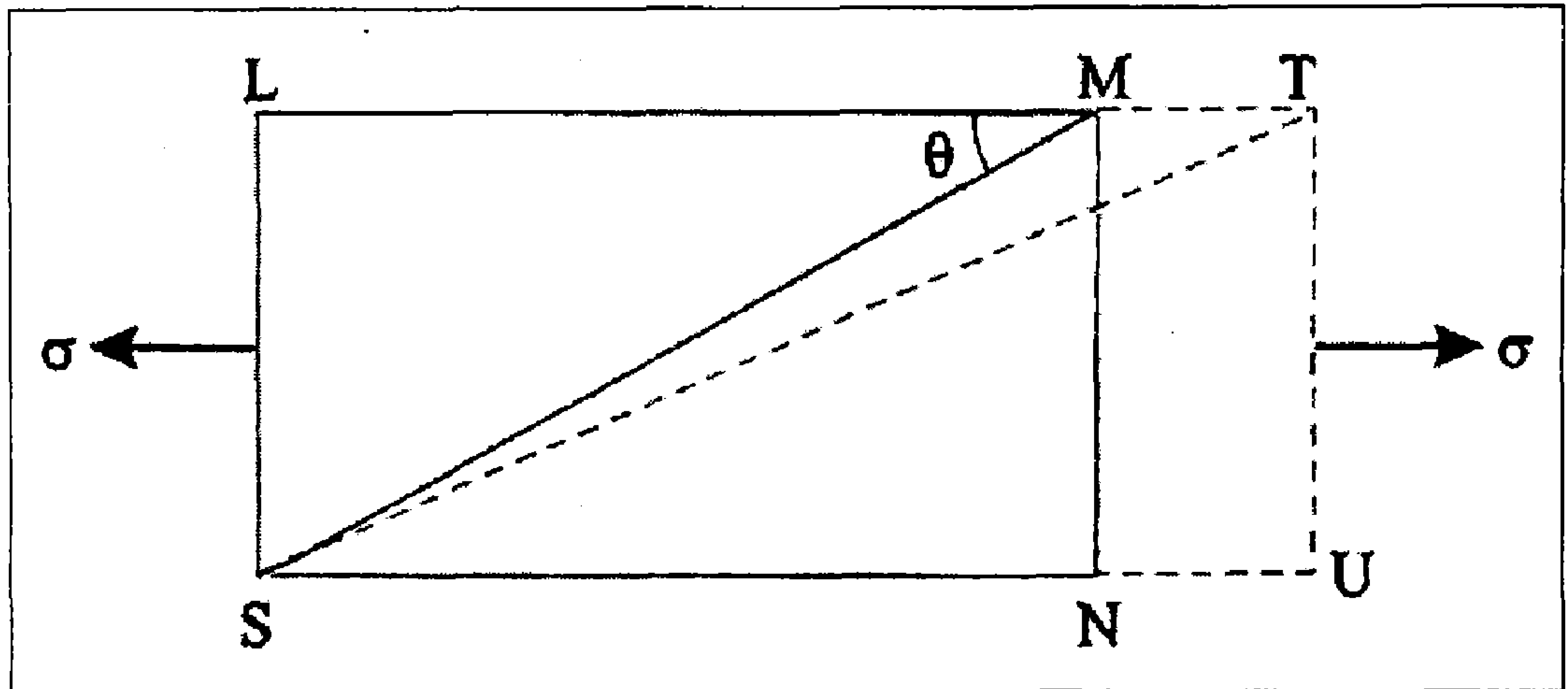
وكذلك، يتم حساب أجهاد القص الأقصى من خلال العلاقات التالية:

$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$	(2-17)
$\tau_{max} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2 + T^2}$	(2-18)

٢-٨ تحليل الانفعال

٢-٨-١ الانفعال المباشر على مستوى مائل بسبب جذب مباشر واقع على المستوى

انظر الشكل التالي:



لنجعل جسم مستطيل LMNS يمتد إلى LTUS تحت تأثير إجهاد مباشر (σ) (جذب).

التمدد في الطول:

LM = MT

انفعال الاستطالة:

e_x = MT / LM

إذن:

MT = LM * e_x

$LT = LM + MT = LM + LM \times e_x = LM\,(1 + e_x)$

لنجعل (e) عبارة عن الانفعال في القطر SM، وإذن:

$$ST = SM + SM \times e = SM\,(1 + e)$$
$$ST^2 = LT^2 + LS^2$$
$$ST^2 = [LM\,(1 + e_x)]^2 + LS^2$$

وبإهمال $((e_x)^2)$ حيث أن (e_x) عبارة عن كسر صغير جدًا، إذن:

$$ST^2 = LM^2\,(1 + 2\,e_x) + LS^2$$
$$ST^2 = LM^2 + LS^2 + 2LM^2 \times e_x$$

وبما إن $LM^2 + LS^2 = SM^2$، إذن:

$$ST^2 = SM^2 + 2LM^2 \times e_x$$

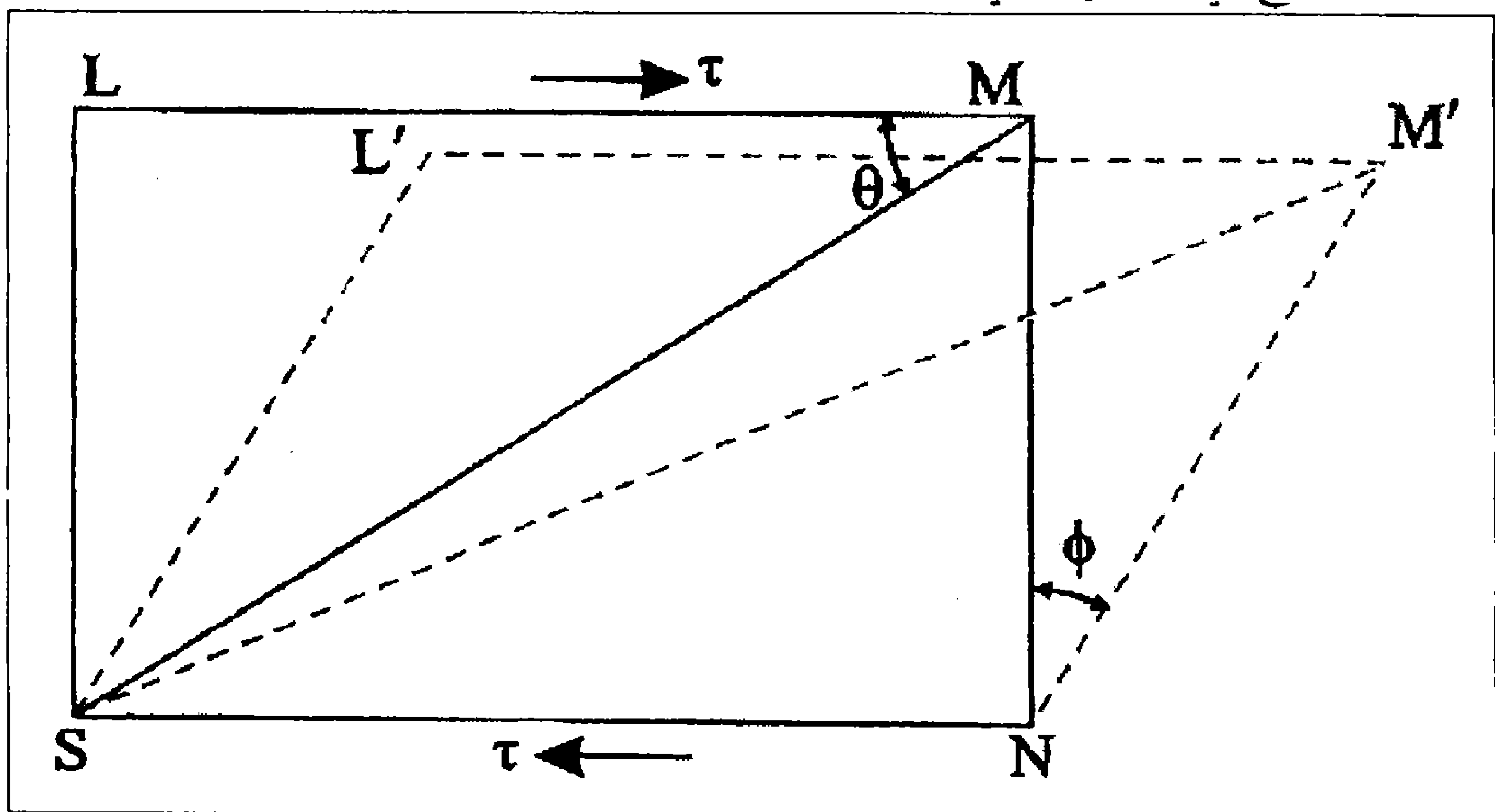
ولكن $ST = SM\,(1 + e)$ وبإهمال (e^2)، إذن:

$$ST^2 = SM^2\,(1 + 2e)$$
$$SM^2(1 + 2e) = SM^2 + 2LM^2 \times e_x$$
$$1 + 2e = 1 + 2\left(\frac{LM}{SM}\right)^2 \times e_x$$
$$e = \left(\frac{LM}{SM}\right)^2 \times e_x$$

$e = e_x \cos^2 \theta$	**(2-19)**

٢-٨-٢ الانفعال المباشر على مستوى مائل بسبب إجهاد القص (τ)

لنجعل الجسم LMNS يتشكل ليصبح الجسم L'M'NS بسبب تأثير إجهاد القص (τ)، كما هو موضح في الشكل التالي:



انفعال القص:

$$= \frac{MM'}{MN} = \tan\phi = \phi$$

أو:

$$MM' = MN \times \phi$$

لنجعل (e) عبارة عن الانفعال في SM.

$$SM' = SM + SM \times e = SM\,(1+e)$$
$$(SM')^2 = (LM')^2 + (LS)^2$$
$$(SM')^2 = (LM + MM')^2 + LS^2$$
$$(SM')^2 = (LM + MN \times \phi)^2 + LS^2$$

وبما إن (MN=LS)، إذن:

$$(SM')^2 = (LM + LS \times \phi)^2 + LS^2$$
$$(SM')^2 = LM^2 + LS^2 \times \phi^2 + 2\,LM \times LS \times \phi + LS^2$$

وبإهمال $LS^2 \times \phi^2$، نحصل على الآتي:

$$(SM')^2 = LM^2 + LS^2 + 2LM \times LS \times \phi$$
$$SM^2\,(1+e)^2 = LM^2 + LS^2 + 2LM \times LS \times \phi$$
$$1 + e^2 + 2e = \left(\frac{LM}{SM}\right)^2 + \left(\frac{LS}{SM}\right)^2 + 2 \times \frac{LM}{SM} \times \frac{LS}{SM} \times \phi$$

وبإهمال (e^2)، نحصل على الآتي:

$$1 + 2e = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta \times \sin\theta \times \phi$$
$$1 + 2e = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \times \phi$$
$$2e = 2\sin\theta\cos\theta \times \phi$$
$$e = \sin\theta\cos\theta \times \phi$$

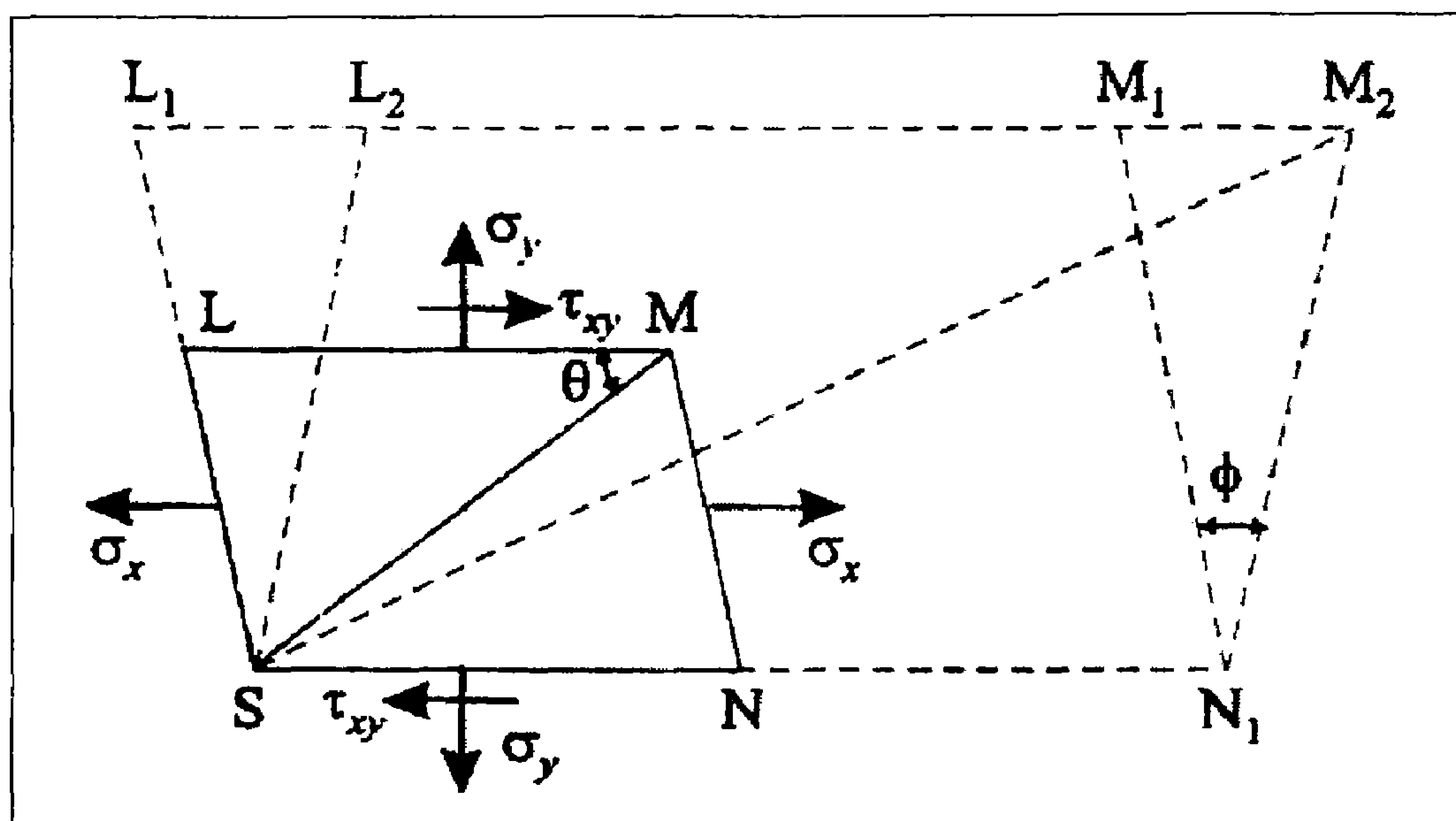
إذن:

$e = \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$	(2-20)

أي أن الانفعال الخطي على المستوى SM المائل بزاوية (θ) على اتجاه إجهاد الانفعال (τ) يساوي انفعال القص الناتج عن تأثير إجهاد الانفعال (τ) مضروبًا في $\frac{\sin 2\theta}{2}$.

٢-٨-٣ الانفعال المباشر على مستوى مائل بسبب قوتي جذب عمودي وقوة قص

لنجعل الجسم LMNS يتشكل ليصبح الجسم $L_1M_2N_1S$ بسبب تأثير الإجهادات المباشرة العمودية (σ_x) و(σ_y) وإجهاد القص (τ)، كما هو موضح في الشكل التالي:



لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
e_x	الانفعال الطولي في اتجاه (σx).
e_y	الانفعال الطولي في اتجاه (σy).
e	الانفعال الطولي في المستوى SM.
ϕ	انفعال القص في البلوك.

والآن:

$$e_x = \frac{SN_1 - SN}{SN}$$

إذن:

$$SN_1 = SN(1 + e_x)$$

وكذلك:

$$e_y = \frac{SL_1 - SL}{SL}$$

إذن:

$$SL_1 = SL(1 + e_y)$$

وأيضًا:

$$e = \frac{SM_2 - SM}{SM}$$

إذن:

$$SM_2 = SM\,(1 + e)$$

وأيضًا:

$$\phi = \frac{M_1M_2}{M_1N_1}$$

إذن:

$$M_1M_2 = M_1N_1 \times \phi$$

والآن:

$$SM_2^{\,2} = SL_1^{\,2} + L_1M_2^{\,2} = SL_1^{\,2} + (L_1M_1 + M_1M_2)^2$$
$$SM_2^{\,2} = SL_1^{\,2} + (L_1M_1 + M_1N_1 \times \phi)^2$$
$$SM_2^{\,2} = SL_1^{\,2} + (L_1M_1 + SL_1 \times \phi)^2 \qquad (\because M_1N_1 = SL_1)$$
$$SM_2^{\,2} = SL_1^{\,2} + L_1M_1^{\,2} + 2L_1M_1 \times SL_1 \times \phi \qquad \text{ignoring term having } \phi^2$$

إذن:

$$SL_1^{\,2} + L_1M_1^{\,2} + 2L_1M_1 \times SL_1 \times \phi = SM^2\,(1 + e)^2$$

أي أن:

$$SM^2\,(1 + 2e) = SL_1^{\,2} + SN_1^{\,2} + 2 \times SN_1 \times SL_1 \times \phi \qquad (\because L_1M_1 = SN_1) \text{ ignoring } e^2$$
$$SM^2\,(1 + 2e) = SL^2\,(1 + e_y)^2 + SN^2\,(1 + e_x)^2 + 2 \times SN\,(1 + e_x)\,SL\,(1 + e_y) \times \phi$$
$$SM^2\,(1 + 2e) = SL^2\,(1 + 2e_y) + SN^2\,(1 + 2e_x) + 2 \times SN \times SL \times \phi$$

(بإهمال مربعات الانفعال ونواتج ضرب الانفعالات أي $e_x^2, e_y^2, e_x \times \phi, e_y \times \phi$).

$$1 + 2e = \left(\frac{SN}{SM}\right)^2 (1 + 2e_x) + \left(\frac{SL}{SM}\right)^2 (1 + 2e_y)\; 2 \times \phi \times \frac{SN}{SM} \times \frac{SL}{SM}$$
$$1 + 2e = (1 + 2e_x)\cos^2\theta + (1 + 2e_y)\sin^2\theta + 2\phi \times \cos\theta\,\sin\theta$$
$$1 + 2e = \cos^2\theta + 2e_x\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2e_y\sin^2\theta + \phi \times \sin 2\theta$$
$$1 + 2e = 1 + 2e_x\cos^2\theta + 2e_y\sin^2\theta + \phi \times \sin 2\theta$$

إذن:

$$e = e_x\cos^2\theta + e_y\sin^2\theta + \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$$

ومن ثم، يمكن حساب الانفعال المباشر (e) في مستوى ما SM (يميل بزاوية (θ) على محور الإجهاد (σ_x)) الناتج عن الإجهادات المباشرة العمودية (σ_x) و(σ_y) وإجهاد القص (τ_{xy}) من خلال العلاقة التالية:

$e = e_x \cos^2\theta + e_y \sin^2\theta + \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$	**(2-21)**

حساب قيمة الزاوية (θ) من أجل القيمة القصوى والقيمة الدنيا لـ (**e**):

لإيجاد قيمة الزاوية (θ) من أجل القيمة القصوى والقيمة الدنيا لـ (e)، فإننا نجعل (de/dθ=0).

$$e = e_x \cos^2\theta + e_y \sin^2\theta + \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$e = e_x \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + e_y \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$e = \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{e_x \cos 2\theta - e_y \cos 2\theta}{2} + \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$e = \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{(e_x - e_y)\cos 2\theta}{2} + \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$	**(i)**

$$\frac{de}{d\theta} = -(e_x - e_y)\sin 2\theta + \phi \times \cos 2\theta = 0$$

إذن:

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\phi}{e_x - e_y}$$

أو:

$$2\theta = \frac{\phi}{e_x - e_y}$$

أي أن:

$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\phi}{e_x - e_y}\right)$$

أو:

$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\phi}{e_x - e_y}\right) + 180^\circ$$

*كيفية إيجاد القيمة القصوى والقيمة الدنيا لـ (**e**):*

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sec 2\theta} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}$$

$$\cos 2\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\phi}{e_x - e_y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\phi^2}{(e_x - e_y)^2}}} = \sqrt{\frac{(e_x - e_y)^2}{\phi^2 + (e_x - e_y)^2}}$$

والآن، وبالتعويض بكل من قيمة ((cos(2*θ)) وقيمة ((tan(2*θ)) في المعادلة رقم (i)، نحصل على الآتي:

$$e = \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{e_x - e_y}{2}\cos 2\theta + \phi \times \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$e = \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\left[(e_x - e_y) + \phi \tan 2\theta\right]$$

$$e = \frac{e_x + e_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(e_x - e_y)^2}{\phi^2 - (e_x - e_y)^2}}\left[(e_x - e_y) + \frac{\phi^2}{e_x - e_y}\right]$$

$$e = \frac{e_x + e_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(e_x - e_y)^2}{\phi^2 + (e_x - e_y)^2}}\left[\frac{(e_x - e_y)^2 + \phi^2}{e_x - e_y}\right]$$

$$e = \frac{e_x + e_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(e_x - e_y)^2 + \phi^2}$$

لقد حصلنا على قيمتين للانفعالات المباشر أي الانفعالات الأساسية، أي أن:

$e_{(max)} = \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e_x - e_y)^2 + \phi^2}$	**(2-22)**
$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\phi}{e_x - e_y}$	**(2-22a)**
$e_{(min)} = \frac{e_x + e_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(e_x - e_y)^2 + \phi^2}$	**(2-23)**
$\theta = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\frac{\phi}{e_x - e_y} + 180°\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\phi}{e_x - e_y} + 90°$	**(2-23a)**

أي أن، هذان المستويان للانفعالات الأساسية متعامدان على بعضهما البعض.

$$\tan 2\theta = \frac{\phi}{e_x - e_y} = \frac{\tau_{xy}/C}{\left(\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE}\right) - \left(\frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE}\right)} = \frac{\tau_{xy}/C}{\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_y}{mE}}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}/C}{\frac{\sigma_x}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \frac{\sigma_y}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \frac{\tau_{xy}/C}{\frac{1}{E}\left(1 + \frac{1}{m}\right)(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\,\frac{E}{C\left(\frac{m+1}{m}\right)}$$

نحن نعلم أن:

$$E = 2C\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

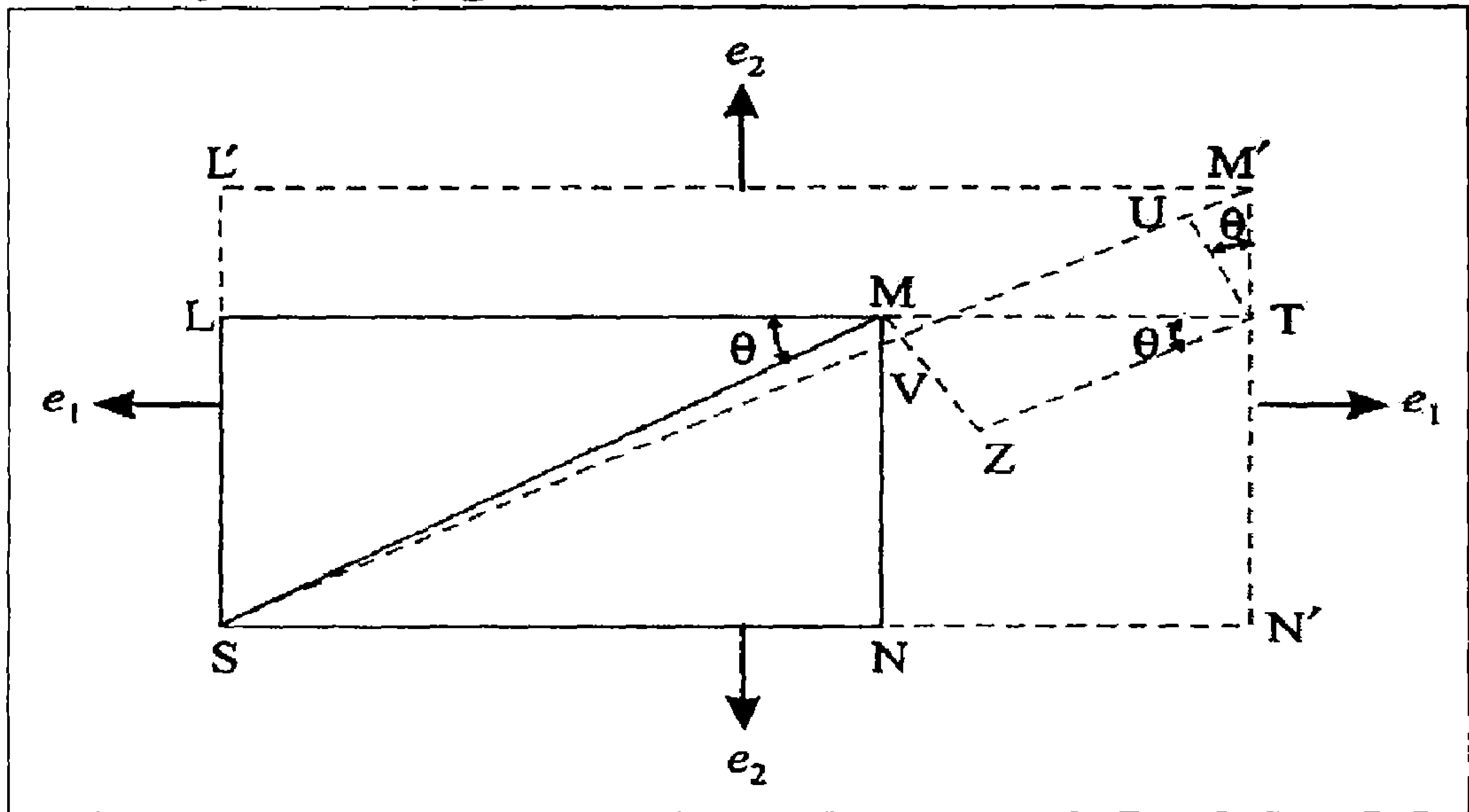
إذن:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

هـذا يوضـح أن الإنفعـالات والإجهـادات الأساسية القـصوى والـدنيا تـؤثر في نفس الاتجاهات.

٢-٨-٤ الانفعالات على مقطع عرضي مائل بسبب انفعالان عموديان متعامدان على بعضهما البعض

لنجعل (e_1) و(e_2) عبارة عن الانفعالات الأساسية على بلوك مستطيل LMNS. لنجعل L'M'N'S عبارة عن شكل هذا البلوك بعد أن انفعل، كما هو موضح في الشكل التالي:



$$e_1 = \frac{L'M' - LM}{LM} \; ; \; e_2 = \frac{M'N' - MN}{MN}$$

- من M نرسم MV عمودي على M'S.
- مد LM حتى يقابل M'N' في T.
- من T نرسم TU عمودي على M'S.
- من T نرسم خط موازي لـ SM' ليقابل MV الممتد عند Z.

الانفعال في SM (المائل بزاوية (θ) على LM) في اتجاه SM يتم حسابه كالآتي:

$$= \frac{SM' - SM}{SM} = \frac{VM'}{SM} = \frac{VU + UM'}{SM}$$

$$= \frac{MT\cos\theta + M'T\sin\theta}{SM}$$

$$= \frac{(L'M' - LM)\cos\theta + (M'N' - MN)\sin\theta}{SM}$$

$$= \frac{LM \times e_1 \cos\theta + MN \times e_2 \sin\theta}{SM}$$

$= e_1 \cos^2\theta + e_2 \sin^2\theta$	**(2-24)**

الانفعال في SM في اتجاه عمودي على SM يتم حسابه كالآتي:

$$= \frac{MV}{SM} = \frac{MZ - VZ}{SM} = \frac{MZ - UT}{SM} = \frac{MT\sin\theta - M'T\cos\theta}{SM}$$

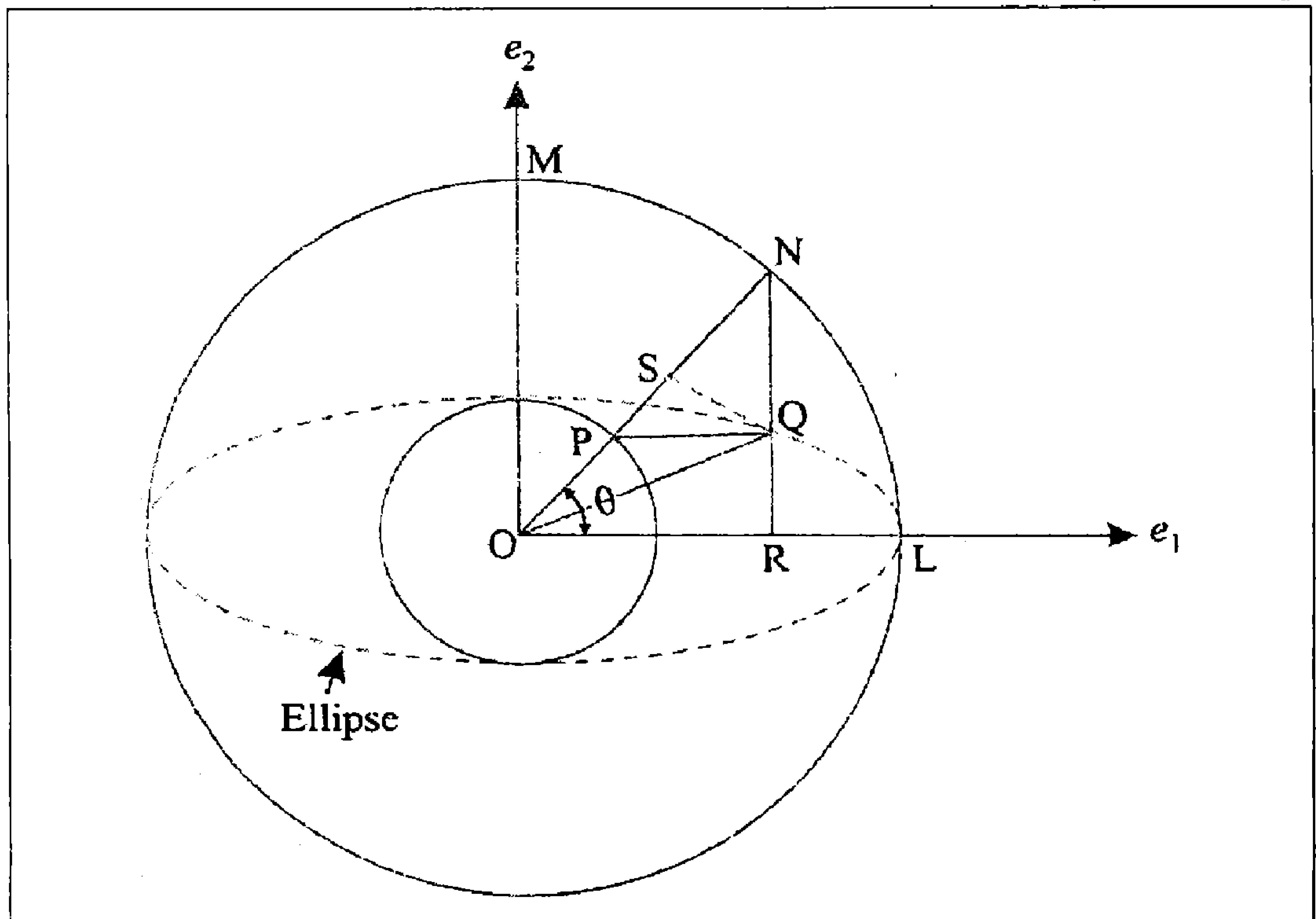
$$= \frac{(L'M' - LM)\sin\theta - (M'N' - MN)\cos\theta}{SM} = \frac{LM \times e_1 \sin\theta - MN \times e_2 \cos\theta}{SM}$$

$$= e_1 \cos\theta \sin\theta - e_2 \sin\theta \cos\theta$$

$= (e_1 - e_2)\sin\theta\cos\theta = (e_1 - e_2)\dfrac{\sin 2\theta}{2}$	**(2-25)**

٢-٨-٥ إهليج الانفعالات Ellipse of Strains

لنجعل (e_1) و(e_2) عبارة عن الانفعالين الأساسيين المتعامدين على بعضهما البعض. نحن نرغب إيجاد الانفعالات في الاتجاه الذي يصنع زاوية (θ) مع اتجاه (e_1)، كما هو موضح في الشكل التالي:



- ارسم دائرتين متحدتين في المركز O الأولى بنصف قطر (e_1) والأخرى بنصف قطر (e_2).
- ارسم ON بحيث يصنع زاوية (θ) مع اتجاه (e_1).
- من N ارسم NR عمودي على OL.
- من P ارسم PQ عمودي على NR.
- صل بين O وQ.

إذن OQ يعطي الانفعال المحصلة في اتجاه يميل بزاوية (θ) على اتجاه (e_1).

قم بتحليل OQ إلى مركبتين (OS وSQ)، إحداهما عبر ON والأخرى عمودية عليه.

ومن ثم:

$$OS = e_1 \cos^2 \theta + e_2 \sin^2 \theta$$

$$SQ = \frac{e_1 - e_2}{2} \sin 2\theta$$

بالنسبة لقيم (θ) المتباينة من صفر إلى ٣٦٠ درجة، فإن المحل الهندسي للنقطة Q سيعمل على تكوين قطع ناقص (الموضح بالنقط في الشكل السابق) مع كون ($2*e_1$) عبارة عن المحور الأكبر و($2*e_2$) عبارة عن المحور الأصغر.

٢-٨-٦ دائرة مور للانفعالات

من الفقرة رقم ٢-٨-٥ حصلنا على e، الانفعال عبر OS الناتج عن الانفعالات الأساسية (e_1) و(e_2) يتم حسابه من خلال الآتي:

$$e = e_1 \cos^2 \theta + e_2 \sin^2 \theta$$

$$e = e_1\left(\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\sin^2\theta}{2} - \frac{\sin^2\theta}{2}\right) + e_2\left(\frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos^2\theta}{2}\right)$$

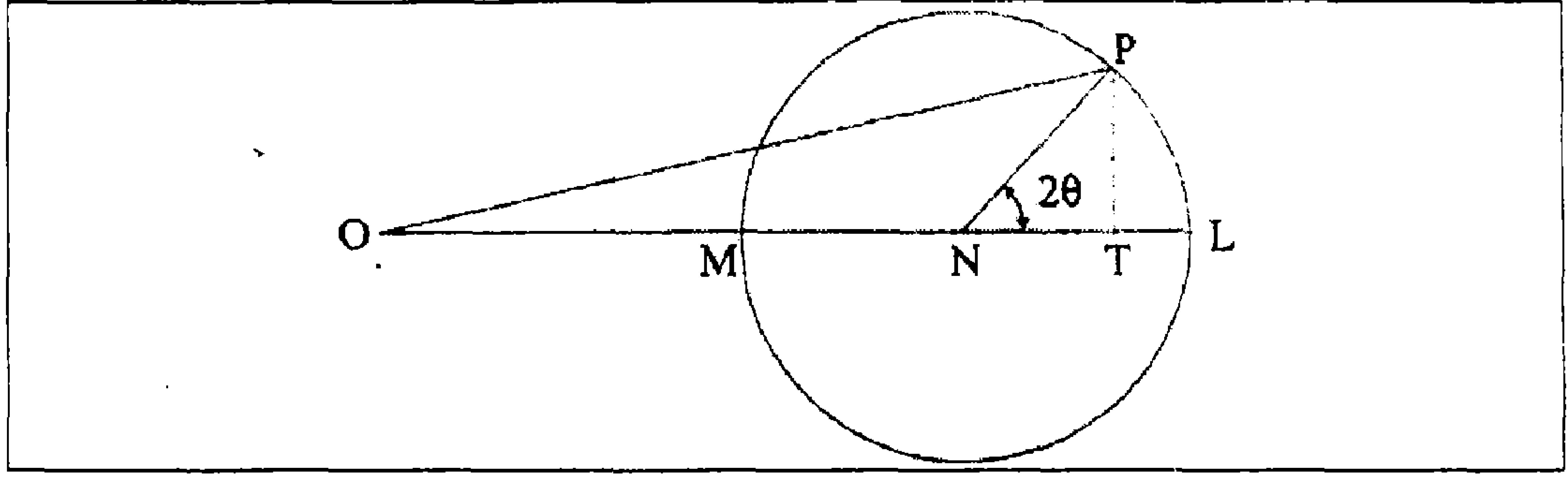
$$e = \frac{e_1}{2} + \frac{e_1}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \frac{e_2}{2} + \frac{e_2}{2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

$$e = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{e_1 - e_2}{2}\cos 2\theta$$

الانفعال عبر SQ:

$$e' = \frac{e_1 - e_2}{2} \sin 2\theta$$

انظر الشكل التالي:



- اجعل طول OL يساوي (e_1) واجعل طول OM يساوي (e_2).
- قم بتقسيم LM عند N.
- مع كون N مركز وNL عبارة عن نصف قطر، ارسم الدائرة.
- اجعل الزاوية LNP تساوي (2*θ).
- من P اسقط PT عموديًا على OL.

$$OT = OM + MN + NT$$
$$OT = e_2 + \frac{e_1 - e_2}{2} + NP\cos 2\theta$$
$$OT = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{e_1 - e_2}{2}\cos 2\theta = e$$
$$PT = NP\sin 2\theta = \frac{e_1 - e_2}{2}\sin 2\theta = e'$$

- صل بين O وP؛ وحينئذ يعطي OP الانفعال المحصلة.

٢-٨-٧ الانفعالات الأساسية وطاقة الانفعال بسبب الإجهادات الأساسية

٢-٨-٧-١ الانفعالات الأساسية بسبب الإجهادات الأساسية

لو أن (σ_1) و(σ_2) و(σ_3) عبارة عن الإجهادات الأساسية الثلاثة المؤثرة على ثلاثة مستويات متعامدة على بعضها البعض، وأن (1/m) عبارة عن نسبة بواسون، وأن E عبارة عن معامل المرونة الخاص بمادة الجسم، إذن يتم حساب الانفعالات (e_1) و(e_2) و(e_3) في اتجاهات الإجهادات ذات الصلة كالآتي:

$e_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{mE} - \frac{\sigma_3}{mE}$	(i)
$e_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_3}{mE} - \frac{\sigma_1}{mE}$	(ii)
$e_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\sigma_1}{mE} - \frac{\sigma_2}{mE}$	(iii)

٢-٨-٧-٢ طاقة الانفعال الناتجة عن الإجهادات الأساسية

لنجعل (e_1) و(e_2) و(e_3) عبارة عن الانفعالات ذات الصلة في اتجاهات الإجهادات الأساسية (σ_1) و(σ_2) و(σ_3). طاقة الانفعال المخزنة تكون:

$$= \frac{1}{2}\sigma_1 e_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 e_2 + \frac{1}{2}\sigma_3 e_3$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_1\left(\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{mE} - \frac{\sigma_3}{mE}\right) + \frac{1}{2}\sigma_2\left(\frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_3}{mE} - \frac{\sigma_1}{mE}\right) + \frac{1}{2}\sigma_3\left(\frac{\sigma_3}{E} - \frac{\sigma_1}{mE} - \frac{\sigma_2}{mE}\right)$$

$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{1}{mE}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)$	**(2-26)**

لو أن (σ_3) صفرًا، حينئذ تكون طاقة الانفعال:

$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2}{m}\sigma_1\sigma_2\right)$	**(2-27)**

٢-٩ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

ارسم دائرة **Mohr** لمجال إجهاد ثنائي البعد معرض لـ:

(أ) قص صافي.

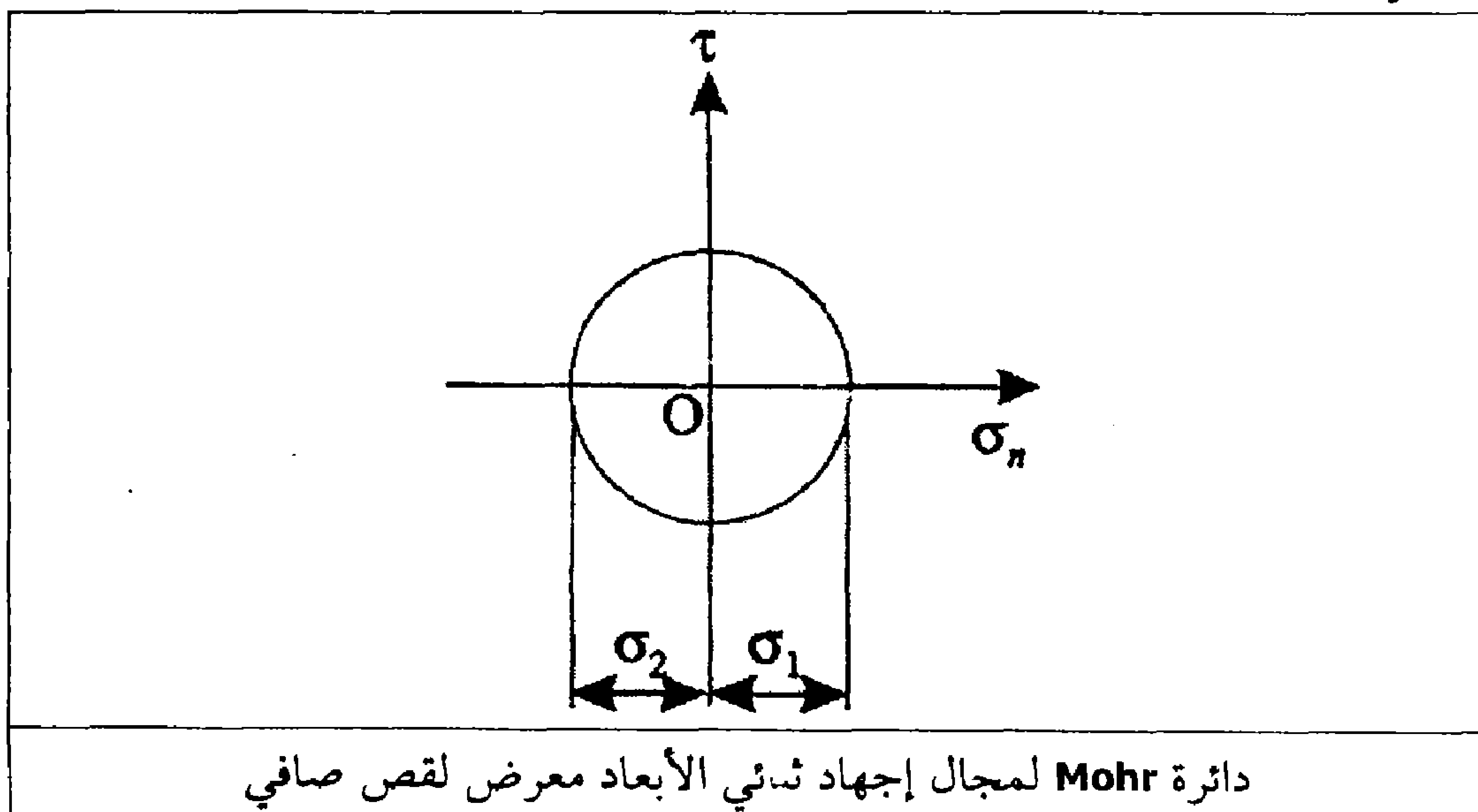
(ب) شد صافي ثنائي المحور **pure biaxial tension**.

(ج) شد صافي أحادي المحور **pure uniaxial tension**.

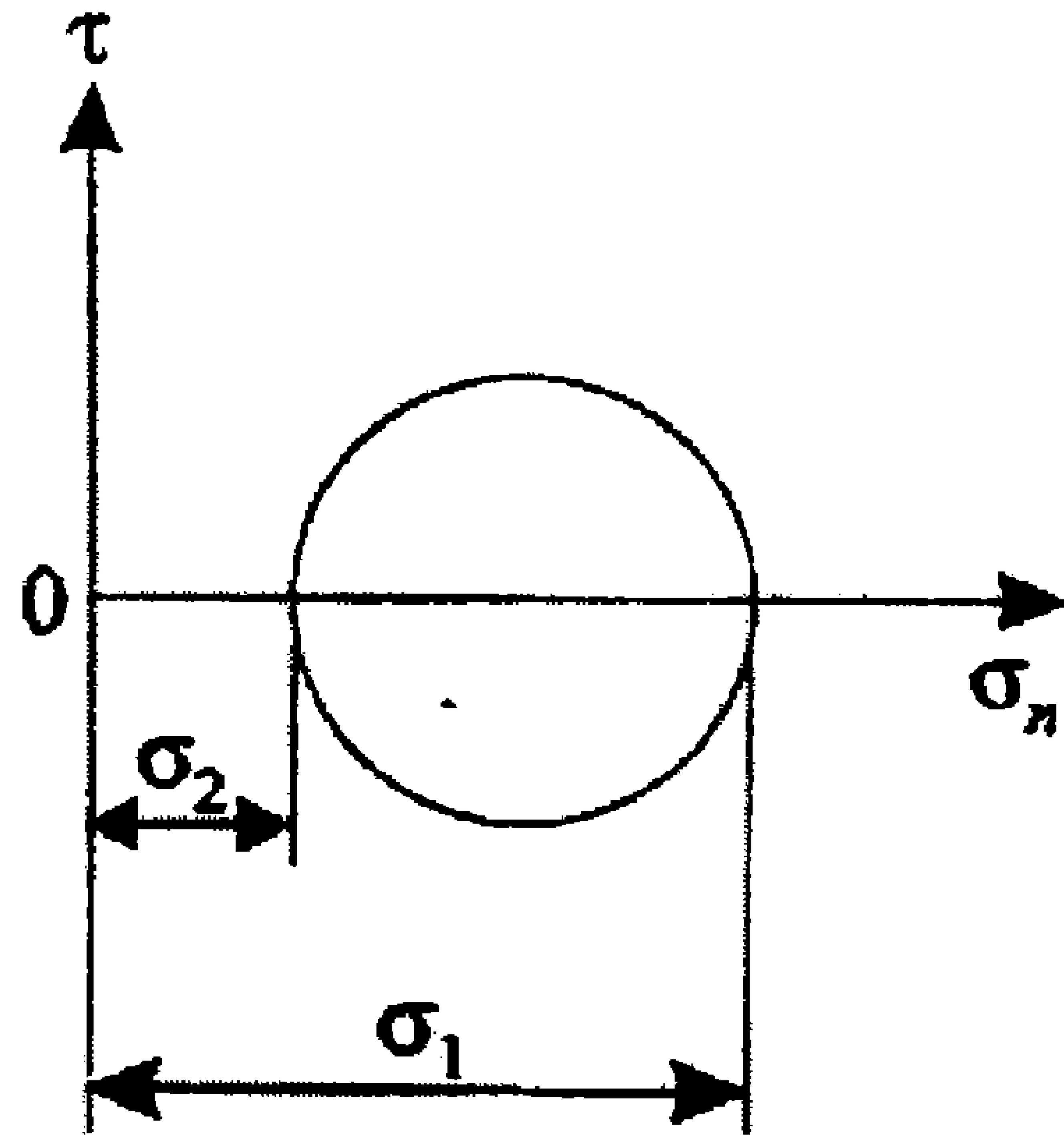
(د) ضغط صافي أحادي المحور.

الحل

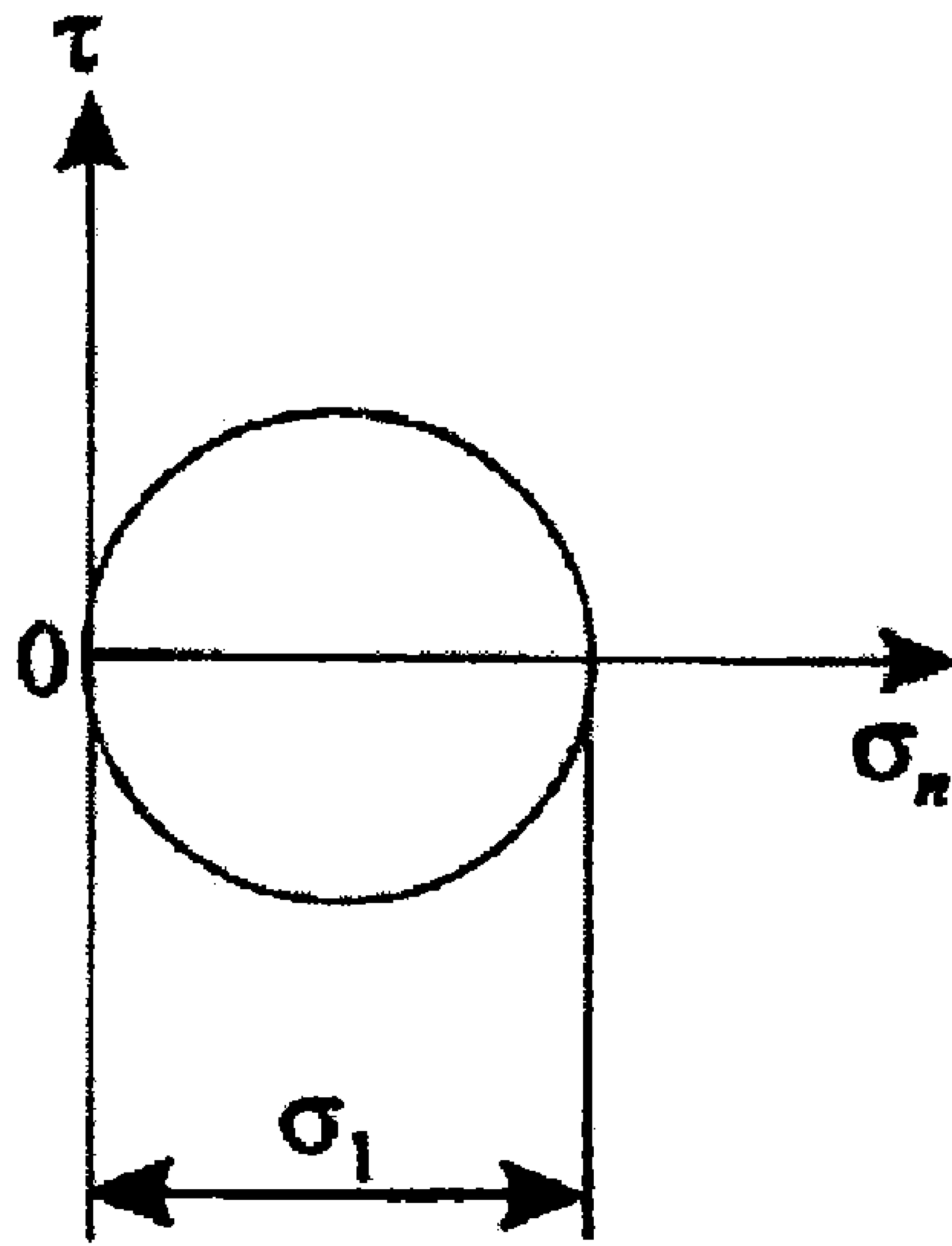
في مجموعة الأشكال التالية نشاهد دوائر Mohr الخاصة بمجال إجهاد ثنائي الأبعاد معرض لقص صافي، ولشد صافي ثنائي المحور، وشد صافي أحادي المحور، وضغط صافي أحادي المحور.



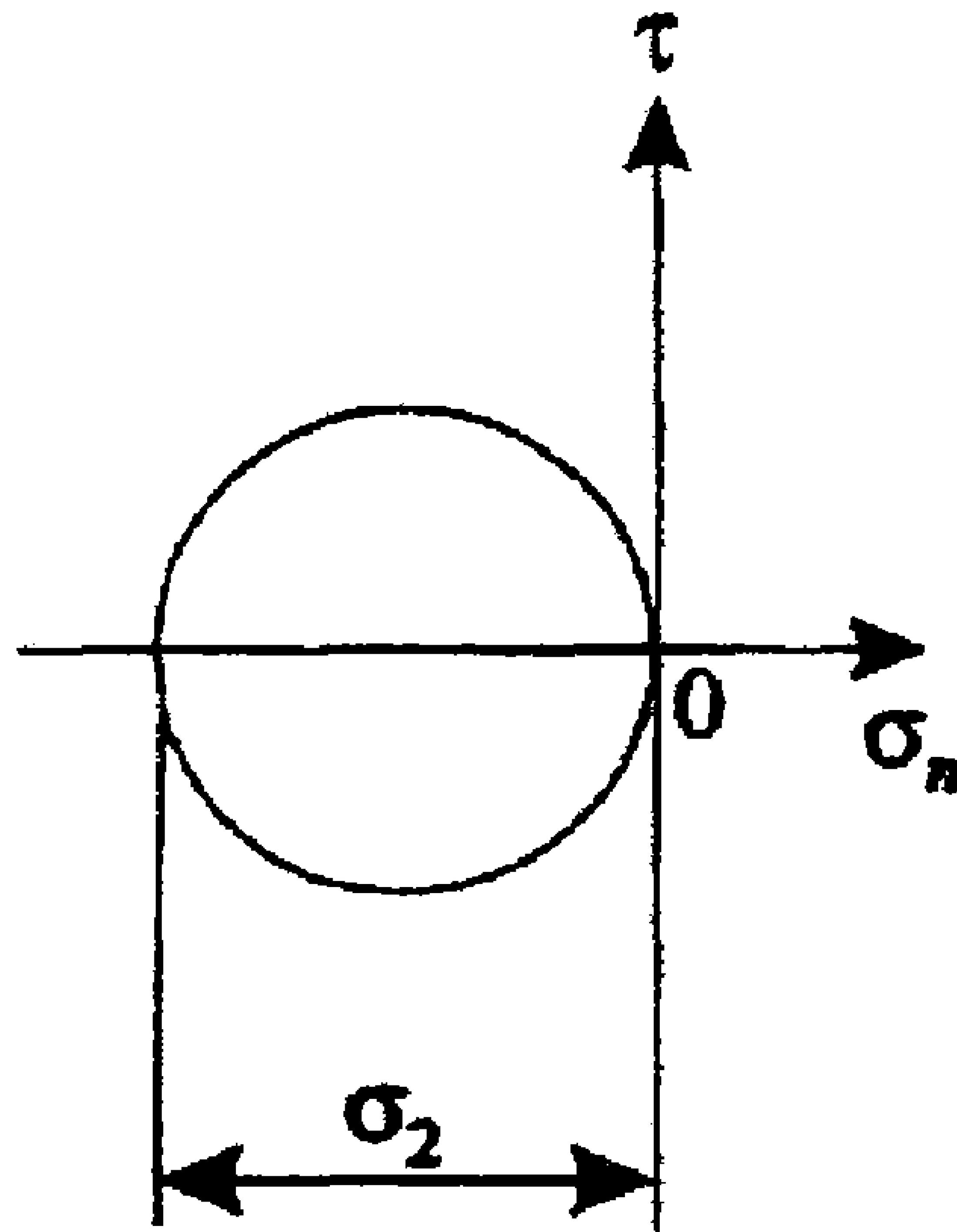
دائرة **Mohr** لمجال إجهاد ثنائي الأبعاد معرض لقص صافي



دائرة Mohr لمجال إجهاد ثنائي الأبعاد معرض لشد صافي ثنائي المحور



دائرة Mohr لمجال إجهاد ثنائي الأبعاد معرض لشد صافي أحادي المحور



دائرة Mohr لمجال إجهاد ثنائي الأبعاد معرض لضغط صافي أحادي المحور

المثال رقم (٢)

اسطوانة رقيقة قطرها الداخلي ١٠٠ مم وسمكها ٥ مم معرضة لضغط داخلي قدره 10 MPa ولالتواء قدره ٢٠٠٠ نيوتن.متر. احسب مقادير الإجهادات الأساسية.

الحل

في هذا المثال لدينا الآتي:

d = 100 mm = 0.1 m
t = 5 mm = 0.005 m
D = d + 2*t = 0.1 + 2*0.005 = 0.11 m
p = 10 MPa = 10 * 10^6 N/m^2
T = 2000 Nm

<u>الإجهادات الأساسية (σ_1) و(σ_2):</u>

الإجهاد الطولي:

$$\sigma_l = \sigma_x = \frac{pd}{4t} = \frac{10 \times 10^6 \times 0.1}{4 \times 0.005} = 50 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 50 \text{ MN/m}^2$$

الإجهاد المحيطي:

$$\sigma_c = \sigma_y = \frac{pd}{2t} = \frac{10 \times 10^6 \times 0.1}{4 \times 0.005} = 100 \text{ NM/m}^2$$

لإيجاد الإجهاد، باستخدام العلاقة التالية:

$$\frac{T}{I_p} = \frac{\tau}{R}$$

يصبح لدينا الآتي:

$$\tau = \tau_{xy} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T \times R}{\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)}$$

$$\tau = \frac{2000 \times (0.05 + 0.005)}{\frac{\pi}{32}(0.11^4 - 0.1^4)} \times 10^{-6} = 24.14 \text{ MN/m}^2$$

الإجهادات الأساسية يتم حسابها كالآتي:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{50 + 100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - 100}{2}\right)^2 + (24.14)^2}$$

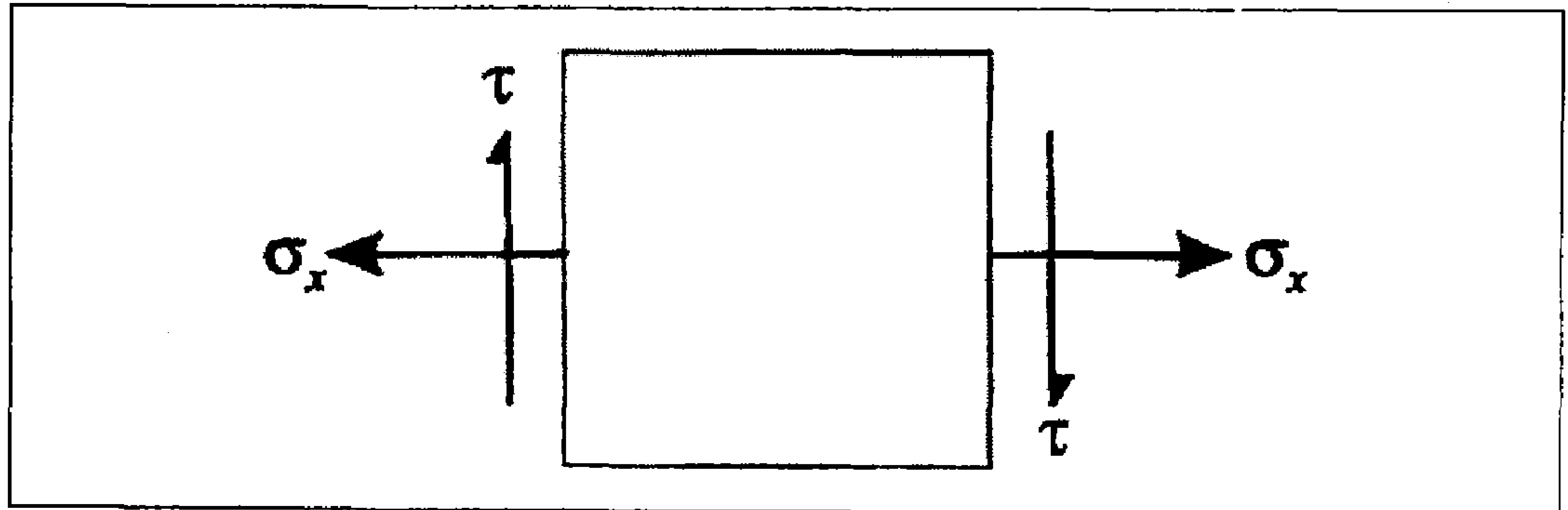
$$\sigma_1, \sigma_2 = 75 \pm 34.75 = 109.75 \text{ and } 40.25 \text{ MN/m}^2$$

ومن ثم، (σ_1) (الإجهاد الأساسي الأكبر) = ١٠٩.٧٥ ميجانيوتن/م٢.

و(σ_2) (الإجهاد الأساسي الأصغر) = ٤٠.٢٥ ميجانيوتن/م٢.

المثال رقم (٣)

عمود إدارة مصمت قطره ٣٠ مم مثبت عند إحدى طرفيه. وهو معرض لقوة شد قدرها ١٠ كيلونيوتن وللي قدره ٦٠ نيوتن.متر. عند نقطة a على سطح عمود الإدارة، حدد الإجهادات الأساسية وإجهاد القص الأقصى.



الحل

في هذا المثال لدينا الآتي:

D = 30 mm = 0.03 m
P = 10 kN
T = 60 N.m

الإجهادات الأساسية (σ_1، σ_2) وإجهاد القص الأقصى (τ_{max}):

إجهاد الشد:

$$\sigma_t = \sigma_x = \frac{10 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times 0.03^2} = 14.15 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \text{ or } 14.15 \text{ MN/m}^2$$

وبناءًا على معادلة اللي:

$$\frac{T}{I_p} = \frac{\tau}{R}$$

إذن إجهاد القص يكون:

$$\tau = \frac{TR}{I_p} = \frac{TR}{\frac{\pi}{32} D^4} = \frac{60 \times 0.015}{\frac{\pi}{32} \times (0.03)^4}$$

$$\tau = 11.32 \times 10^6 \text{ N/M}^2 \text{ or } 11.32 \text{ MN/m}^2$$

الإجهادات الأساسية يتم حسابها عن طريق استخدام العلاقات التالية:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

وهنا:

$$\sigma_x = 14.15 \text{ MN/m}^2, \ \sigma_y = 0; \ \tau_{xy} = \tau = 11.32 \text{ MN/m}^2$$

إذن:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{14.15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{14.15}{2}\right)^2 + (11.32)^2}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = 7.075 \pm 13.35 = 20.425 \text{ MN/m}^2, -6.275 \text{ MN/m}^2$$

ومن ثم، الإجهاد الأساسي الأكبر (σ_1) = ٢٠.٤٢٥ ميجانيوتن/م٢ (شد).

والإجهاد الأساسي الأصغر (σ_2) = ٦.٢٧٥ ميجانيوتن/م٢ (ضغط).

إجهاد القص الأقصى:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{20.425 - (-6.275)}{2} = 13.35 \text{ MN/m}^2$$

المثال رقم (٤)

اسطوانة رقيقة بطرفين مغلقين قطرها الداخلي عبارة عن ٥٠ مم وسمك جدارها عبارة عن ٢.٥ مم. هذه الاسطوانة معرضة لجذب محوري قدره ١٠ كيلونيوتن ولي قدره ٥٠٠ نيوتن.متر في حين أنها واقعة تحت تأثير ضغط داخلي قدره ٦ ميجانيوتن/م٢.

المطلوب

(i) تحديد كل من الإجهادات الأساسية في الأنبوبة وإجهاد القص الأقصى.

(ii) تقديم تهيئة الإجهاد على عنصر مربع مأخوذ في اتجاه الحمل مع تحديد كل من الاتجاه والمقدار (**schematic**).

الحل

في هذا المثال لدينا الآتي:

d = 50 mm = 0.05 m
D = d + 2*t = 50 + 2*2.5 = 55 mm = 0.055 m
P = 10 kN (الجذب المحوري)
T = 500 Nm
p = 6 MN/m^2

(i) الإجهادات الأساسية (σ_1, σ_2) في الأنبوبة وإجهاد القص الأقصى (τ_{max}):

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t} + \frac{P}{\pi dt} = \frac{6\times10^6\times0.05}{4\times2.5\times10^{-3}} + \frac{10\times10^3}{\pi\times0.05\times2.5\times10^{-3}}$$

$$\sigma_x = 30\times10^6 + 25.5\times10^6 = 55.5\times10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_y = \frac{pd}{2t} = \frac{6\times10^6\times0.05}{2\times2.5\times10^{-3}} = 60\times10^6$$

الإجهادات الأساسية تُعطى بالعلاقات التالية:

$\sigma_1, \sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	**(i)**

نحن نعلم أن:

$$\frac{T}{I_p} = \frac{\tau}{R}$$

علمًا بأن:

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}\left[(0.055)^4 - (0.05)^4\right] = 2.848\times10^{-7} \text{ m}^4$$

حيث إن:

المعنى والاستخدام	المعامل
عزم القصور الذاتي القطبي	I_p

وبالتعويض بالقيم في العلاقة رقم (i)، نحصل على الآتي:

$$\frac{500}{2.848 \times 10^{-7}} = \frac{\tau}{(0.055/2)}$$

أو:

$$\tau = \frac{500 \times (0.055/2)}{2.848 \times 10^{-7}} = 48.28 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

الآن، بالتعويض بالقيم المختلفة في المعادلة رقم (i)، نحصل على الآتي:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \left(\frac{55.5 \times 10^6 + 60 \times 10^6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{55.5 \times 10^6 - 60 \times 10^6}{2}\right)^2 + (48.28 \times 10^6)^2}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{(55.5 + 60) \times 10^6}{2} \pm \sqrt{4.84 \times 10^{12} + 2330.96 \times 10^{12}}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = 57.75 \times 10^6 \pm 48.33 \times 10^6 = 106.08 \text{ MN/m}^2, 9.42 \text{ MN/m}^2$$

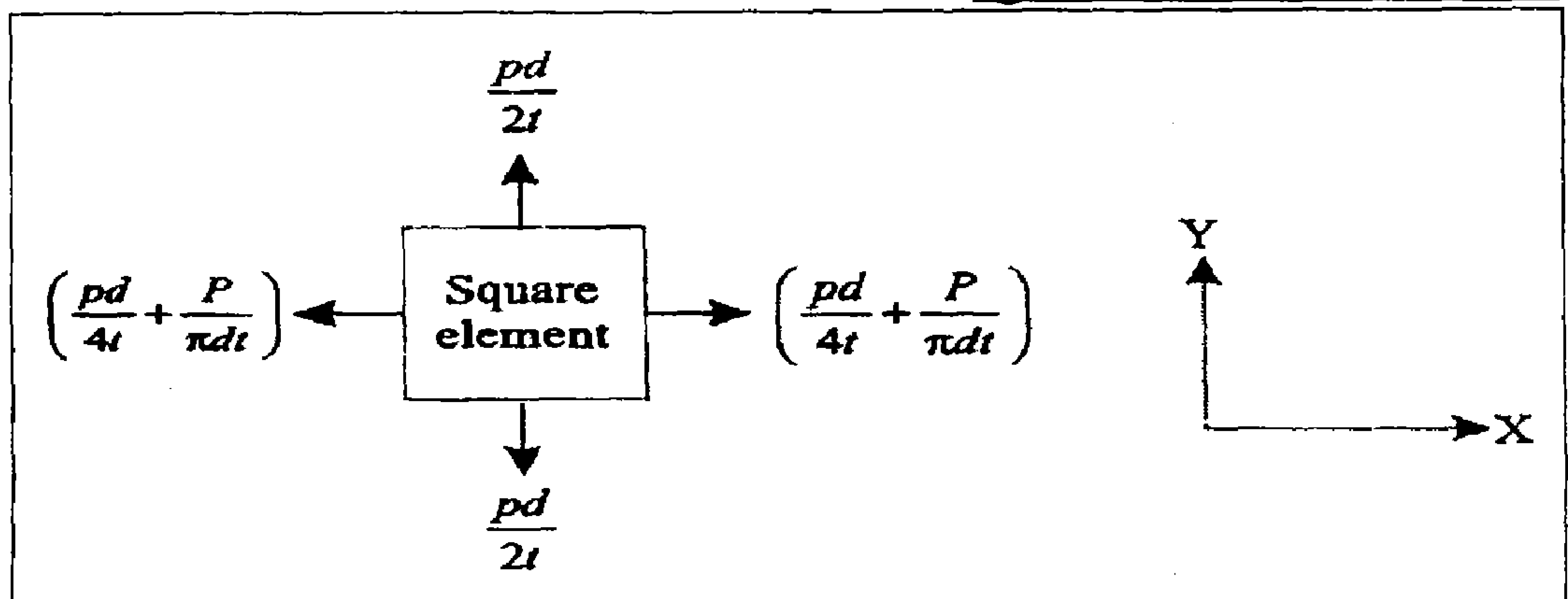
ومن ثم، تكون الإجهادات الأساسية عبارة عن:

$$\boldsymbol{\sigma_1 = 106.08 \text{ MN/m}^2; \quad \sigma_2 = 9.42 \text{ MN/m}^2 \text{ (Ans.)}}$$

أما إجهاد القص الأقصى فيتم حسابه كالآتي:

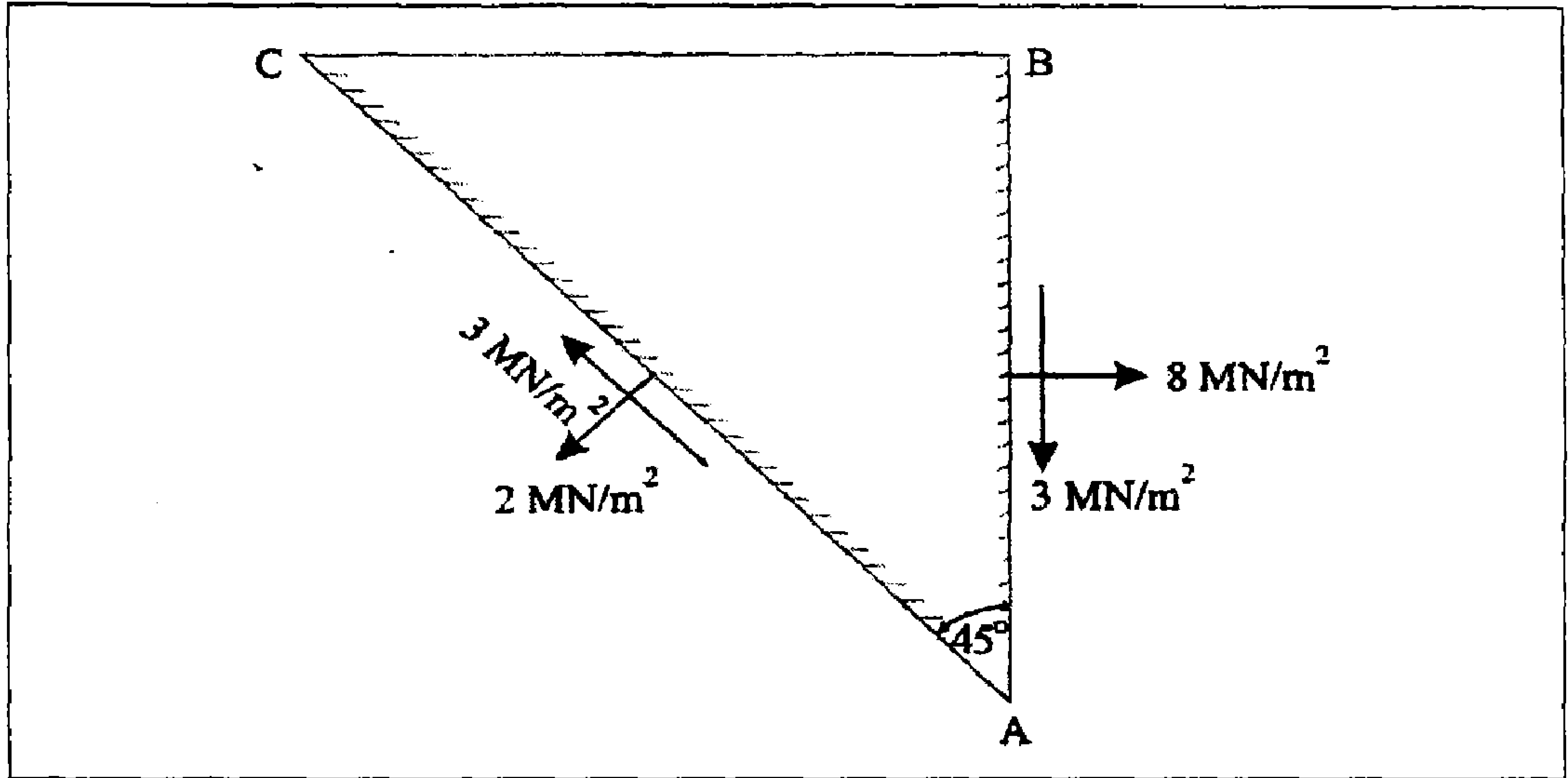
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{106.08 - 9.42}{2} = \mathbf{48.33 \text{ MN/m}^2 \text{ (Ans.)}}$$

(ii) تهيئة الإجهاد على عنصر مربع:



المثال رقم (٥)

عند نقطة في جسم مجهد كانت حالة الإجهاد على مستويين بينهما زاوية ٤٥ درجة كما هو موضح في الشكل التالي:



المطلوب

تحديد الإجهادين الأساسيين.

الحل

الإجهادات الأساسية (σ_1) و(σ_2):

بتحليل القوى رأسيًا، يصبح لدينا الآتي:

$$\sigma_y \times BC + 3 \times AC \times \cos 45^\circ = 3 \times AB + 2 \times AC \times \cos 45^\circ$$

وبقسمة كلا الطرفين على BC، نحصل على الآتي:

$$\sigma_y + 3 \times \frac{AC}{BC} \cos 45^\circ = 3 \times \frac{AB}{BC} + 2 \times \frac{AC}{BC} \times \cos 45^\circ$$

$$\sigma_y + 3 \times \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = 3 \times \cot 45^\circ + 2 \times \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$\sigma_y + 3 = 3 + 2 \quad \text{or} \quad \sigma_y = 2\,\text{MN/m}^2$$

والآن:

$$\sigma_x = 8\,\text{MN/m}^2; \quad \sigma_y = 2\,\text{MN/m}^2; \quad \tau_{xy} = 3\,\text{MN/m}^2$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \left(\frac{8+2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{8-2}{2}\right)^2 + 3^2} = 5 \pm 4.24$$

أي أن:

$$\boldsymbol{\sigma_1 = 9.24\ \text{MN/m}^2; \quad \sigma_2 = 0.76\ \text{MN/m}^2 \quad \text{(Ans.)}}$$

الفصل الثالث

مركز الثقل وعزم القصور الذاتي

في هذا الفصل

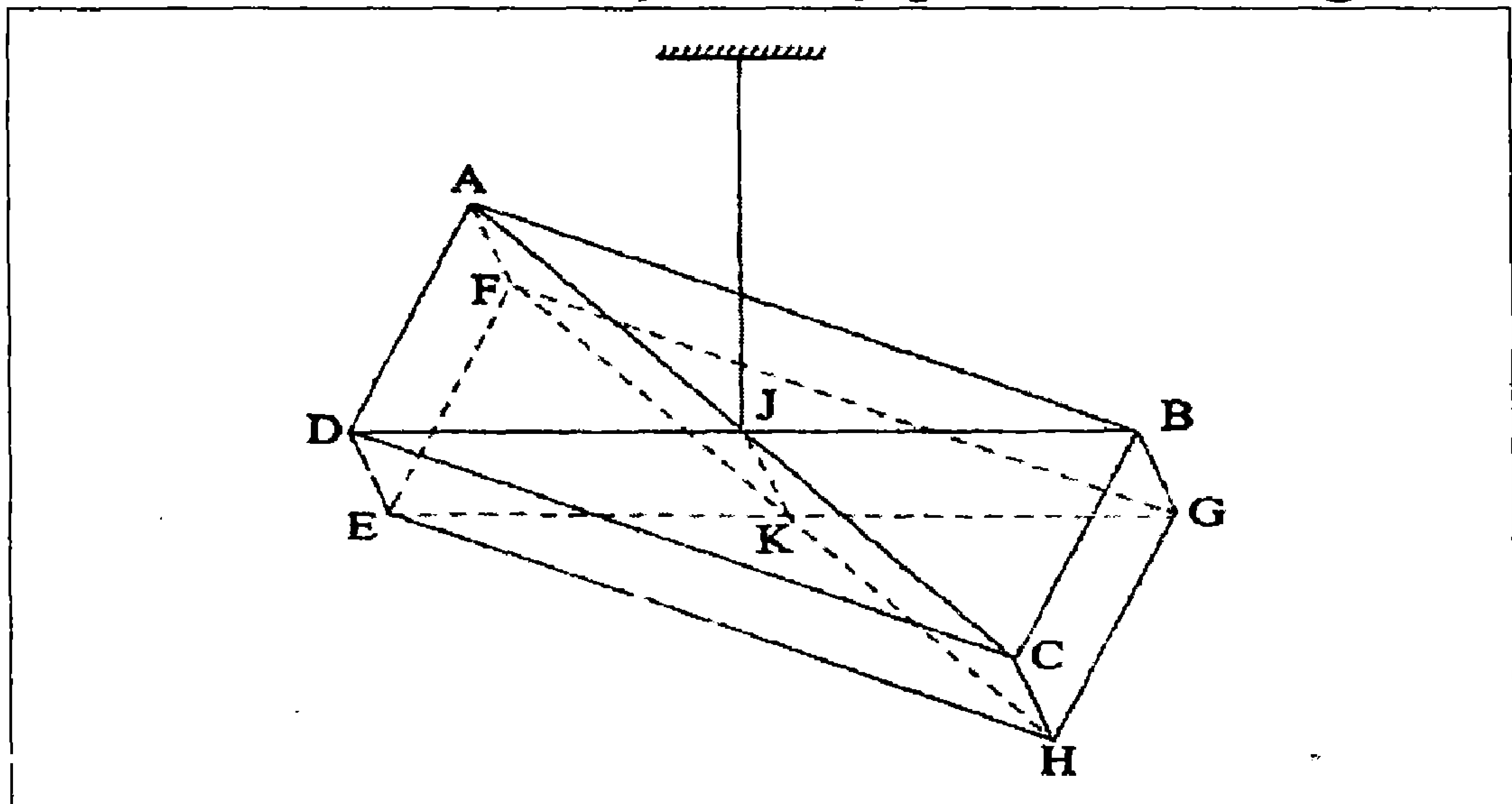
- مركز جاذبية جسم ما.
- تحديد مركز الجاذبية.
- مركز الثقل.
- مواضع مراكز ثقل الأشكال الهندسية المستوية.
- مواضع مراكز ثقل الأجسام الصلبة ذات الأشكال العادية.
- مراكز ثقل المساحات المركبة.
- مركز جاذبية الأجسام الصلبة البسيطة.
- حساب المساحات والأحجام بطريقة مركز الثقل.
- حساب مركز الجاذبية في بعض الحالات البسيطة.
- مقدمة لعزم القصور الذاتي.
- عزم القصور الذاتي (العزم الثاني للمساحة).
- نظرية المحاور المتوازية.
- نظرية المحاور المتعامدة.
- نصف قطر التدويم.
- عزم القصور الذاتي للشرائح المعدنية الرقيقة ذات الأشكال المختلفة.
- ناتج ضرب القصور الذاتي

٣-١ مركز جاذبية جسم ما

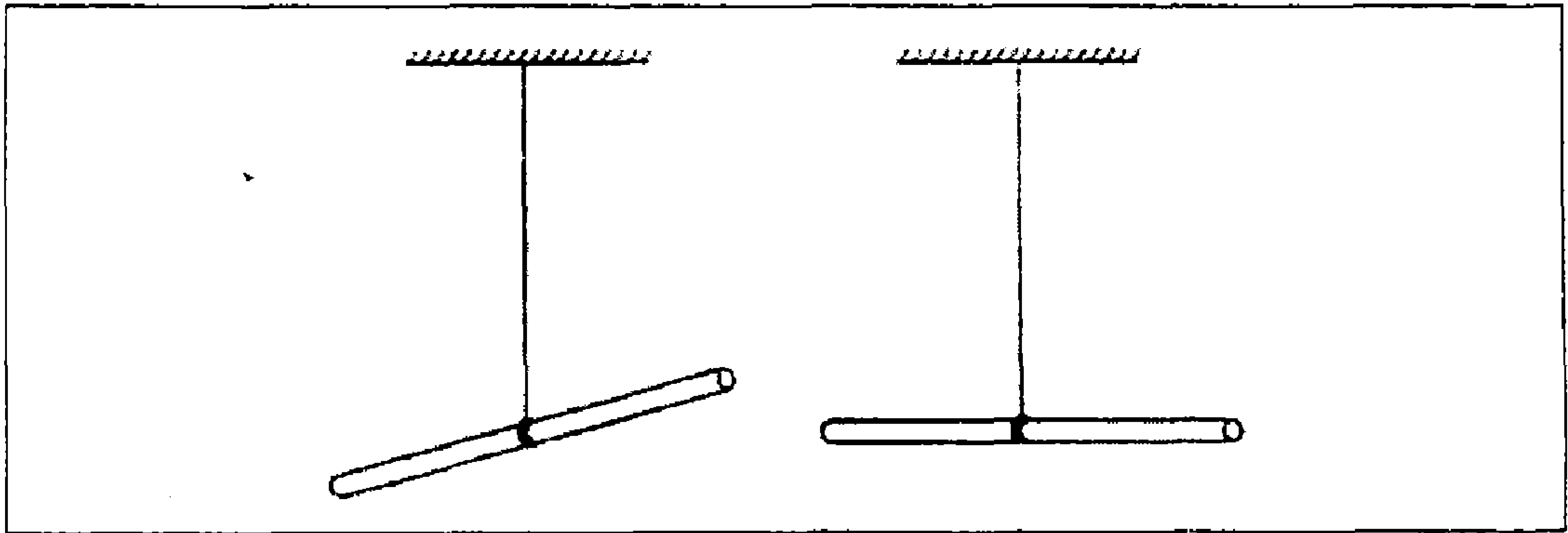
أي جسم يتألف من أجزاء عديدة وكل جزء من أجزاءه له وزن. والوزن عبارة عن قوة الجذب بين جسم ما والأرض وهو يتناسب مع كتلة الجسم. وأوزان كل أجزاء جسم ما يمكن اعتبارها أنها قوى متوازية متوجه ناحية مركز الأرض. ومن ثم، قد تكون مدمجة في قوة محصلة مقدارها يكون مساويًا لمجموعهم الجبري. لو أن قوة تدعيم ما، مساوية للمحصلة في المقدار ومضادة لها في الاتجاه، مطبقة على الجسم عبر خط تأثير المحصلة، حينئذ سيكون الجسم في حالة اتزان. خط التأثير هذا سوف يمر عبر مركز جاذبية الجسم. ومن ثم، يمكن تعريف مركز جاذبية الجسم على إنه النقطة التي عبرها يمكن افتراض أن الوزن الكلي للجسم يؤثر. في العادة يُرمز لمركز جاذبية أي جسم بالرمز .c.g أو بالرمز G بكل بساطة. إن موضع مركز الجاذبية c.g يعتمد على شكل الجسم وهذا الموضع ليس من الضرورة أن يكون داخل حدود الجسم.

٣-٢ تحديد مركز الجاذبية

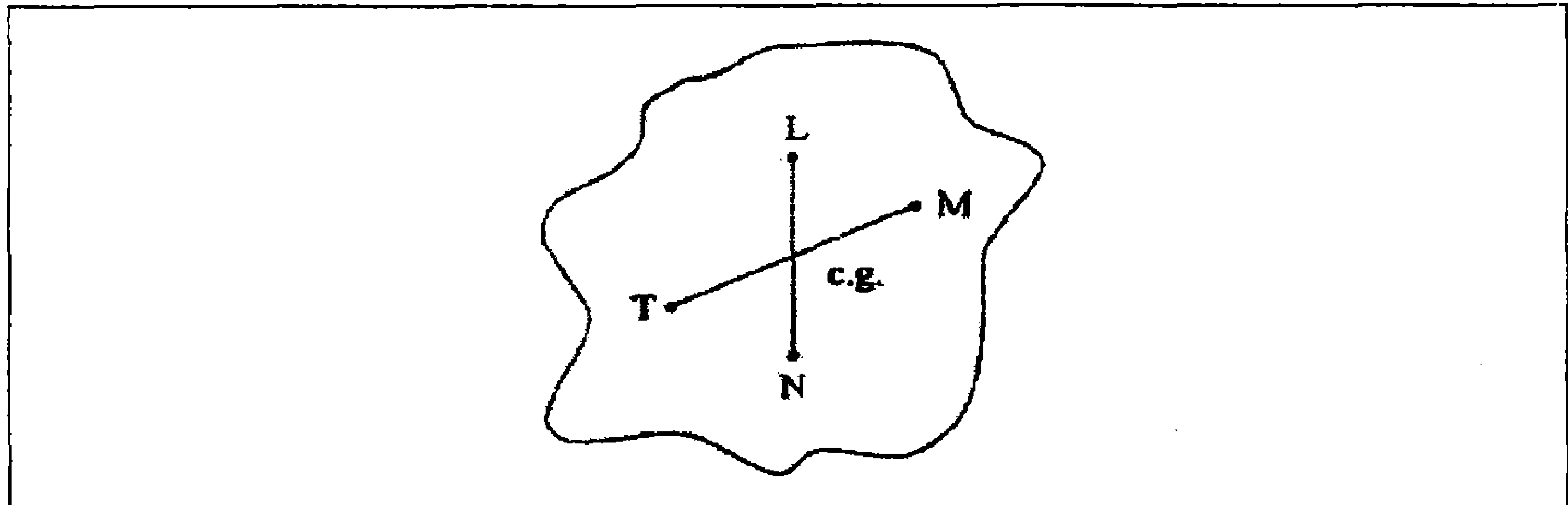
مركز الجاذبية لبعض الكائنات يمكن أن يُوجد عن طريقة موازنة الكائن على نقطة ما. خذ لوح رقيق سمكه (t)، الموضح في الشكل التالي:



ارسم أقطار الأوجه العلوية والسفلية للتقاطع عند J وK على الترتيب. لو أن اللوح موضوع على نقطة عند K، حينئذ لن يسقط اللوح. وهذا لأنه متزن. ولو أنه عُلق من J، فإن اللوح سوف يُعلق أفقيًا. إن مركز الجاذبية للوح يكون عند مركز الخط JK.



مرة أخرى، لو أننا علقنا قضيب منتظم بواسطة خيط، كما هو موضح في الشكل السابق، وحركنا موضع الخيط حتى أصبح القضيب معلقًا رأسيًا، فإننا نستطيع تحديد أن مركز الجاذبية للقضيب يقع عند مركزه. ومن خلال استخدام إجراءات مشابه يمكن تأسيس أن أي جسم له محور، أو خط، تماثل يكون له مركز جاذبية موجودًا على هذا الخط أو هذا المحور. وبالطبع، لو أن جسم ما له أكثر من محور تماثل، فإن مركز الجاذبية ينبغي أن يقع عند تقاطع المحاور.



طريقة أخرى من أجل تحديد مركز الجاذبية وهي التعليق. خذ كائن ما، مثل الذي نشاهد مقطعه العرضي في الشكل السابق. علقه من نقطة L. هذا الجسم لن يستقر حتى يصبح الوزن المحصلة الخاص به متجهًا رأسيًا لأسفل من L. وعبر L، ارسم خط رأسي LN. ثم علق الجسم من نقطة M، واجعله يستقر. وعبر M ارسم خط رأسي MT. إن نقطة تقاطع LN مع MT هي موضع مركز الجاذبية.

٣-٢ مركز الثقل Centroid

مركز الثقل أو مركز المساحة يُعرف بأنه النقطة التي عندها يُفترض أن تتركز المساحة الكلية للشكل. ومن ثم، يمكن أن يُؤخذ مركز الثقل على إنه نظير تام لمركز الجاذبية عندما تكون للأجسام مساحات فقط وليس لها أوزان.

٣-٤ مواضع مراكز الثقل لأشكال هندسية مستوية

الجدول التالي يعطي مواضع مراكز الثقل لبعض الأشكال الهندسية المستوية.

المسمى	المساحة	$\bar{x}$	$\bar{y}$	شكل توضيحي
المستطيل	b*h	b/2	h/2	
المثلث	b*h/2	b/3	h/3	
الدائرة	$\frac{\pi}{4} d^2$	d/2	d/2	
نصف الدائرة	$\frac{\pi}{8} d^2$	d/2	$\frac{4r}{3\pi}$ (= 0.424 r)	
ربع الدائرة	$\frac{\pi}{16} d^2$	$\frac{4r}{3\pi}$ (= 0.424 r)	$\frac{4r}{3\pi}$ (= 0.424 r)	

شبة المنحرف	$(a+b)\,\frac{h}{2}$	$\frac{a^2+b^2+ab}{3\,(a+b)}$	$\frac{(2a+b)}{(a+b)} \times \frac{h}{3}$	

٣-٥ مواضع مراكز الجاذبية لأجسام مصمتة منتظمة الشكل

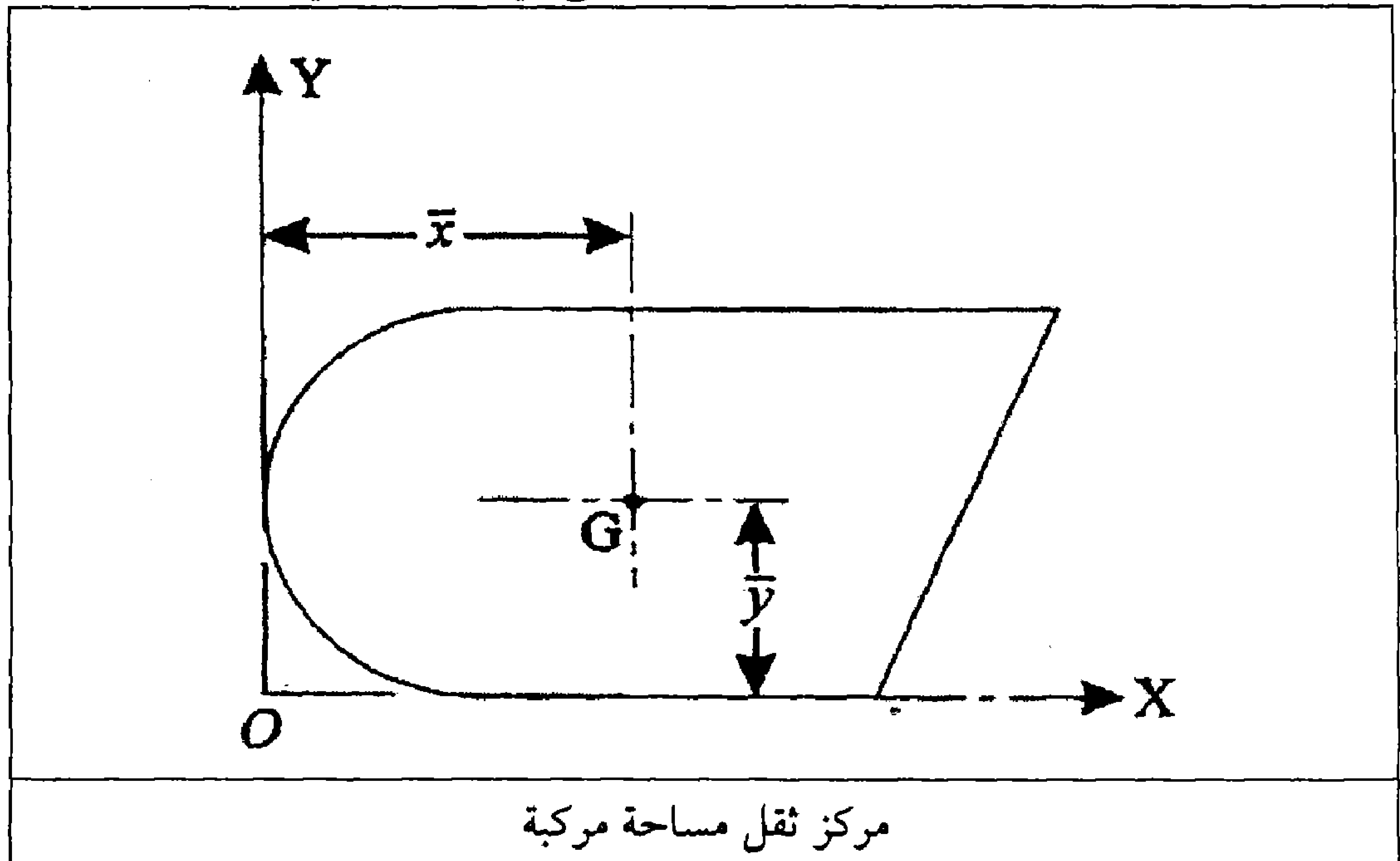
الجدول التالي يعطي مواضع مراكز الجاذبية للمجسمات المصمتة المنتظمة الشكل.

المجسم المصمت	الحجم	موضع مركز الجاذبية
الاسطوانة	$\pi * r^2 * h$	
الكرة	$0.75 * \pi * r^3$	
نصف الكرة	$(2/3) * \pi * r^3$	

مخروط دائري قائم	$(1/3)*\pi r^2*h$	

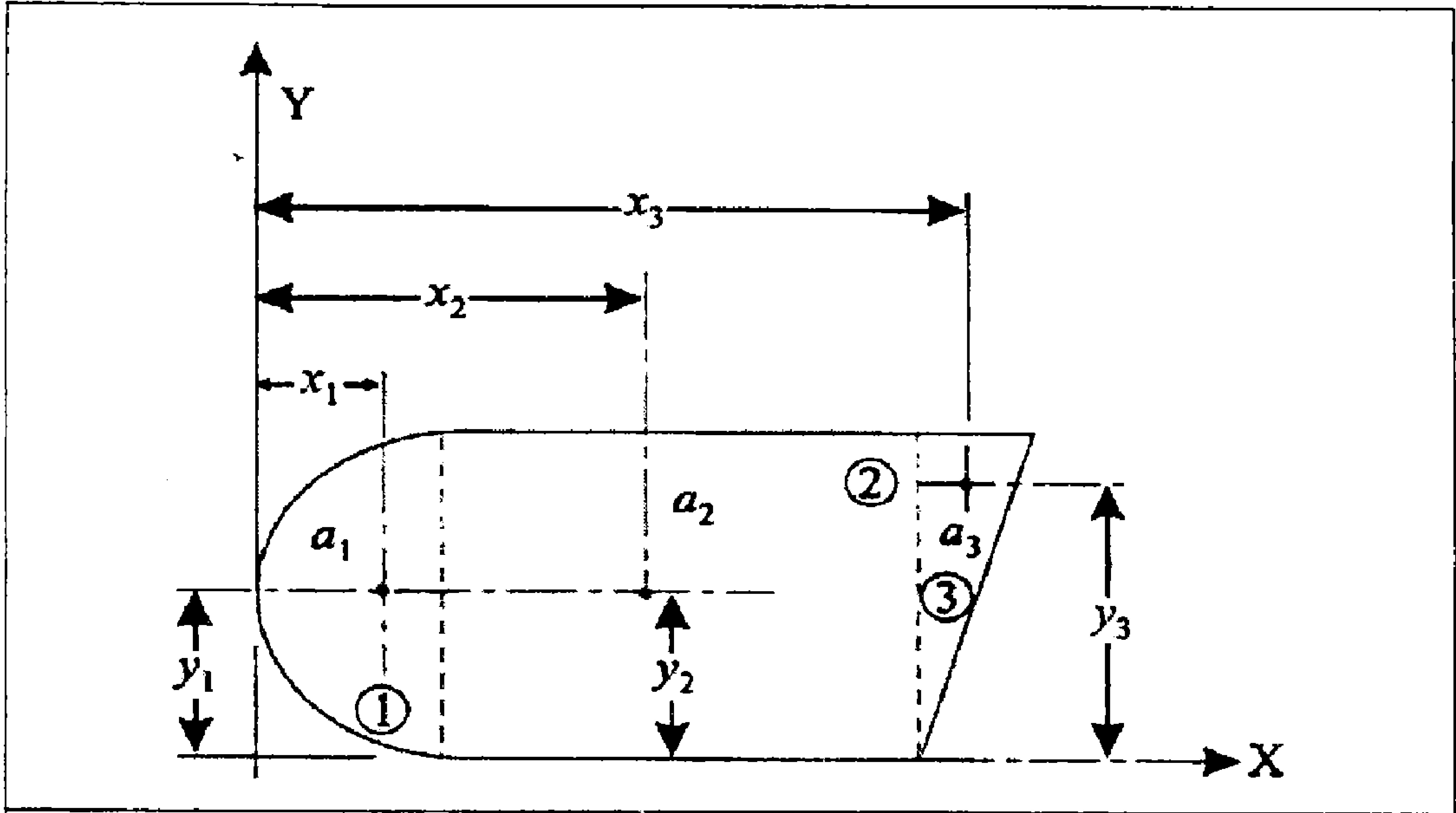
٣-٦ مراكز ثقل المساحات المركبة

إن موضع مركز الثقل لشكل ما مستوي يمكن التفكير فيه على إنه المسافة المتوسطة للمساحة إلى محور ما. وعادة، المحاور المتضمنة ستكون المحور X والمحور Y. في عملية تحديد موضع مركز الثقل وُجدت أن هناك ميزة من وضع المحور X عبر أدنى نقطة والمحور Y عبر الحافة اليسرى للشكل. هذا يؤدي إلى وضع المساحة المستوية بالكامل داخل الربع الأول حيث تكون المسافات X, Y موجبة، كما هو موضح في الشكل التالي:



مركز ثقل مساحة مركبة

بعد ذلك، يتم تقسيم المساحة إلى مساحات بسيطة كالمستطيلات، والمثلثات، وخلافه، كما هو موضح في الشكل التالي:



المساحة المركبة وهي مقسمة إلى مساحات بسيطة

بعد ذلك يتم أخذ عزم كل منطقة بمفردها حول المحور Y ثم يتم تجميع العزوم حول المحور Y. وحيث أن مركز ثقل الشكل المركب عبارة عن النقطة التي عندها يُفترض أن تكون المساحة الكلية مركزة، فإن عزم المساحة الكلية حول المحور Y ينبغي أن يساوي عزوم الأجزاء المكونة للمساحة الكلية حول المحور Y. وهذا يعني أن:

$$(a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_n)\ \bar{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n$$

$\bar{x} = \dfrac{a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \ldots\ldots + a_n\ x_n}{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}$ or $\bar{x} = \dfrac{\Sigma\ ax}{\Sigma\ a}$	(3-1)

وبإتباع نفس الإجراء من أجل العزوم حول المحور X، نحصل على الآتي:

$\bar{y} = \dfrac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots\ldots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}$ or $\bar{y} = \dfrac{\Sigma ay}{\Sigma a}$	(3-2)

لو أنه توجد فتحة في الشكل المستوي، حينئذ يتم التعامل معها على إنها مساحة سالبة. إن عزم المساحة السالبة سيكون سالبًا مما يؤدي إلى جعل الشكل الكلي يقع في الربع الأول.	ملاحظة

٣-٧ مركز جاذبية المجسمات المصمتة البسيطة

إن وزن الجسم عبارة عن قوة تؤثر عند مركز جاذبيته وموجه ناحية مركز الأرض. إن موضع مراكز أجسام تزن (W_1) و(W_2) و(W_3) وهكذا يتم إيجاده بنفس الطريقة المتبعة مع محصلة القوى المتوازية.

$\bar{x} = \frac{\Sigma Wx}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma Wy}{\Sigma W} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma Wz}{\Sigma W}$	(3-3)

لو أن كل الأجسام من نفس المادة ولها كثافة (ρ)، إذن:

$W = \rho V_1, W_2 = \rho V_2, W_3 = \rho V_3$ etc.

بالتعويض في المعادلة رقم (٣-٣) السالفة الذكر، نحصل على الآتي:

$\bar{x} = \frac{\Sigma \rho Vx}{\Sigma \rho V} = \frac{\Sigma Vx}{\Sigma V} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \rho Vy}{\Sigma \rho V} = \frac{\Sigma Vy}{\Sigma V} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \rho Vz}{\Sigma \rho V} = \frac{\Sigma Vz}{\Sigma V}$	(3-4)

لو أن الأجسام مصنوعة من نفس المادة وبنفس الكثافة في كل الأنحاء، فإن مركز جاذبية الأجسام يكون مركز الحجم الخاص بهم. ولو أن الأجسام لها نفس المقطع العرضي ولكن بأطوال مختلفة، فإن:

$V = al_1, V_2 = al_2, V_3 = al_3$ etc.

بالتعويض في المعادلة رقم (٣-٤) السابقة، نحصل على الآتي:

$\bar{x} = \frac{\Sigma alx}{\Sigma al} = \frac{\Sigma lx}{\Sigma l} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma aly}{\Sigma al} = \frac{\Sigma ly}{\Sigma l} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma alz}{\Sigma al} = \frac{\Sigma lz}{\Sigma l}$	(3-5)

لو أن الأجسام عبارة عن أجزاء من سلك، أو ماسورة، أو قضيب له مقطع عرضي ثابت، إذن مركز الجاذبية لهم قد يوجد من مركز أوزانهم.

مواضع مركز جاذبية بعض الأجسام المصمتة ذات الأشكال العادية نشاهدها في الجدول المذكور في الفقرة رقم ٣-٥.

٣-٨ المساحات والأحجام - طريقة مركز الثقل

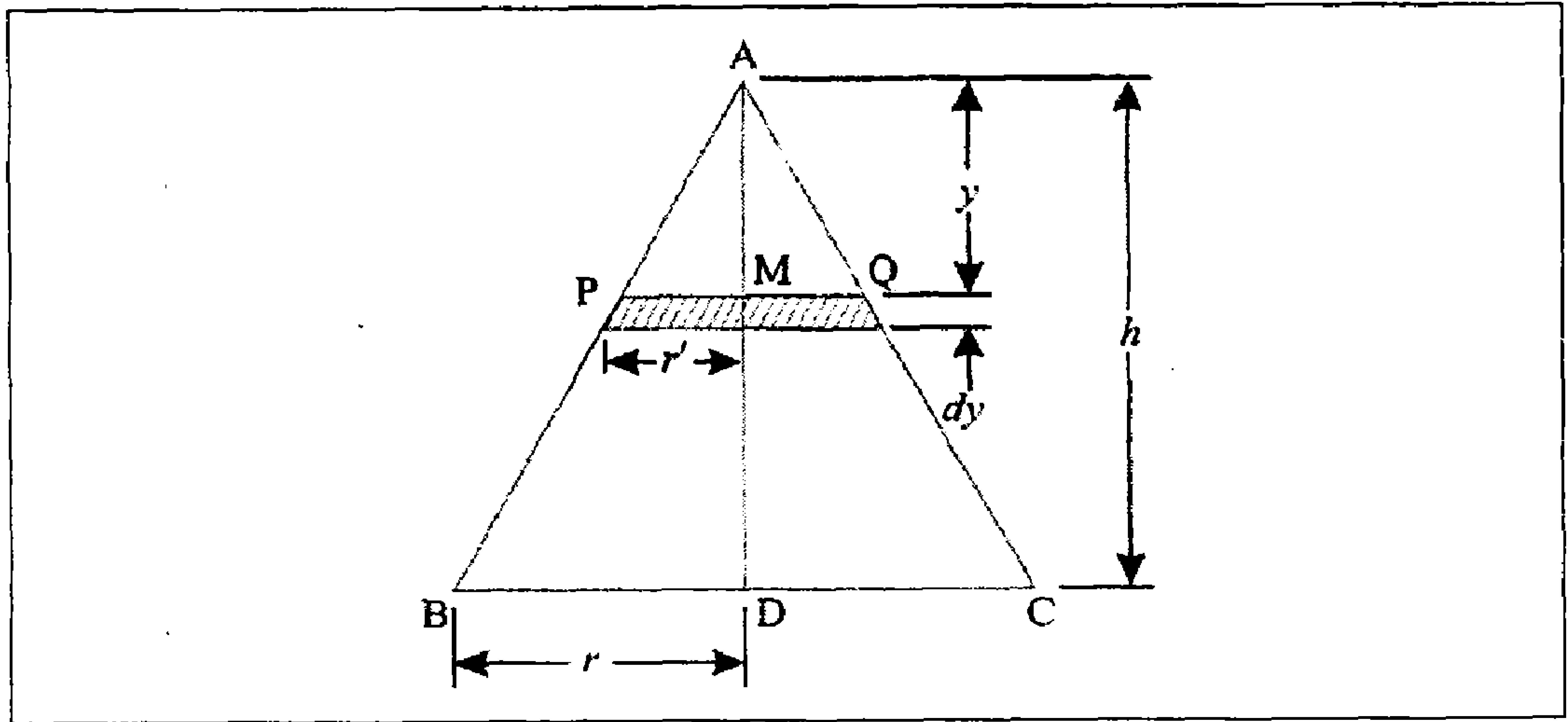
حيث أن مركز الجاذبية لمساحة ما أو لجسم ما عبارة عن النقطة التي عندها يمكن افتراض أن المساحة أو كتلة الجسم مركزة، لذلك يمكن القول بأن المسافة التي عبرها تنقل مساحة ما أو جسم ما تكون نفس المسافة الموصوفة بمركز الجاذبية الخاص به. هذه العلاقة يتم استخدامها في إيجاد المساحات والأحجام. ومن ثم، فخط ما يسير موازيًا لموضعه الأصلي يُقال أنه يتم تكوين منطقة تساوي طول الخط مضروب في المسافة التي عبرها تحرك مركز الجاذبية الخاص به. وهذا يعني أن المساحة تساوي الطول في العرض. وأيضًا، لو أن مساحة ما تتحرك موازية لموضعها الأصلي فإنه يُقال أنه يتم تكوين نفس حجم المنشور الذي يساوي المساحة مضروبة في المسافة التي عبرها تحرك مركز الثقل. وهذا يعني أن أي حجم يساوي مساحة الأساس **base area** مضروبة في الارتفاعات **altitudes**.

وبالمثل، لو أن خط ما يدور حول أحد طرفيه حينئذ سيتم تكوين مساحة دائرة. ولو أن مثلث قائم الزاوية يدور حول أي ضلع من الضلعين المتعامدين فيه حينئذ سيتم تكوين حجم مخروط. وفي كل حالة من هاتين الحالتين يتحرك خط أو مساحة عبر مسافة تساوي طول مسار ما موصوف بمركز ثقل إما الخط أو المساحة. إن العديد من أبعاد المساحات أو الحجوم يتم تبسيطها من خلال استخدام هذه الطريقة.

٣-٩ مركز الجاذبية في بعض الحالات البسيطة

(١) مركز جاذبية مخروط دائري مصمت وقائم الزاوية:

انظر الشكل التالي:



لنجعل ABC عبارة عن المخروط وAD عبارة عن محوره. ولندرس لوح عنصري دائري PQ تم استقاطعه بواسطة مستويان موازيان للقاعدة BC على مسافات y وy+dy من A، وجعل مركزه عند M.

لنجعل الآتي:

$$AD = h,\ BD = r,\ PM = r'$$

المثلثات APM, ABD متشابه.

$$\frac{AM}{MP} = \frac{AD}{BD}$$

$$\therefore \qquad \frac{y}{r'} = \frac{h}{r},\ i.e.\ r' = \frac{yr}{h}$$

لو أن w عبارة عن كثافة المادة، إذن يتم حساب وزن PQ كالآتي:

$$= \pi r'^2\, dy.w = \frac{\pi r^2\ y^2}{h^2}\ .\ dy.w$$

مركز جاذبية PQ يكون عند M. ومن ثم، يمكن حساب مسافة مركز جاذبية المخروط من A كالآتي:

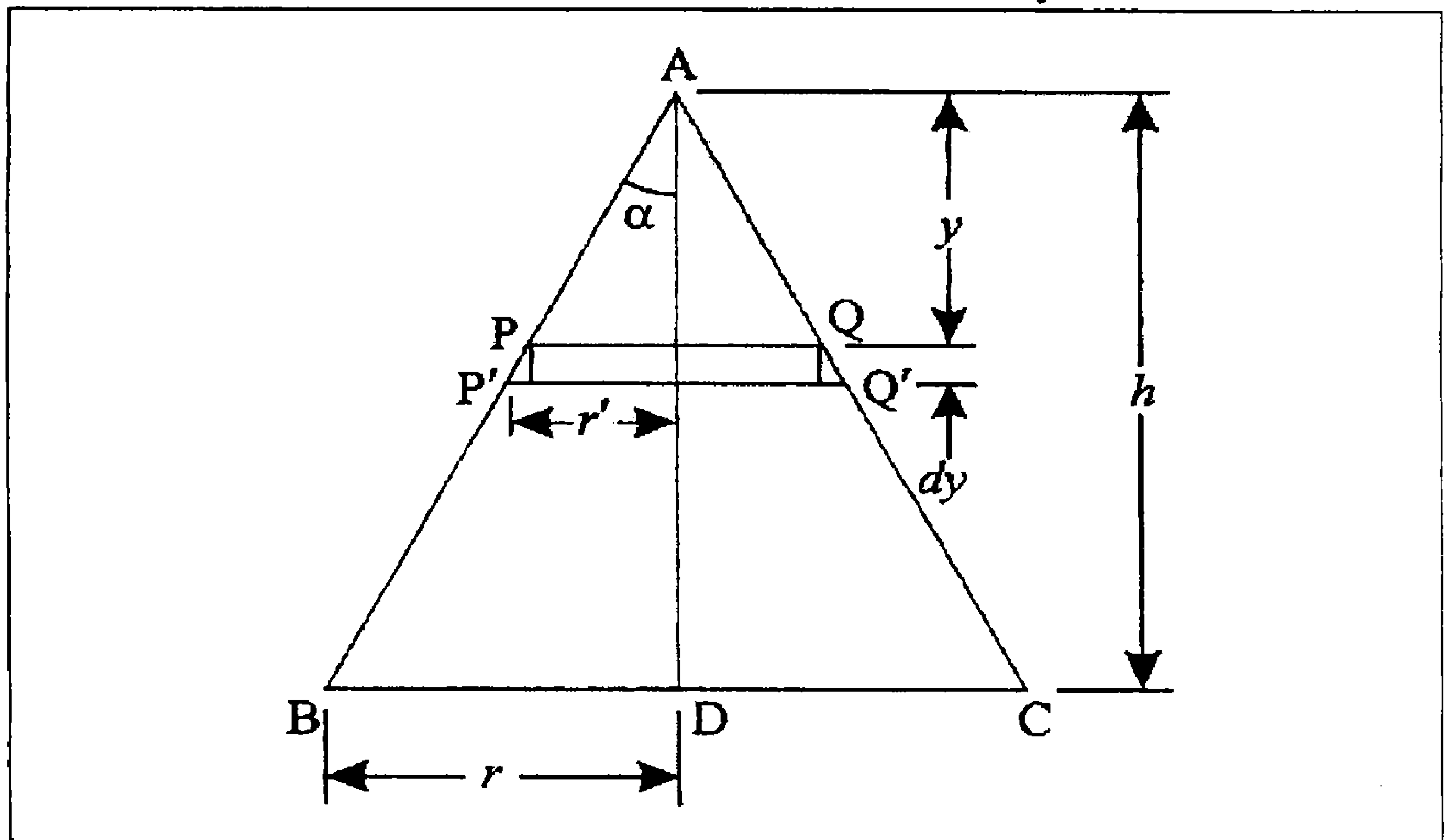
$$= \frac{\sum_{y=0}^{y=h} \pi \frac{r^2 y^2}{h^2} dy.w.y}{\sum_{y=0}^{y=h} \pi \frac{r^2 y^2}{h^2} . dy.w} = \frac{\int_0^h y^3\, dy}{\int_0^h y^2\, dy} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}$$

$= \left[h - \frac{3h}{4}\right] = \frac{h}{4}$ *from the base*	**(3-6)**

ومن ثم، مركز جاذبية أي مخروط مصمت يقع على المحور على ارتفاع يساوي ربع الارتفاع الكلي للمخروط من القاعدة.

(٢) مركز جاذبية مخروط قائمة ودائري ورقيق ومفرغ من الداخل:

انظر الشكل التالي:



لنجعل ABC عبارة عن المخروط وAD عبارة عن محوره. ولندرس حلقة دائرية مستقطعه بواسطة المستويات PQ وP'Q' الموازية للقاعدة BC على مسافات y وy+dy على الترتيب من A.

لنجعل نصف قطر PQ = r'.

BD = r, AD = h

نصف الزاوية الرأسية للمخروط = الزاوية BAD = α.

وبكل وضوح:

$$PP' = dy \sec \alpha$$

كما في الحالة رقم (١) سالفة الذكر:

r' = r*y/h

مساحة الحلقة العنصرية:

$$= 2\pi\, r'\, PP' = 2\pi \,.\, \frac{ry}{h}\; dy \sec \alpha$$

لو أن w عبارة عن الوزن لكل وحدة مساحة للمادة، إذن يمكن حساب وزن الحلقة كالآتي:

$$= 2\pi \,.\, \frac{ry}{h} \,.\, dy \sec \alpha \,.\, w$$

مركز جاذبية الحلقة يقع على AD على مسافة y من A. ومن ثم، يمكن حساب مسافة مركز جاذبية المخروط من A كالآتي:

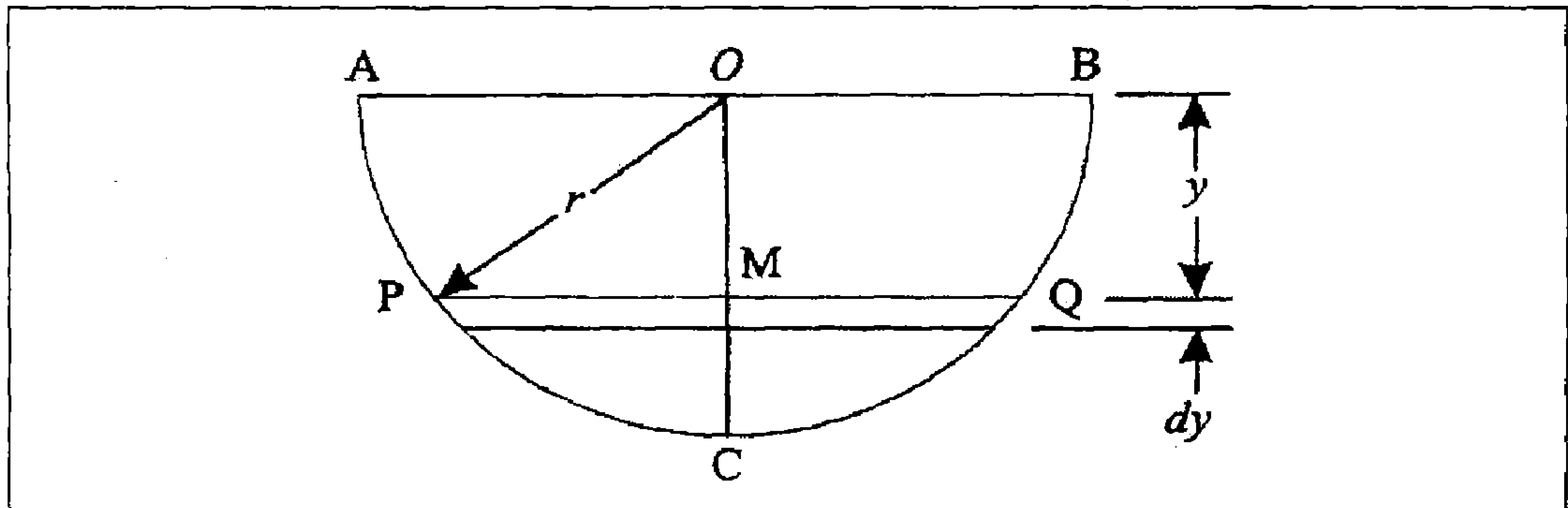
$$= \frac{\sum_{y=0}^{y=h} 2\pi \frac{ry}{h} dy \sec \alpha \; w.y}{\sum_{y=0}^{y=h} 2\pi \frac{ry}{h} dy \sec \alpha \,.\, w} = \frac{\int_0^h y^2 \, dy}{\int_0^h y \, dy} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = 2/3\, h$$

$= (h - 2/3h) = h/3$ *from the base*	**(3-7)**

ومن ثم، مركز جاذبية مخروط قائم ودائري ورقيق ومفرغ من الداخل يقع على المحور على مسافة تساوي ثلث الارتفاع الكلي للمخروط من القاعدة.

(٣) مركز جاذبية نصف كرة مصمتة:

انظر الشكل التالي:



لنجعل ACB عبارة عن نصف دائرة نصف قطرها r، وOC عبارة عن نصف قطرها المركزي. لندرس لوح دائري عنصري PQ تم استقطاعها بواسطة ألواح موازية لـ AB على مسافات y وy+dy من AB.

$$PM^2 = OP^2 - OM^2 = r^2 - y^2$$

وزن اللوح الدائري العنصري PQ:

$$= \pi (r^2 - y^2) \times dy \cdot w$$

حيث أن w عبارة عن وزن وحدة الحجم من المادة.

مركز جاذبية اللوح الدائري العنصري PQ يقع على OC على مسافة y من O.

ومن ثم، يتم حساب مسافة مركز جاذبية نصف الكرة من O كالآتي:

$$= \frac{\sum_{y=0}^{y=r} \pi (r^2 - y^2)\, dy \cdot w \cdot y}{\sum_{y=0}^{y=r} \pi (r^2 - y^2)\, dy \cdot w}$$

$$= \frac{\int_0^r (r^2 - y^2)\, y\, dy}{\int_0^r (r^2 - y^2)\, dy} = \frac{\left|\frac{r^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right|_0^r}{\left|r^2 y - \frac{y^3}{3}\right|_0^r}$$

$= \dfrac{\frac{r^4}{4}}{\frac{2r^3}{3}} = \dfrac{3r}{8}$	**(3-8)**

ومن ثم، مركز جاذبية نصف الكرة المصمتة يقع على نصف القطر المركزي على مسافة (**3*r/8**) من مستوى القاعدة، حيث أن **r** عبارة عن نصف قطر نصف الكرة.

(٤) مركز جاذبية نصف كرة رقيقة ومفرغة من الداخل:

في الشكل السابق، لو أن نصف الكرة مفرغة وذات سمك يمكن تجاهله، إذن يصبح PQ حلقة مساحتها = $2\pi r\, dy$، وذلك بناءًا على حساب المساحات والحجوم السالف الذكر.

وزن الحلقة PQ:

$$= 2\pi r \cdot dy \cdot w$$

حيث أن w عبارة عن وزن وحدة المساحة للمادة المستخدمة.

إذن، مسافة مركز جاذبية نصف الكرة من O لنقل أنها تساوي $\bar{y}$.

$= \dfrac{\int_0^r 2\pi r\, dy\, w \cdot y}{\int_0^r 2\pi r\, dy \cdot w} = \dfrac{\int_0^r y\, dy}{\int_0^r dy} = \dfrac{\frac{r^2}{2}}{r} = r/2$	**(3-9)**

ومن ثم، يقع مركز جاذبية نصف الكرة المفرغة عند منتصف نصف القطر المركزي.

(٥) مركز جاذبية طبقة نصف دائرية semi-circular lamina:

لنجعل الشكل التوضيحي السابق يقدم لوح نصف دائري نصف قطره r.

طول الشريحة العنصرية PQ:

$$= 2 \times PM = 2\sqrt{(r^2 - y^2)}$$

مساحة الشريحة العنصرية PQ:

$$= 2\sqrt{r^2 - y^2}\ dy$$

لو أن w عبارة عن الوزن لكل وحدة مساحة للمادة المستخدمة، إذن وزن الشريحة العنصرية PQ يكون:

$$= 2\sqrt{r^2 - y^2}\ dy\ .\ w$$

مركز جاذبية الشريحة العنصرية PQ يقع على OC على مسافة y من O.

$$\bar{y} = \frac{\int_0^r 2\sqrt{r^2 - y^2}\ dy\ .\ wy}{\int_0^r 2\sqrt{r^2 - y^2}\ dy\ .\ w} = \frac{\int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\ dy}{\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\ dy}$$

والآن:

$$\int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\ dy = -\frac{1}{2}\int_0^r (r^2 - y^2)^{1/2}\ (-2y)\ dy$$

$$\int_0^r y\sqrt{r^2 - y^2}\ dy = -\frac{1}{2}\left|\frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{3/2}\right|_0^r = \frac{r^3}{3}$$

كما أن:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\ dy = \left| y\,\frac{(r^2 - y^2)}{2} + \frac{r^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2}\right|_0^r = \frac{r^2}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$$

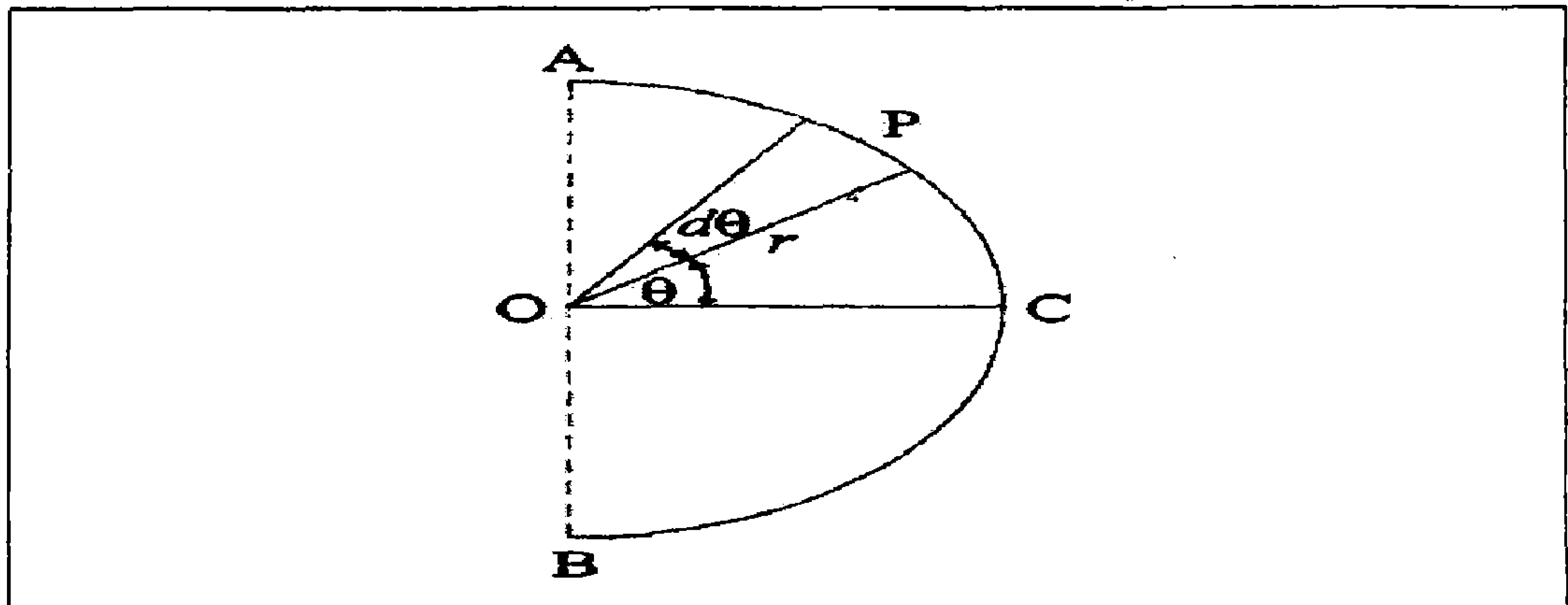
إذن:

$\bar{y} = \dfrac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \dfrac{4r}{3\pi}$	**(3-10)**

ومن ثم، يقع مركز جاذبية أي طبقة نصف دائرية على نصف القطر المركزي على مسافة ((3*r/(3*π من القطر المقيد، حيث أن **r** عبارة عن نصف قطر اللوح.

(٦) مركز جاذبية (أو ثقل) قوس نصف دائري:

انظر الشكل التالي:



لنجعل OC عبارة عن نصف القطر المركزي وP عبارة عن عنصر من قوس يقابل زاوية ($d\theta$) عند O.

من خلال التماثل، فإن مركز جاذبية القوس يقع على OC.

طول القوس العنصري P = $r * d\theta$، حيث أن r عبارة عن نصف قطر القوس.

مسافة القوس العنصري P من AB = $r*\cos(\theta)$.

إذن، يمكن حساب مسافة مركز جاذبية القوس بأكمله من AB كالآتي:

$$= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r d\theta \,.\, r \cos\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\, d\theta}$$

$= \frac{r \,|\sin\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{|\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{2r}{\pi}$	**(3-11)**

٣-١٠ مقدمة عامة لعزم القصور الذاتي (M.O.I.)

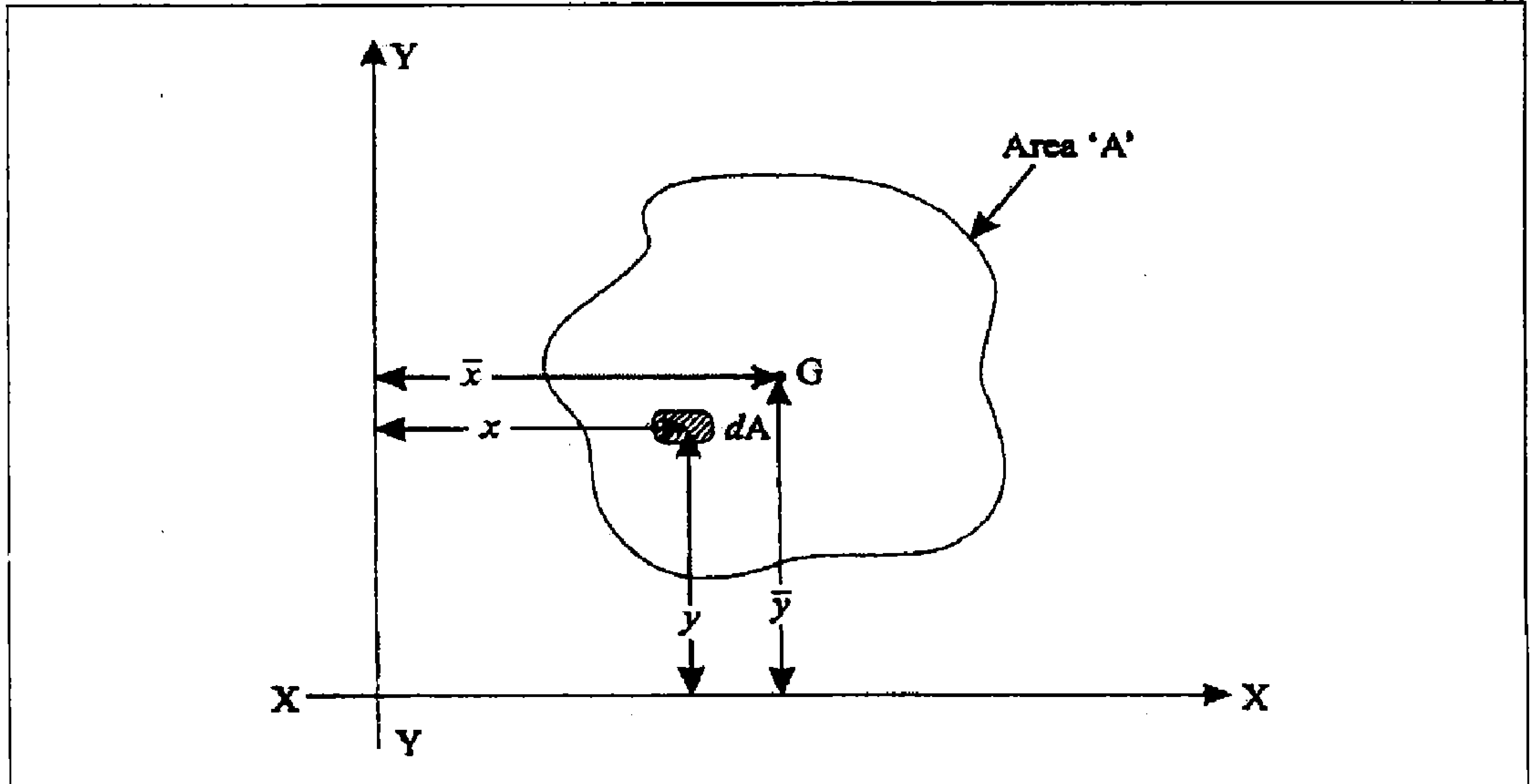
إن عزم أي قوة (الذي يُطلق عليه أيضًا العزم الأول للقوة) حول أي نقطة يكون ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بينهما. ولو أن هذا العزم الأول ضُرب مرة أخرى في المسافة العمودية بينهما، فإن ناتج الضرب الذي يُتحصل عليه يسمى العزم الثاني للقوة أو عزم عزم القوة. ولو أنه بدلاً من القوة، تم التعامل مع مساحة الشكل أو كتلة الجسم، حينئذ يكون هذا العزم عبارة عن العزم الثاني للمساحة أو العزم الثاني للكتلة. هذه العزوم تُعرف إصطلاحًا وعلى نطاق واسع بعزم القصور الذاتي (**M.O.I.**).

عندما ننظر إلى عزم القصور الذاتي في حد ذاته، نجد أنه ليست هناك أي دلالة مادية لعزم القصور الذاتي. فهو لا يزيد عن كونه تعبير رياضي عادة ما يُرمز له بالحرف I. وعندما يُستخدم المصطلح "عزم القصور الذاتي للكتلة" بالتلازم مع مبدأ دوران الأجسام الجاسئة، فإنه يمكن القول بأن عزم القصور الذاتي عبارة عن قياس لمقاومة الجسم للدوران. وكذلك الحال بالنسبة لـ "عزم القصور الذاتي للمساحة" فعندما يُستخدم بالتلازم مع مبدأ ترخيم أو تشوه العناصر بالانثناء، حينئذ يمكن القول بأن عزم القصور الذاتي للمساحة ما هو إلا قياس لمقاومة الانثناء.

إن عزم القصور الذاتي يؤلف الأساس لديناميكات الأجسام الجاسئة ومقاومة المواد.

٣-١١ عزم القصور الذاتي (العزم الثاني للمساحة)

عزم القصور الذاتي لأي مساحة مستوية "A" يكون العزم الثاني لكل المساحات الصغيرة "dA" التي تؤلف المساحة A حول أي محور في مستوى المساحة A، كما هو موضح في الشكل التالي:



الـ (Iyy) = عزم القصور الذاتي حول yy وهو يساوي:

$$= \Sigma (dA \cdot x)\, x$$

حيث أن (dA . x) عبارة عن العزم الأول للمساحة dA حول YY و(x (dA . x)) عبارة عن عزم العزم الأول (الذي يُعرف بالعزم الثاني) للمساحة dA حول نفس المحور YY. إذن:

$I_{yy} = \Sigma\, dA \cdot x^2 = \int_A dA x^2$	(3-12)

وبالمثل:

$I_{xx} = \Sigma\, dAy^2 = \int_A dAy^2$	(3-13)

الجدول التالي يعطي عزم القصور الذاتي للمساحات البسيطة.

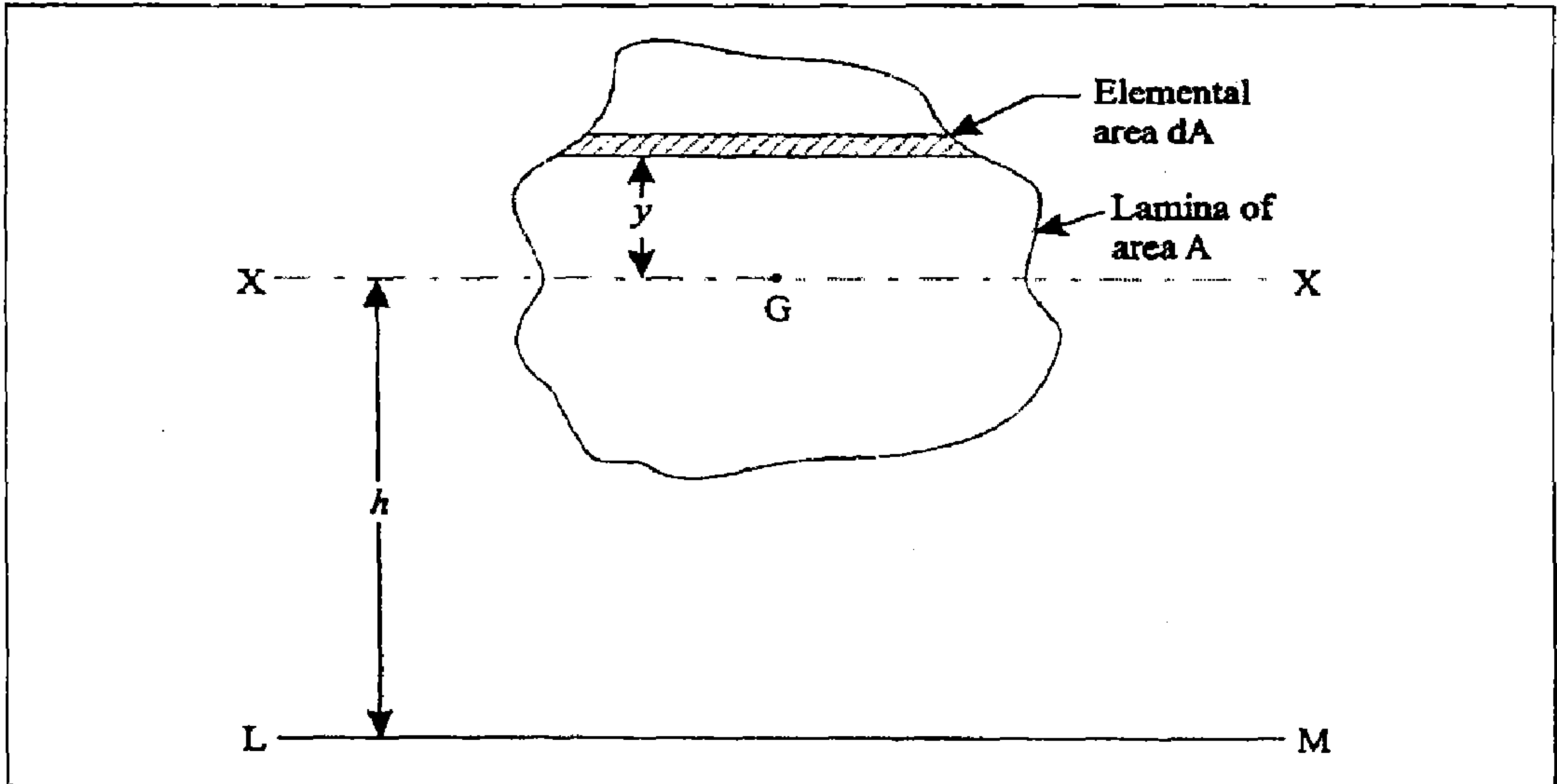
عزم القصور الذاتي للمساحات البسيطة

عزم القصور الذاتي		التوضيح	الشكل
$I_{yy} = \frac{db^3}{12}$	$I_{xx} = \frac{bd^3}{12}$	X, X, Y, Y, G, d, $\frac{d}{2}$, b	المستطيل
---	$I_{xx} = \frac{bh^3}{36}$ $= \frac{bh^3}{12}$ about the base	Y, Y, X, X, G, h, $\frac{h}{3}$, b	المثلث
$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi r^4}{4}$		Y, Y', X', X, G	الدائرة
$I_{yy} = \frac{\pi r^4}{8}$	$I_{xx} = 0.11\, r^4$	Y, Y', X', X, G, $\frac{4r}{3\pi}$, r, r	نصف الدائرة

ربع الدائرة		$I_{xx} = I_{yy} = 0.055\, r^4$	
القطع الناقص		$I_{xx} = \frac{\pi\, ab^3}{4}$	$I_{yy} = \frac{\pi ba^3}{4}$

١٢-٣ نظرية المحور الموازي (أو صيغة التحويل Transfer Formula)

تنص نظرية المحاور المتوازية على أن: "عزم القصور الذاتي لطبقة ما حول أي محور في مستوى الطبقة يساوي مجموع عزم القصور الذاتي حول محور مركزي موازي في مستوى الطبقة وناتج ضرب مساحة الطبقة في مربع المسافة بين المحورين".



في الشكل السابق نشاهد طبقة مساحتها A. والآن، لنجعل LM عبارة عن المحور في مستوى الطبقة الذي حوله يُطلب إيجاد عزم القصور الذاتي للطبقة. ولنجعل XX عبارة عن المحور المركزي المتوسط centeroidal axis في مستوى الطبقة ويوازي المحور LM. ولنجعل أيضًا "h" عبارة عن المسافة بين المحورين XX, LM.

من الممكن افتراض أن الطبقة تتألف من عدد لا نهائي من المكونات العنصرية الصغيرة الموازية للمحور XX. ولنقم الآن بدراسة واحدًا من تلك المكونات العنصرية يوجد على مسافة y من المحور XX. أما مسافة المكون العنصري من المحور LM فستكون (h±y) وذلك بناءًا على كون كل من المكون العنصري والمحور LM على جانبي المحور XX أو كلاهما على نفس الجانب من المحور XX.

عزم القصور الذاتي للمكون العنصري حول المحور LM يكون:

$$LM = dA\ (h \pm y)^2$$

إذن، عزم القصور الذاتي للطبقة بأكملها حول المحور LM يكون:

$$= I_{LM} = \Sigma\ dA\ (h \pm y)^2 = \Sigma\ dAh^2 + \Sigma dA\ y^2 \pm 2\ \Sigma\ dAh\ y$$
$$= h^2\ \Sigma\ dA + \Sigma dA\ y^2 \pm 2\ h\ \Sigma\ dA.y$$

ولكن:

$$\Sigma dA = A,\ h^2\ \Sigma dA = Ah^2$$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
$\Sigma dA\ y^2$	عزم القصور الذاتي للطبقة حول المحور **XX**، (أي I_{XX} أو I_G).
$\Sigma\ dA\ y$	يساوي صفر حيث أن **XX** عبارة عن محور مركزي.

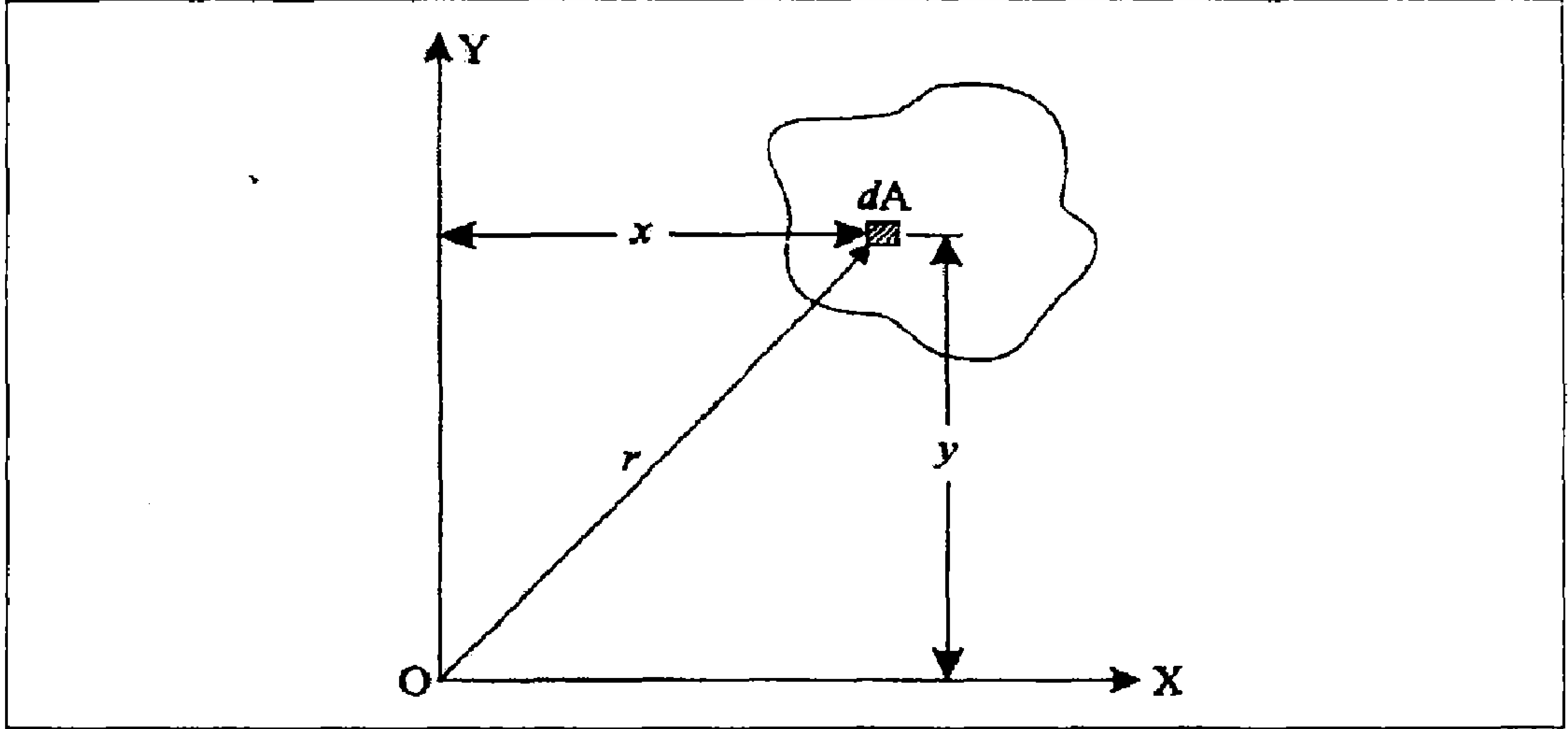
إذن:

(3-14)	$I_{LM} = I_{XX}\ (\text{or}\ I_G) + Ah^2$

٣-١٣ نظرية المحاور المتعامدة

تنص نظرية المحور المتعامد تنص على أن: "لو أن (I_{OX}) و(I_{OY}) عبارة عن عزوم القصور الذاتي للطبقة حول محورين متعامدين على بعضهما البعض **OX** و**OY** في مستوى الطبقة و(I_{OZ}) عبارة عن عزم القصور الذاتي للطبقة حول محور (**OZ**) عمودي على الطبقة ويمر عبر نقطة تقاطع المحورين **OX, OY** إذن ($I_{OZ} = I_{OX} + I_{OY}$)".

انظر الشكل التالي:



لنجعل OX وOY عبارة عن المحورين المتعامدين على بعضهما البعض والواقعين في مستوى الطبقة. ونجعل OZ عبارة عن المحور العمودي على الطبقة والمار عبر O.

لنقم الآن بدراسة مكون عنصري مساحته dA في الطبقة. ولنجعل مسافة هذا المكون العنصري عن المحور OZ (أي من O) عبارة عن r.

إذن، عزم القصور الذاتي للمكون العنصري حول OZ يكون:

$$= dA \times r^2$$

لو أن إحداثيات المكونات العنصرية عبارة عن (x, y) رجوعًا إلى المحاور OY, OX، إذن نحصل على الآتي:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

عزم القصور الذاتي للمكون العنصري حول المحور OZ:

$$= dA\ (x^2 + y^2) = dA\ x^2 + dA\ y^2$$

إذن، عزم القصور الذاتي الكلي للطبقة حول المحور OZ يكون:

$$= I_{OZ} = \Sigma\ (dA\ x^2 + dA\ y^2) = \Sigma\ dA\ x^2 + \Sigma dA\ y^2$$

ولكن، $\Sigma\ dA\ x^2$ = عزم القصور الذاتي للطبقة حول المحور OY = (I_{OY}).

كما أن، $\Sigma\ dA\ y^2$ = عزم القصور الذاتي للطبقة حول المحور OX = (I_{OX}).

ومن ثم:

$I_{OZ} = I_{OX} + I_{OY}$	(3-15)

٣-١٤ نصف قطر التدويم (نصف قطر القصور الذاتي)

إحدى خصائص المقطع العرضي والتي تؤثر في السلوك الإنشائي للعناصر هي نصف قطر التدويم والذي يتم حسابه كالآتي:

$k_i = \sqrt{\frac{I_i}{A}} \qquad (\because \; I_i = Ak_i^2)$	**(3-16)**

حيث إن:

المعنى والاستخدام	المعامل
عزم القصور الذاتي حول المحور رقم i.	I_i
نصف قطر التدويم للمساحة حول المحور رقم i.	k_i

ومن ثم:

$$k_{XX} = \sqrt{\frac{I_{XX}}{A}}, \qquad k_{YY} = \sqrt{\frac{I_{YY}}{A}}$$

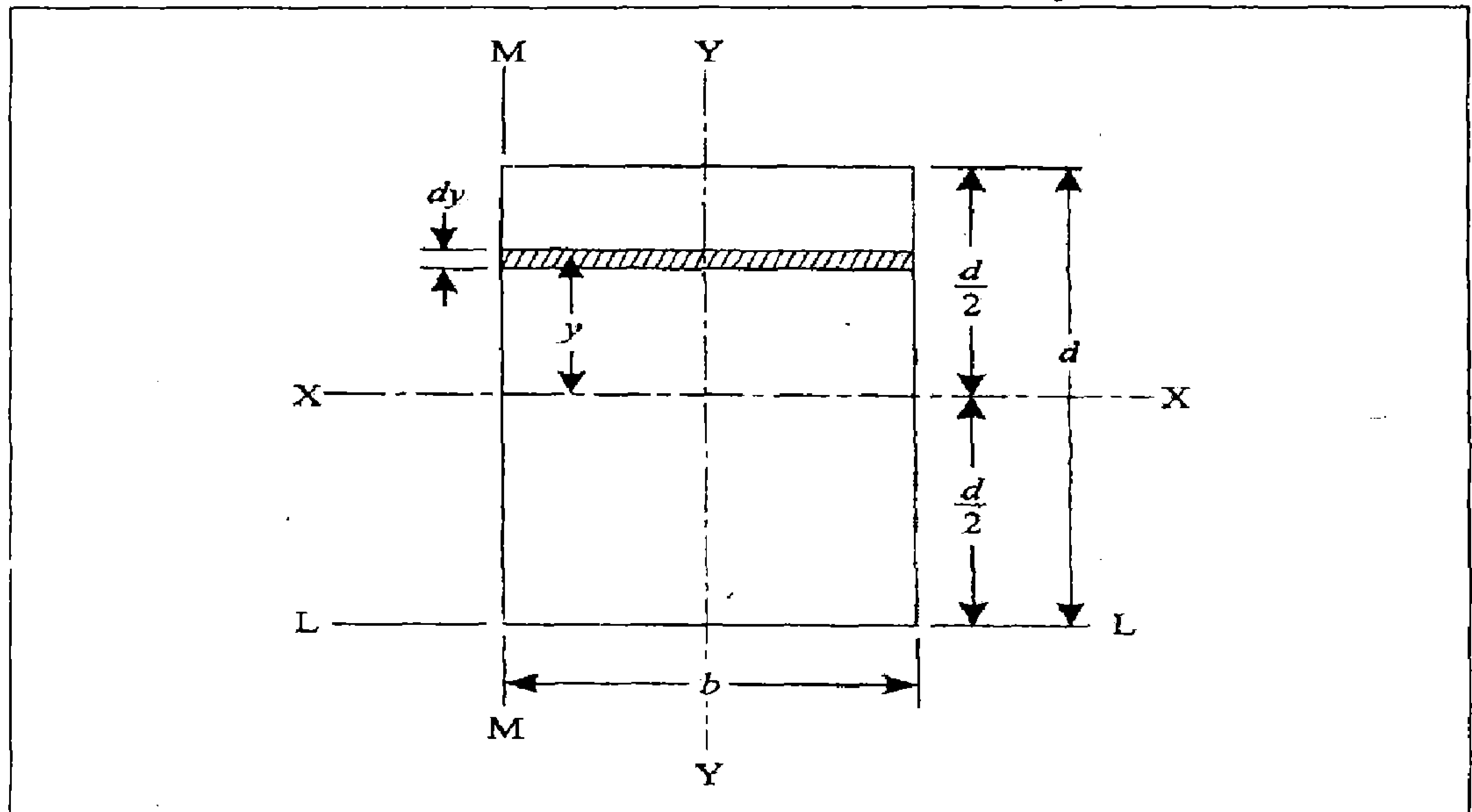
عندما تكون العناصر معرضة لقوى محورية فإنها تميل إلى الانبعاج. إن الحمل الذي عنده يحدث انبعاج للعناصر يتناسب مع مربع نصف قطر التدويم. وفي العادة يُشار إلى نصف قطر التدويم وهو منسوب لنظام المحاور المركزية للمقطع العرضي.

إن أي كمية عديمة الأبعاد تسمى نصف قطر الوحدة للقصور الذاتي يتم تعريفها على إنها نسبة عزم القصور الذاتي .M.O.I إلى مربع المساحة.

٣-١٥ عزم القصور الذاتي لطبقات ذات أشكال مختلفة

(١) الطبقة المستطيلة:

انظر الشكل التالي:



سنقوم الآن بدراسة طبقة مستطيلة عرضها b وعمقها d.

*(أ) عزم القصور الذاتي حول المحور المركزي **XX** الموازي لعرض الطبقة:*

لندرس سويًا مكون عنصري بالطبقة يوجد على مسافة y من المحور XX وعمقه dy.

مساحة المكون العنصري:

$$= dA = b \times dy$$

إذن، عزم القصور الذاتي للمكون العنصري حول المحور XX:

$$= dA \times y^2 = b \times dy \times y^2 = by^2\, dy$$

إذن، عزم القصور الذاتي الكلي للطبقة حول المحور XX:

$I_{XX} = 2\int_0^{d/2} by^2\, dy = 2b \times \frac{1}{3} \times \frac{d^3}{8} = \frac{bd^3}{12}$	**(3-17)**

بالمثل، يتم حساب عزم القصور الذاتي حول المحور المركزي XY الموازي لعمق المكون العنصري من خلال العلاقة التالية:

$I_{YY} = \frac{db^3}{12}$	**(3-18)**

*(ب) عزم القصور الذاتي حول محور **LL** يمر عبر الحافة السفلية أو الحافة العلوية:*

في ضوء نظرية المحور الموازي، يتم حساب عزم القصور الذاتي حول المحور LL من خلال العلاقة التالية:

$$I_{LL} = I_{XX} + Ah^2$$

في هذه الحالة:

$$A = bd \qquad h = \frac{d}{2} \qquad I_{XX} = \frac{bd^3}{12}$$

$I_{LL} = \frac{bd^3}{12} + bd \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{bd^3}{12} + \frac{bd^3}{4} = \frac{bd^3}{3}$	**(3-19)**

بالمثل، يتم حساب عزم القصور الذاتي حول المحور MM من خلال العلاقة التالية:

$I_{MM} = \frac{db^3}{3}$	**(3-20)**

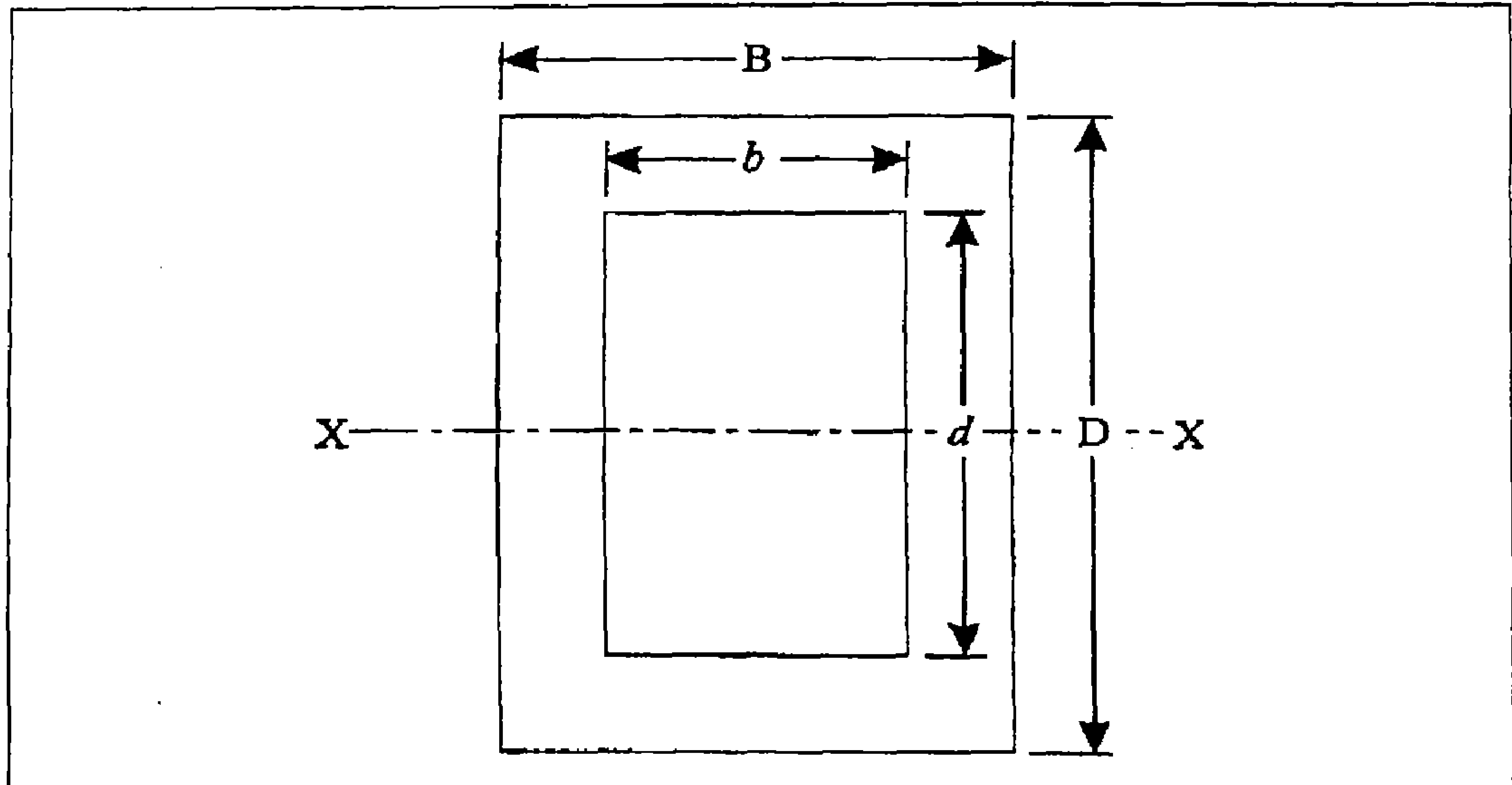
لو أن (G) عبارة عن مركز ثقل الطبقة، فإن المحور الذي يمر عبر مركز الثقل وعمودي على مستوى الطبقة يسمى المحور القطبي. والآن، لنجعل (I_p) عبارة عن عزم القصور الذاتي حول المحور القطبي، إن (I_p) يسمى *عزم القصور الذاتي القطبي* ***polar moment of inertia***.

في ضوء نظرية المحاور المتعامدة، نحصل على العلاقة التالية:

$I_p = I_{XX} + I_{YY} = \frac{bd^3}{12} + \frac{db^3}{12}$	(3-21)

(٢) طبقة مستطيلة تشتمل على فتحة مستطيلة في المنتصف:

انظر الشكل التالي:



لنجعل في منتصف طبقة مستطيلة أبعادها B x D فتحة مستطيلة أبعادها b x d.

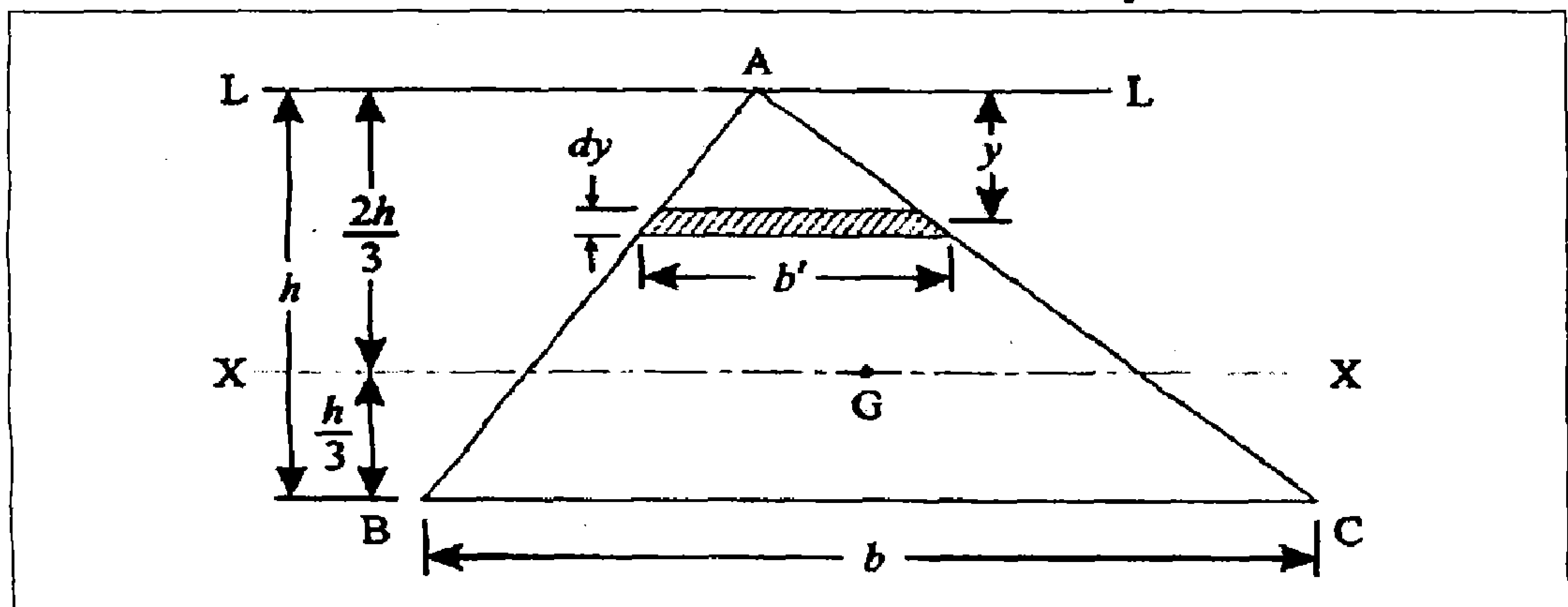
عزم القصور الذاتي للطبقة حول أي محور = عزم القصور الذاتي للمستطيل الكبير - عزم القصور الذاتي للمستطيل الصغير.

فعلى سبيل المثال:

$I_{XX} = \frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12}$	(3-22)

(٣) عزم القصور الذاتي لطبقة مثلثة:

انظر الشكل التالي:



لنجعل ABC عبارة عن طبقة مثلثة طول قاعدته b وارتفاعه h.

*(أ) عزم القصور الذاتي لمثلث حول محور **LL** يمر عبر رأس المثلث العليا ويوازي المحور:*

يمكن اعتبار المثلث أنه يتألف من عدد لا نهائي من المكونات العنصرية الموازية للقاعدة. سنقوم الآن بدراسة واحد من تلك المكونات العنصرية على مسافة y من رأس المثلث العليا وسمكه dy. والآن، يمكن حساب عرض المكون العنصري كالآتي:

$$= b' = \frac{b}{h}\ y$$

إذن، مساحة المكون العنصري تكون:

$$= b'\ dy = \frac{b}{h}\ y\ dy$$

إذن، عزم القصور الذاتي للمكون العنصري حول المحور LL يكون:

$$= \frac{b}{h}\ y\ dy\ y^2 = \frac{b}{h}\ y^3\ dy$$

إذن، عزم القصور الذاتي للطبقة حول المحور LL يكون:

$I_{LL} = \frac{b}{h}\int_0^h y^3\,dy = \frac{bh^3}{4}$	**(3-23)**

(ب) عزم القصور الذاتي لمثلث حول المحور المركزي الموازي للقاعدة:

لنجعل XX عبارة عن المحور المركزي. هذا المحور يكون على مسافة قدرها ((2/3)*h) من رأس المثلث العليا. وبتطبيق نظرية المحاور المتوازية، نحصل على الآتي:

$$I_{LL} = I_{XX} + A\left(\frac{2}{3}\,h\right)^2$$

إذن:

$$\frac{bh^3}{4} = I_{XX} + \frac{bh}{2} \times \frac{4}{9}\ h^2$$

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{4} - \frac{2}{9}\ bh^3$$

أو:

$I_{XX} = \frac{bh^3}{36}$	**(3-24)**

(ج) عزم القصور الذاتي لمثلث حول القاعدة:

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية مرة أخرى، نحصل على الآتي:

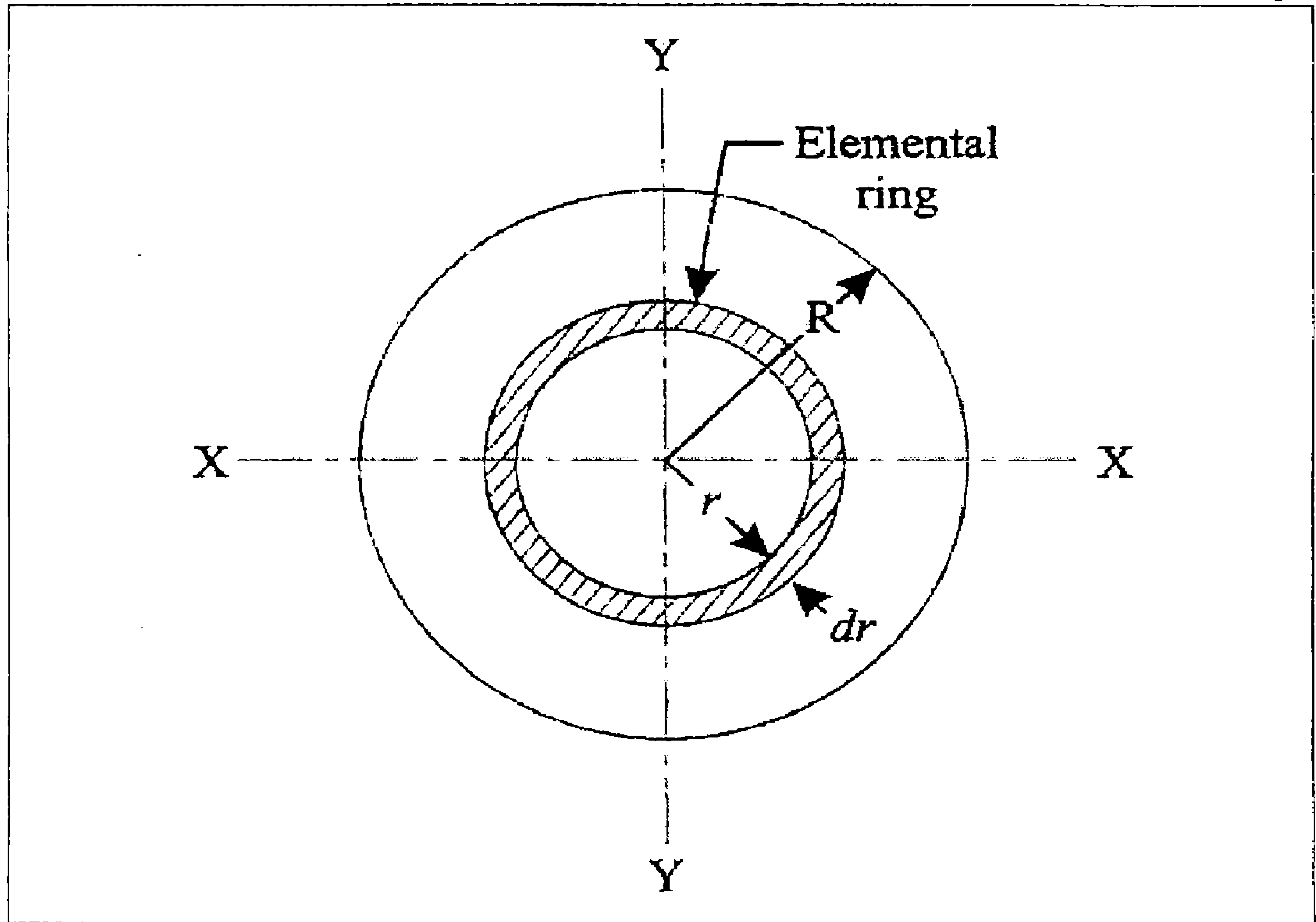
$$I_{BC} = I_{XX} + A\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$I_{BC} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \times \frac{h^2}{9}$$

$I_{BC} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}$	**(3-25)**

(٤) عزم القصور الذاتي للطبقة دائرية:

في الشكل التالي نشاهد طبقة دائرية نصف قطرها R. يمكن اعتبار أن هذه الطبقة تتألف من حلقات عنصرية متحدة المركز. ولندرس سويًا واحدة من تلك الحلقات العنصرية تقع عند نصف قطر r ولها سمك dr.



عزم القصور الذاتي للحلقة العنصرية حول المحور القطبي = مساحة الحلقة × (نصف القطر)^٢

$$= 2\,\pi r\, dr \times r^2 = 2\,\pi\, r^3 \times dr$$

إذن، عزم القصور الذاتي القطبي للطبقة بأكملها يكون:

$$I_p = \int_0^R 2\,\pi\, r^3\, dr$$

إذن:

$I_p = \frac{2\,\pi\,R^4}{4} = \frac{\pi\,R^4}{2}$	**(3-26)**

لو أن D عبارة عن قطر الطبقة:

D = 2*R

إذن:

$$I_p = \frac{\pi}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{32}\,D^4$$

ولكن:

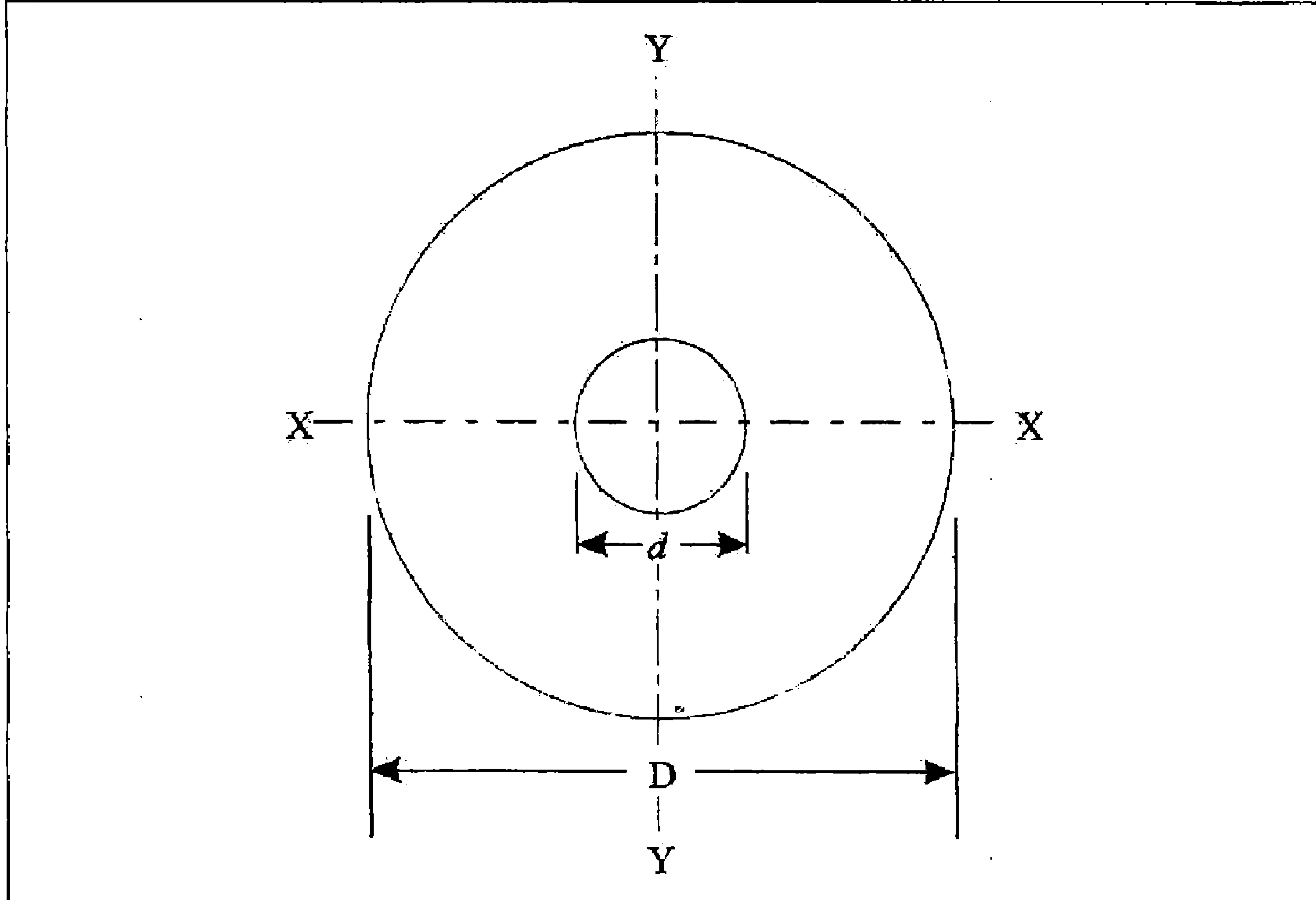
$$I_{XX} = I_{YY} \text{ and } I_{XX} + I_{YY} = I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

إذن:

$I_{XX} = I_{YY} = \frac{\pi D^4}{32}$	**(3-27)**

(٥) عزم القصور الذاتي لطبقة دائرية مشتملة على فتحة دائرية في وسطها:

انظر الشكل التالي:



لنجعل D و d عبارة عن القطر الخارجي والقطر الداخلي للطبقة على الترتيب.

عزم القصور الذاتي القطبي للطبقة = عزم القصور الذاتي القطبي للدائرة الكبيرة - عزم القصور الذاتي القطبي للدائرة الصغيرة، إذن:

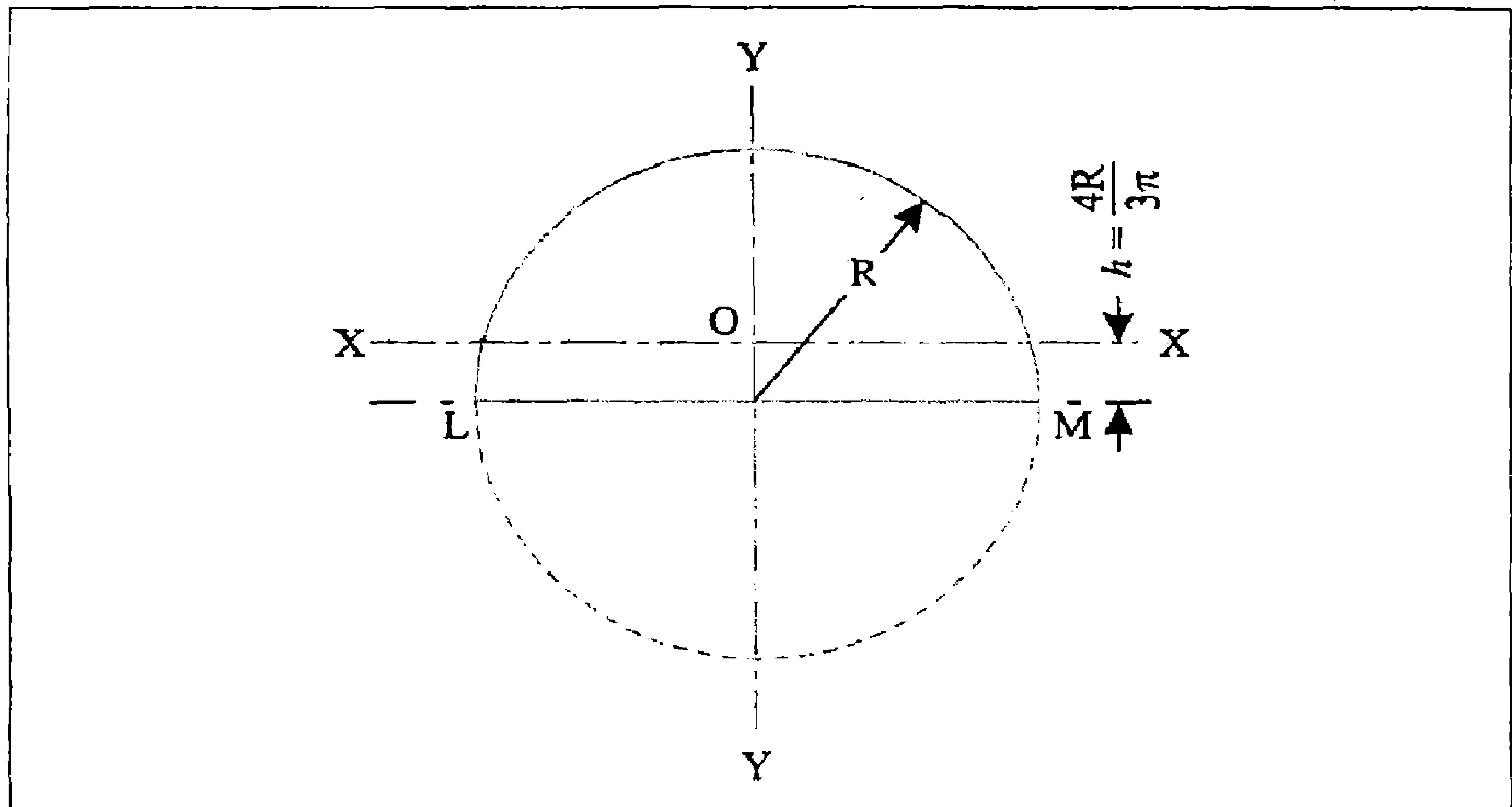
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$$

$I_{XX} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	**(3-27a)**

٦) عزم القصور الذاتي لطبقة نصف دائرية:

في الشكل التالي نشاهد نصف دائرة نصف قطرها R:



لنجعل LM عبارة عن قاعدة نصف الدائرة.

يتم حساب عزم القصور الذاتي لطبقة دائرية حول القطر LM كالآتي:

$$= \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

إذن، يمكن حساب عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة حول LM من خلال العلاقة التالية:

$I_{LM} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi D^4}{128}$	**(3-28)**

لنجعل XX محور مركزي يوازي القاعدة LM. ولنجعل h عبارة عن المسافة بين المحور XX والقاعدة LM. نحن لدينا الآتي:

$$h=\frac{4R}{3\pi}=\frac{4}{3\pi}\times\frac{D}{2}=\frac{2D}{3\pi}$$

في ضوء نظرية المحاور المتوازية، نحصل على الآتي:

$$I_{LM}=I_{XX}+Ah^2$$

إذن:

$$\frac{\pi R^4}{8}=I_{XX}+\frac{\pi R^2}{2}\times\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

ومنها، نحصل على العلاقات التالية:

$$I_{XX}=\frac{\pi R^4}{8}-\frac{8\pi\ R^4}{9\pi^2}$$

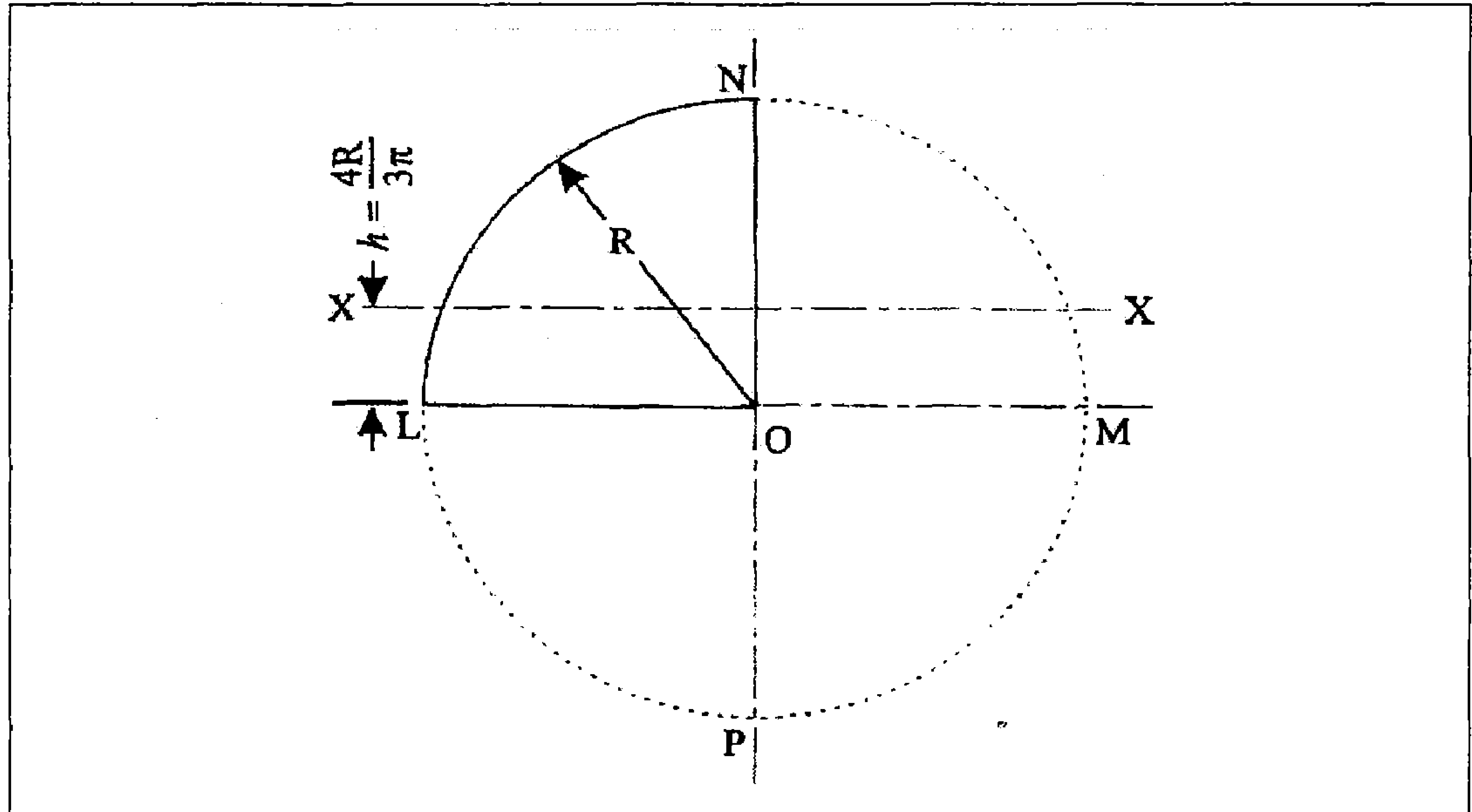
$$I_{XX}=\frac{\pi R^4}{8}-\frac{8R^4}{9\pi}$$

$I_{XX}=0.11\ R^4$	**(3-29)**

$I_{YY}=\frac{\pi R^4}{8}=\frac{\pi}{128}\ D^4$	**(3-30)**

(٧) عزم القصور الذاتي لربع الدائرة:

انظر الشكل التالي:



لنجعل LON عبارة عن لوح ربع دائرة نصف قطره R.

عزم القصور الذاتي للمساحة LON = ربع عزم القصور الذاتي للمساحة الدائرية حول المحور LM. إذن:

$$I_{LM} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16}$$

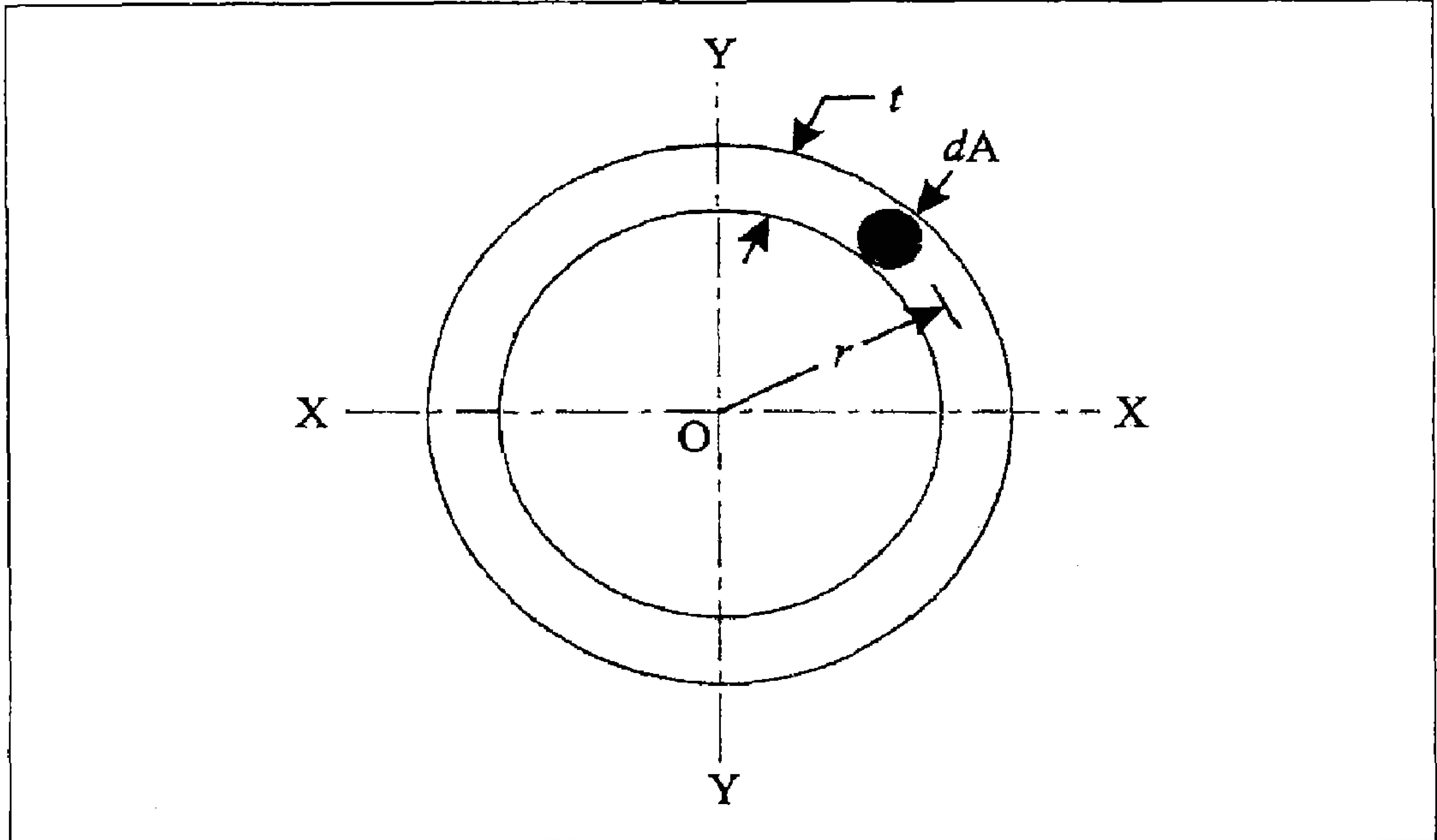
لندرس نصف الدائرة LNM. مسافة مركز ثقلها من LM = (4*R)/(3*π).

مسافة مركز ثقل ربع الدائرة LON من LM تساوي أيضًا (4*R)/(3*π). أي أن، المحور XX يكون المحور المركزي لربع الدائرة LON بالإضافة إلى نصف الدائرة LNM. إذن، عزم القصور الذاتي لربع الدائرة حول المحور XX = I_{xx} = نصف عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة حول XX. إذن:

$I_{XX} = \frac{1}{2}\,(0.11\,R^4) = 0.055\,R^4$	**(3-31)**

(٨) عزم القصور الذاتي لحلقة رقيقة:

في الشكل التالي، نشاهد حلقة نصف قطرها المتوسط r وسمكها t.



لندرس مكون عنصري dA بالطبقة. عزم القصور الذاتي لهذا المكون العنصري حول المحور القطبي للطبقة = $d*A*r^2$. وحيث أن كل المكونات العنصرية توجد على نفس المسافة r من المحور القطبي، فإن عزم القصور الذاتي للحلقة حول المحور القطبي يكون:

$$I_p = \Sigma dA\ r^2 = r^2\, \Sigma\, dA$$

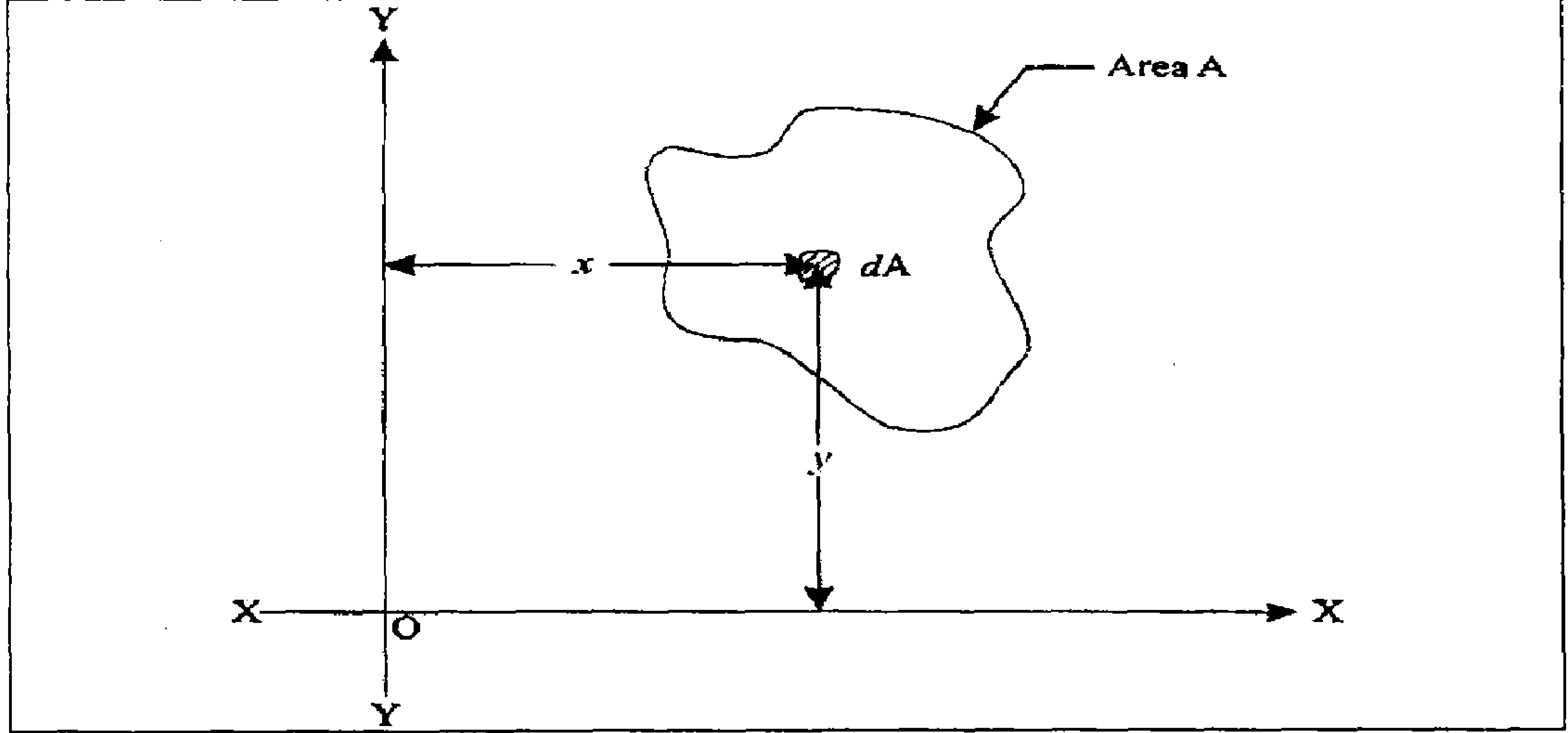
$$I_p = r^2 \times \text{area of the whole ring}$$

$I_p = r^2 \times 2\pi r t$	**(3-32)**

عزم القصور الذاتي حول المحور XX = عزم القصور الذاتي حول YY = $I_p \times 0.5$.

٣-١٦ ناتج ضرب القصور الذاتي Product of Inertia

لندرس مساحة مستوية أو مقطع مستوي (مساحته A) كما هو موضح في الشكل التالي:

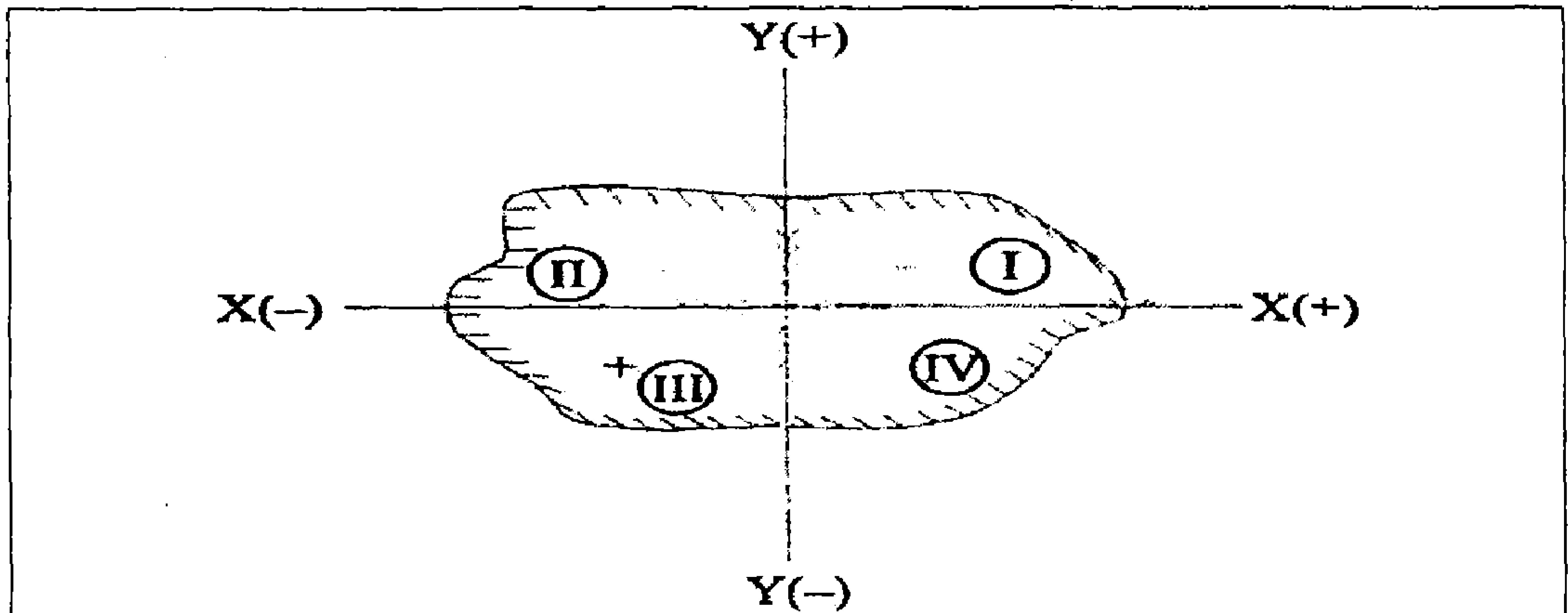


بعد ذلك، ندرس مساحة عنصرية dA على مسافة x وy من المحور YY والمحور XX على الترتيب (كما هو موضح في الشكل السابق). ومن ثم، $\Sigma\, xy\, dA$ يُعرف على إنه *ناتج ضرب القصور الذاتي للمقطع العرضي*. ورياضيًا:

$I_{XY} = \Sigma xy\, dA = \int_A xy\, dA$	(3-33)

<u>*إشارة ناتج ضرب القصور الذاتي:*</u>

إشارة منتج القصور الذاتي تعتمد على إحداثيات المساحات الصغيرة العديدة التي تؤلف الشكل المستوي بالنسبة لمحاور الإحداثيات XX وYY التي حولها يتم إيجاد منتج القصور الذاتي، كما هو موضح في الشكل التالي:



مثال

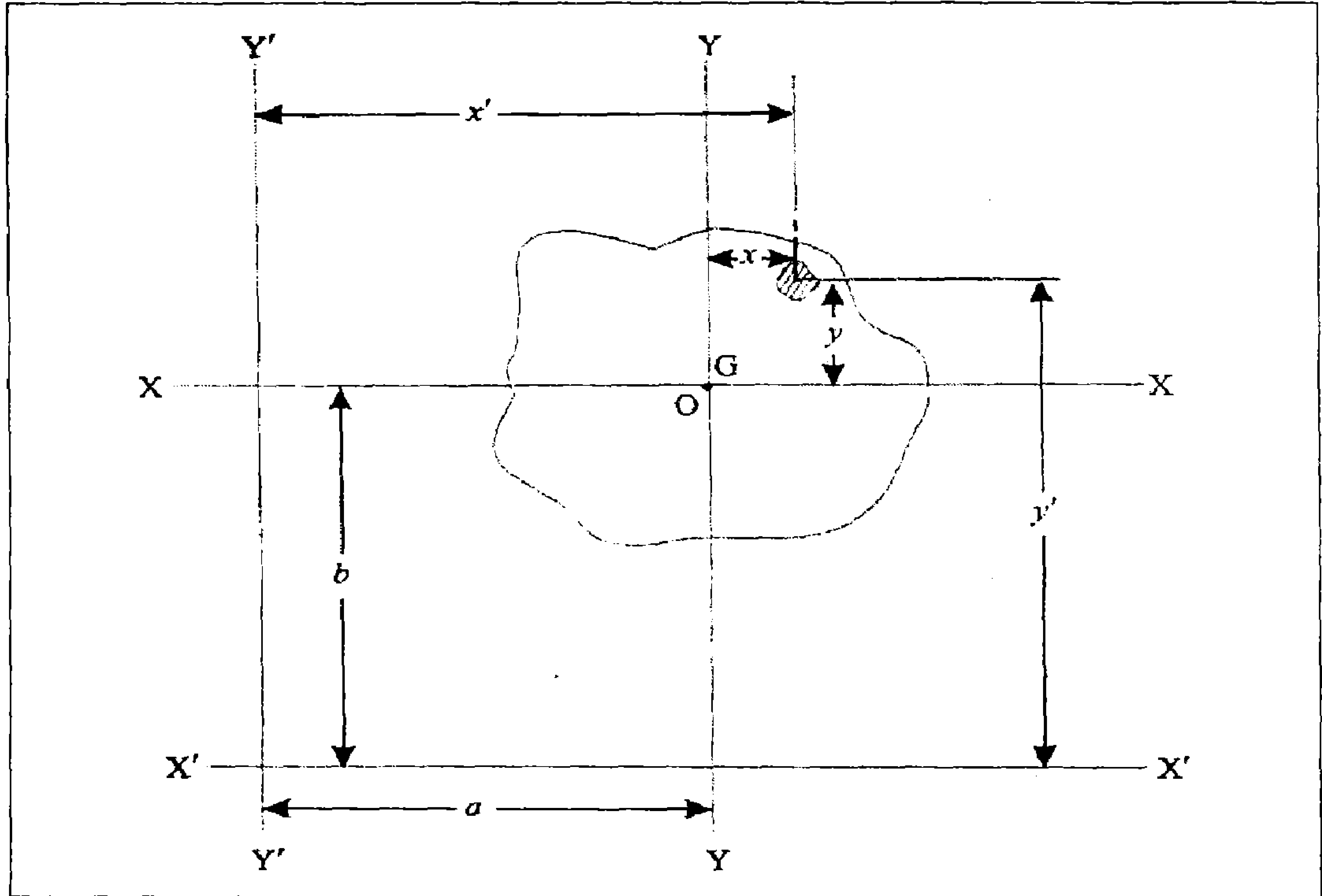
في ربع الدائرة IV، إشارة الإحداثي X تكون موجبة وإشارة الإحداثي Y تكون سالبة، مما يشير إلى أن إشارة منتج القصور الذاتي سالبة:

$(+ve) \times (-ve) = (-ve)$

٣-١٦-١ نظرية المحاور المتوازية لمنتج القصور الذاتي

عندما يكون منتج القصور الذاتي لمساحة مستوية أو لشكل مستوي معلومًا حول محاورهم المركزية XX وYY، حينئذ يكون من الممكن نقل عزوم القصور الذاتي حول أي محاور أخرى X'X' وY'Y' موازية للمحاور XX وYY.

لندرس مساحة A مع محاور كما هو موضح في الشكل التالي، ولنجعل dA عبارة عن مساحة صغيرة (المهشرة).



$$I_{X'Y'} = \int_A x' \, y' \, dA = \int_A (x + a)\,(y + b)\, dA$$

$$I_{X'Y'} = \int_A (xy + xb + ay + ab)\, dA$$

$$I_{X'Y'} = \int_A xy \, dA + b \int_A x \, dA + a \int_A y \, dA + ab \int_A dA$$

$$I_{X'Y'} = I_{xy} + 0 + 0 + abA$$

ومن ثم:

$I_{X'Y'} = I_{xy} + A\,ab$	(3-34)

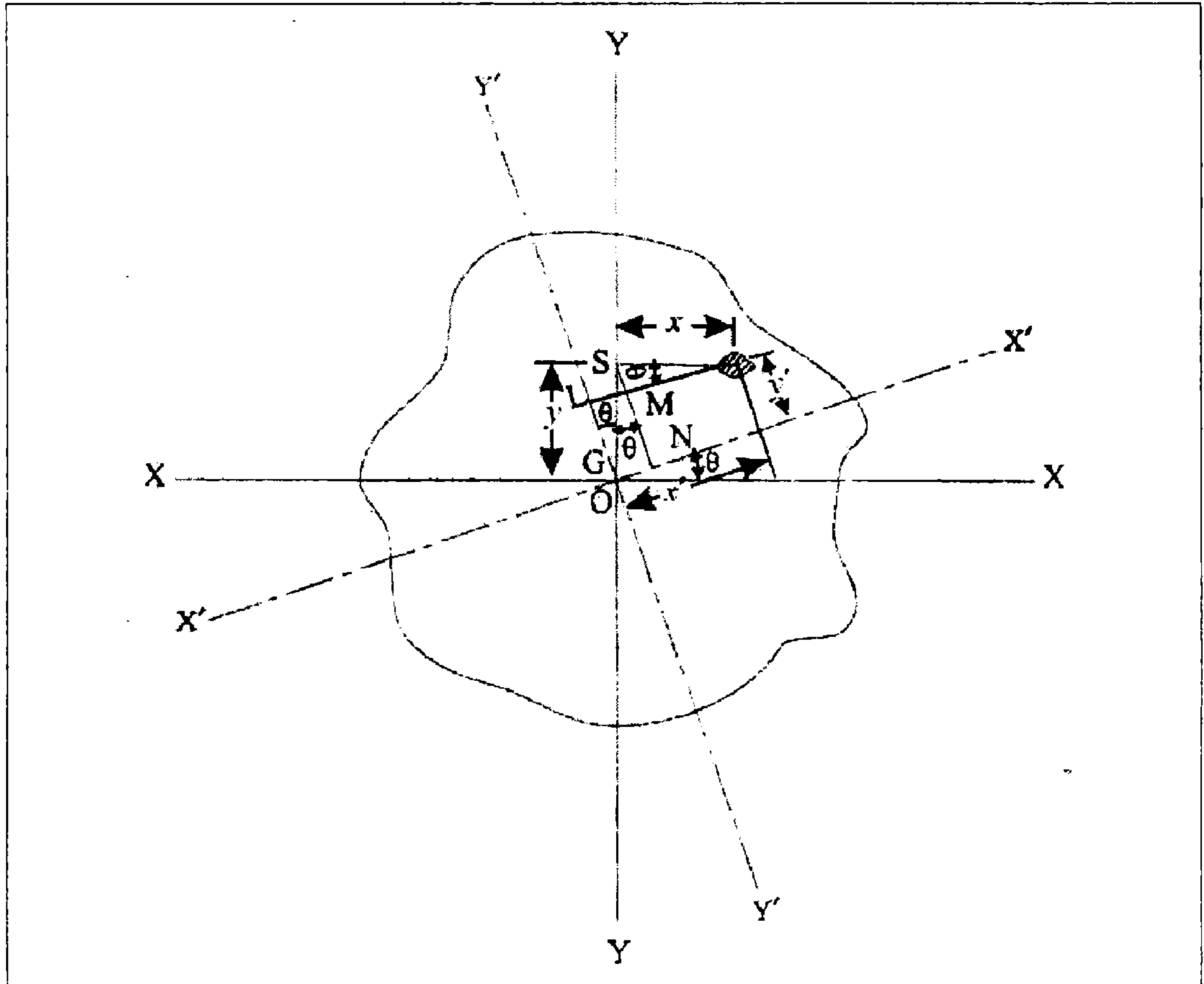
هذه العلاقة عبارة عن صيغة النقل أو التحويل الخاصة بمنتج القصور الذاتي.

٣-١٦-٢ المحاور الأساسية وعزوم القصور الذاتي الأساسية

لو أن المحاور التي حولها يتم إيجاد منتج القصور الذاتي، موضوعة بحيث يصبح منتج القصور الذاتي صفرًا، في هذه الحالة تُعرف هذه المحاور بالمحاور الأساسية. وفي هذا الصدد نقول أن عزم القصور الذاتي حول أي محور أساسي يسمى عزم القصور الذاتي الأساسي.

٣-١٦-٢-١ تحديد كل من عزوم القصور الذاتي الأساسية واتجاهات المحاور الأساسية

انظر الشكل التالي:



لنجعل كل من XX وYY عبارة عن المحاور التي تمر عبر مركز الثقل O للمقطع العرضي ولنجعل أيضًا كل من X'X' وY'Y' عبارة عن المحاور التي تميل بزاوية θ على المحاور XX وYY. لنفترض أن dA عبارة عن مساحة صغيرة تكون إحداثياتها عبارة عن (x,y) بالنسبة للمحاور XX وYY وتكون (x',y') بالنسبة للمحاور X'X' وY'Y'. ولنجعل الزاوية XOX' = θ. والآن:

$$x' = LM + x\cos\theta = ON + x\cos\theta = y\sin\theta + x\cos\theta$$
$$y' = OL = MN = SN - SM = y\cos\theta - x\sin\theta$$

والآن:

$$I_{X'Y'} = \int x'\ y'\ dA$$
$$I_{X'Y'} = \int (x\cos\theta + y\sin\theta)\ (y\cos\theta - x\sin\theta)\ dA$$
$$I_{X'Y'} = \int (xy\cos^2\theta - x^2\sin\theta\cos\theta + y^2\sin\theta\cos\theta - xy\sin^2\theta)\ dA$$
$$I_{X'Y'} = \int xy\ (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\ dA - \int x^2\frac{\sin 2\theta}{2}\ dA + \int y^2\frac{\sin 2\theta}{2}\ dA$$
$$I_{X'Y'} = \cos 2\theta \int xy\ dA - \frac{\sin 2\theta}{2}\left[\int x^2\ dA - \int y^2\ dA\right]$$
$$I_{X\Upsilon'} = I_{XY}\cos 2\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\ (I_{YY} - I_{XX})$$

إذن:

$I_{X\Upsilon'} = I_{XY}\cos 2\theta - \dfrac{I_{YY} - I_{XX}}{2}\sin 2\theta$	**(3-35)**

هذه هي المعادلة العامة التي من خلالها يتم إيجاد منتج القصور الذاتي حول أي محورين متعامدين على بعضهما البعض لو أن عزوم القصور الذاتي ومنتج القصور الذاتي حول محاورين آخرين متعامدين معلومة.

عندما ($I_{X'Y'}=0$)، حينئذ ستصبح المحاور X'X' وY'Y' المحاور الأساسية. وفي ضوء هذا الشرط، نحصل على العلاقة التالية من المعادلة رقم (٣-٣٥).

$\tan 2\theta = \dfrac{2I_{XY}}{I_{YY} - I_{XX}}$	**(3-36)**

هذه المعادلة (رقم ٣-٣٦) تحدد اتجاه المحاور الأساسية عن طريق إعطاء قيمتين للزاوية (θ) الفرق بينهما ٩٠ درجة. والآن:

$$I_{X\chi'} = \int y'^2\ dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\ dA$$
$$I_{X\chi'} = \int (y^2\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta - 2\ xy\sin\theta\cos\theta)\ dA$$
$$I_{X\chi'} = I_{XX}\cos^2\theta + I_{YY}\sin^2\theta - I_{XY}\sin 2\theta$$

$$I_{X'X'} = I_{XX}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + I_{YY}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) - I_{XY}\sin 2\theta$$

إذن:

$I_{X'X'} = \frac{I_{YY}+I_{XX}}{2} - \frac{I_{YY}-I_{XX}}{2}\cos 2\theta - I_{XY}\sin 2\theta$	**(3-37)**

وبالمثل، أو عن طريق تغيير θ إلى (θ+π/2) في المعادلة رقم (٣-٣٧)، نحصل على الآتي:

$I_{Y'Y'} = \frac{I_{YY}+I_{XX}}{2} + \frac{I_{YY}-I_{XX}}{2}\cos 2\theta + I_{XY}\sin 2\theta$	**(3-38)**

بتفاضل المعادلة رقم (٣-٣٧) (أو المعادلة رقم (٣-٣٨)) بالنسبة لـ θ وبوضع $\frac{d\ I_{X'X'}}{d\theta} = 0$ ، نحصل على الشرط الخاص بالحدود الدنيا والقصوى لعزوم القصور الذاتي.

هذا الشرط يتمثل في المعادلة التالية:

$\tan 2\theta = \frac{2I_{XY}}{I_{YY}-I_{XX}}$	**(3-39)**

المعادلة رقم (٣-٣٩) هي نفس المعادلة رقم (٣-٣٦). وهذا يعني أن محاور عزوم القصور الذاتي القصوى والدنيا هي نفسها المحاور الأساسية. ومن ثم، المحاور X'X' وY'Y' تصبح محاور أساسية لو أن θ أُعطيت من خلال المعادلة رقم (٣-٣٦) أو المعادلة رقم (٣-٣٩).

والآن، لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
UU	المحور الأساسي الأكبر.
VV	المحور الأساسي الأصغر.
I_{UU}	عزم القصور الذاتي الأقصى.
I_{VV}	عزم القصور الذاتي الأدنى.

قيم كل من (I_{UU}) و(I_{VV}) يتم حسابها من خلال المعادلات التالية:

$I_{UU} = \left[\frac{I_{YY}+I_{XX}}{2}\right] + \sqrt{\left[\frac{I_{YY}-I_{XX}}{2}\right]^2 + (I_{XY})^2}$	**(3-40)**
$I_{VV} = \left[\frac{I_{YY}+I_{XX}}{2}\right] - \sqrt{\left[\frac{I_{YY}-I_{XX}}{2}\right]^2 + (I_{XY})^2}$	**(3-41)**

يمكن استخدام كل من المعادلة رقم (٣-٤٠) والمعادلة رقم (٣-٤١) لإيجاد قيم كل من (I_{UU}) و(I_{VV}) في حين أن المعادلة رقم (٣-٣٦) سوف تعطي ميل المحاور الأساسية.

بجمع المعادلتين (٣-٤٠) و(٣-٤١) معًا، نحصل على العلاقة التالية:

$I_{UU} + I_{VV} = I_{XX} + I_{YY}$	**(3-42)**

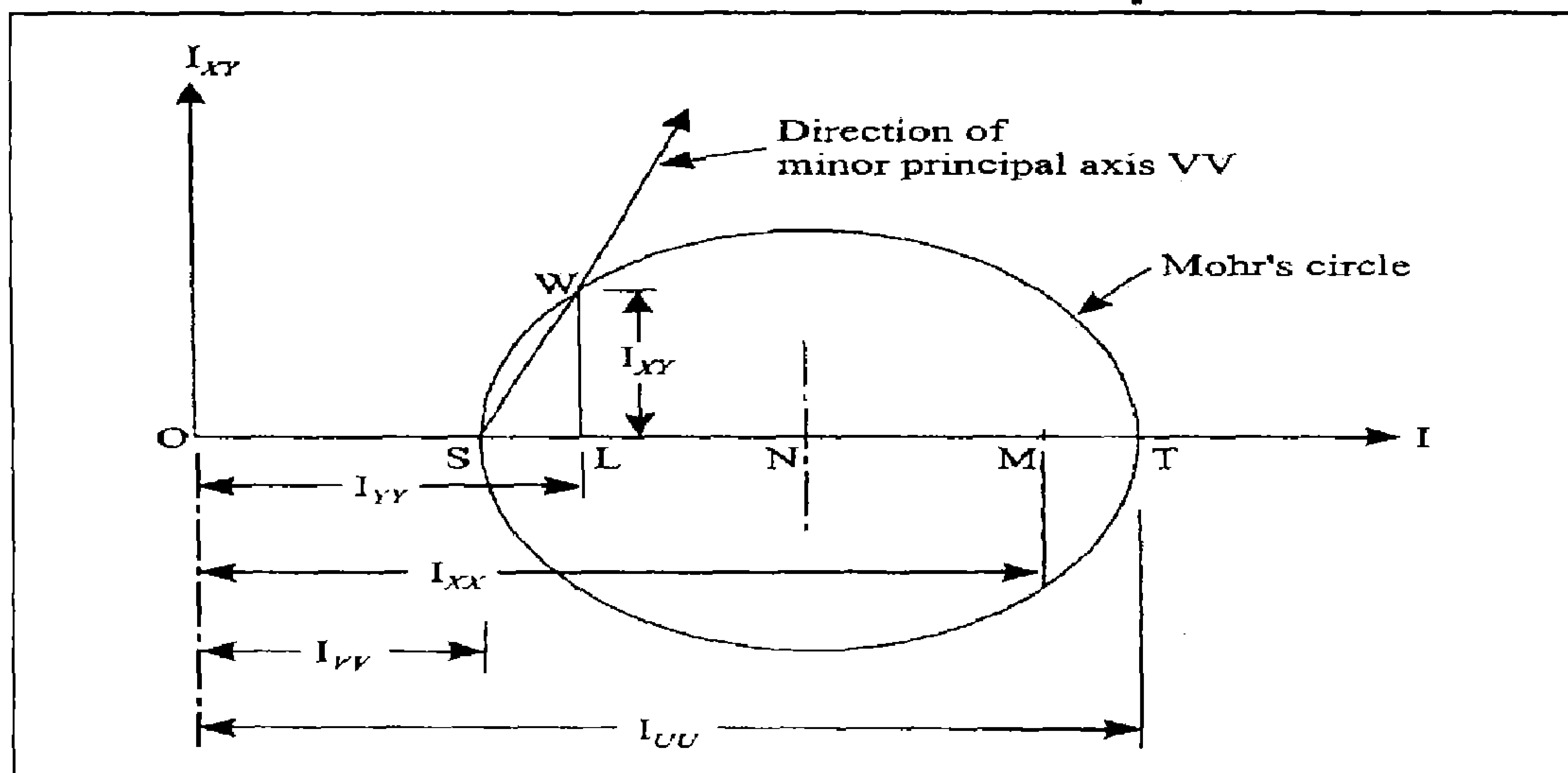
وبجمع المعادلتين (٣-٣٧) و(٣-٣٨) معًا، نحصل على العلاقة التالية:

$I_{X'Y'} + I_{Y'Y'} = I_{XX} + I_{YY}$	**(3-43)**

ومن ثم، في ضوء المعادلتين رقم (٣-٤١) ورقم (٣-٤٢) يتضح أن مجموع عزوم القصور الذاتي حول أي محورين متعامدين يظل ثابتًا.

٣-١٦-٢-٢ دائرة مور لعزوم القص الأساسية

انظر الشكل التالي:



يمكن رسم دائرة مور من خلال الخطوات التالية:

(١) خذ O نقطة الأصل ومنها قس ($OL=I_{YY}$) و($OM=I_{XX}$) عبر محور I الأفقي.

(٢) عند L ارسم عمود LW لأعلى ويساوي (I_{XY}) لو أن (I_{XY}) موجبًا (أو عمود لأسفل لو أن (I_{XY}) سالبًا).

(٣) نصف LM عند N.

(٤) مع كون N المركز وNW نصف القطر، ارسم دائرة لتقطع OL وOM في S وT على الترتيب.

حينئذ، يعطي OS قيمة (I_{VV}) ويعطي OT قيمة (I_{UU}).

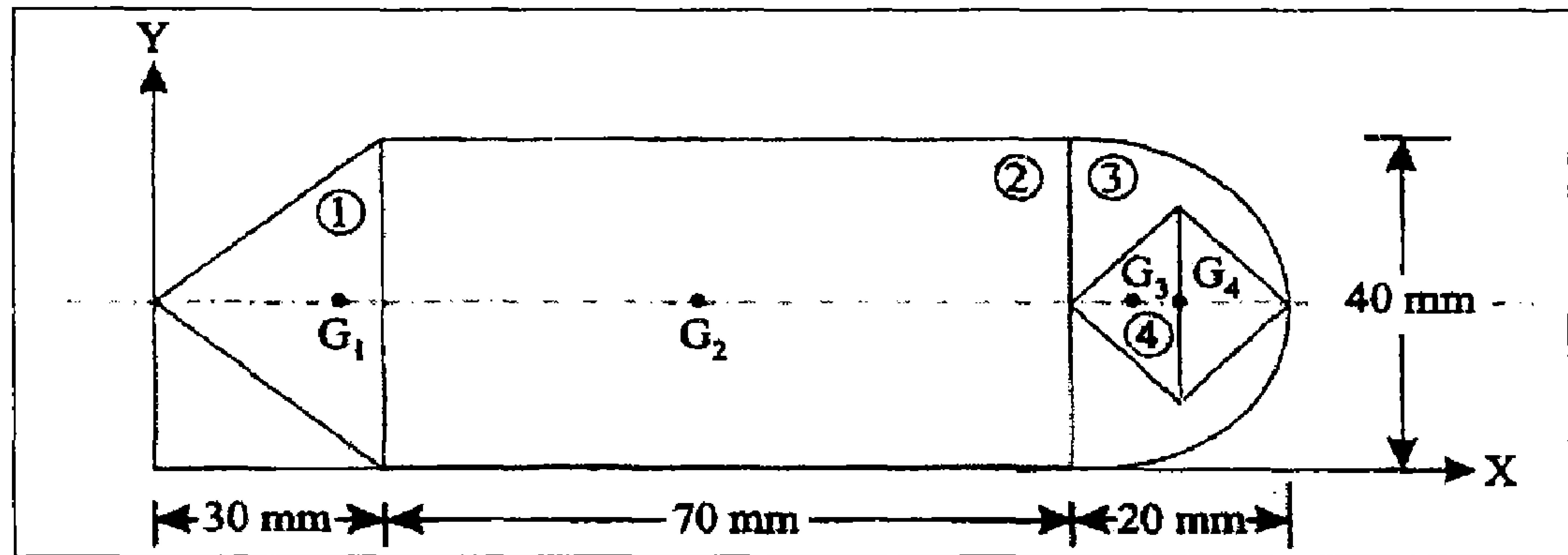
اتجاه SW يعطي اتجاه المحور الأساسي الأصغر والاتجاه العمودي عليه، يكون اتجاه المحور الأساسي الأكبر.

ملاحظة	لاحظ أن كل من (I_{XX}) و(I_{YY}) يكونان موجبًا دائمًا.

٣-١٧ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

حدد عزم القصور الذاتي لل **planar area** الموضحة في الشكل التالي حول المحورين **X, Y**.



الحل

$$a_1 = \frac{1}{2} \times 40 \times 30 = 600 \text{ mm}^2$$

$$a_2 = 70 \times 40 = 2800 \text{ mm}^2$$

$$a_3 = \frac{\pi \times 20^2}{2} = 628.3 \text{ mm}^2$$

$$a_4 = 2 \times \frac{1}{2} \times 20 \times 10 = 200 \text{ mm}^2$$

(i) عزم القصور الذاتي حول محور **X**:

$$I_{XX} = \left[2 \times \left(\frac{30 \times 20^3}{12}\right) + 600 \times 20^2\right] + \left[\frac{70 \times 40^3}{12} + 2800 \times 20^2\right] + \left[\frac{\pi \times 40^4}{2 \times 64} + 628.3 \times 20^2\right] - \left[2 \times \left(\frac{20 \times 10^3}{12}\right) + 200 \times 20^2\right]$$

$$I_{XX} = 10^4\,[(4 + 24) + (37.33 + 112) + (6.283 + 25.132) - (0.383 + 8)]$$

$$I_{XX} = \mathbf{200.412 \times 10^4 \text{ mm}^4 \text{ (Ans.)}}$$

(**ii**) عزم القصور الذاتي حول محور Y:

$$I_{YY} = \left[\frac{40 \times 30^3}{36} + 600 \times \left(\frac{2}{3} \times 30\right)^2\right] + \left[\frac{40 \times 70^3}{12} + 2800 \times \left(30 + \frac{70}{2}\right)^2\right]$$

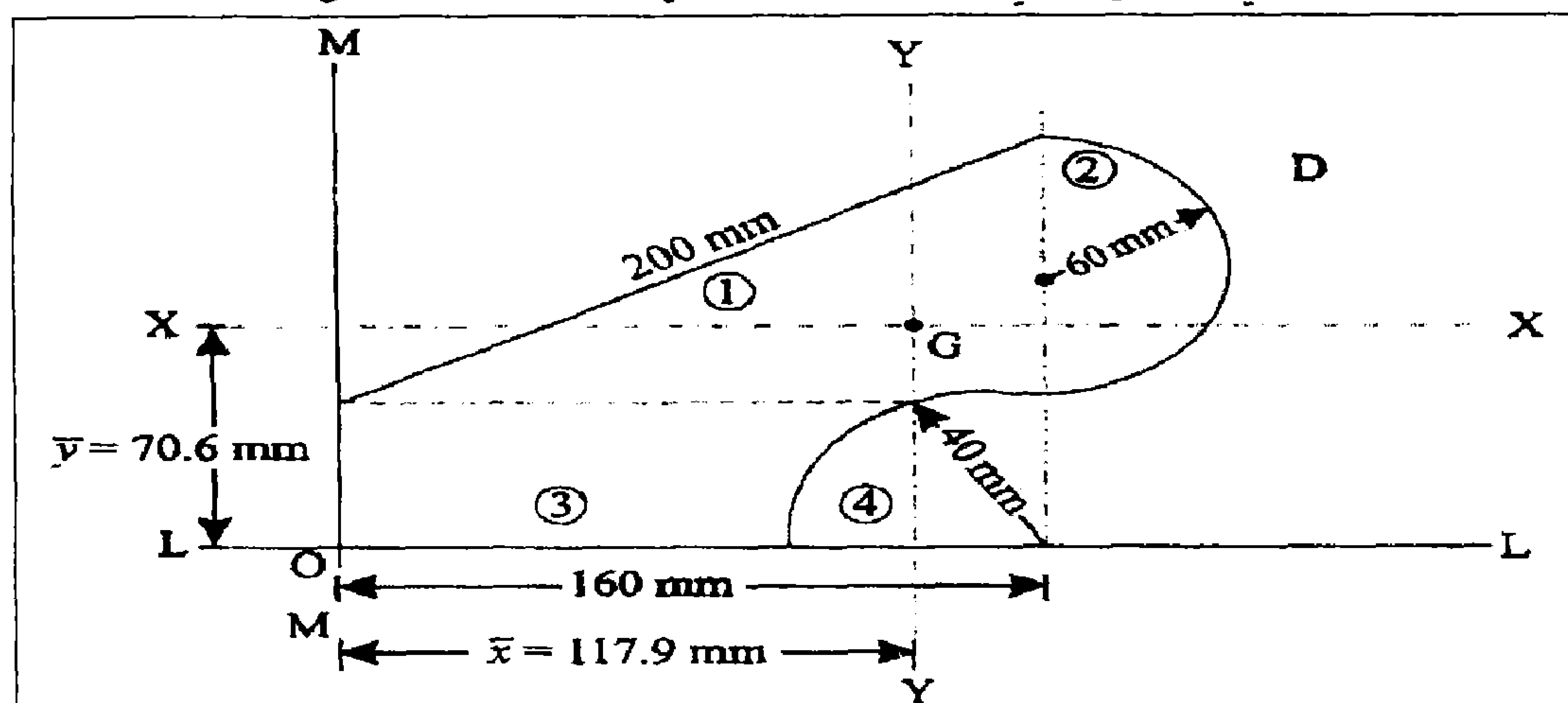
$$+\left[0.11 \times 20^4 + 628.3 \times \left(30 + 70 + \frac{4 \times 20}{3\pi}\right)^2\right] - \left[2 \times \left(\frac{20 \times 10^3}{12}\right) + 200 \times (30 + 70 + 10)^2\right]$$

$I_{YY} = 10^4[(3 + 24)] + [(114.33 + 1183)] + [(1.76 + 739.49)] - [0.333 + 242]$

$\boldsymbol{I_{YY} = 1823.25 \times 10^4}$ **mm² (Ans.)**

المثال رقم (٢)

أوجد كل من مركز الثقل وعزم القصور الذاتي للمساحة المستوية **planar area** الموضحة في الشكل التالي، حول محورها الذي يمر عبر مركز الثقل.



الحل

لتحديد موضع مركز ثقل المساحة يمكن الاستعانة بالجدول التالي:

المكونات	المساحة (a) (مم٢)	المسافة الثقلية "x" من الـ MM (مم)	المسافة الثقلية "y" من الـ LL (مم)	ax (مم٣)	ay (مم٣)
المثلث (١)	١٦٠×٠.٥ =١٢٠× ٩٦٠٠	(٢/٣)× =١٦٠ ١٠٦.٦٧	/١٢٠+٤٠ ٨٠=٣	١٠٢٤٠٣٢	٧٦٨٠٠٠

شبة الدائرة (٢)	π×٦٠^(٢)/٢ =٥٦٥٥	١٦٠+٤×٦٠/(π×٣)= ١٨٥.٥	٤٠+٦٠= ١٠٠	١٠٤٩٠٠٢	٥٦٥٥٠٠
المستطيل (٣)	١٦٠×٤٠= ٦٤٠٠	١٦٠/٢= ٨٠	٤٠/٢=٢٠	٥١٢٠٠٠	١٢٨٠٠٠
الربع (٤)	(π×٤٠^(٢)/٤ =١٢٥٦.٦) (−)	١٦٠− ٤×٤٠/(٣×π)= ١٤٣	٤×٤٠/(٣×π)= ١٦.٩٧	(١٧٩٦٩٤ −)	(−)٢١٣٢٥
المجموع	$\Sigma a = 20398.4$			$\Sigma ax = 2405340$	$\Sigma ay = 1440175$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma ax}{\Sigma a} = \frac{2405340}{20398.4} \simeq 117.9 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma ay}{\Sigma a} = \frac{1440175}{20398.4} = 70.6 \text{ mm}$$

عزم القصور الذاتي المحور XX:

$$I_{XX} = I_{XX_1} + I_{XX_2} + I_{XX_3} - I_{XX_4}$$

$$I_{XX} = \left[\frac{160 \times 120^3}{36} + 9600 \times (80 - 70.6)^2\right] + \left[\frac{\pi \times 120^4}{2 \times 64} + 5655 \times (100 - 70.6)^2\right]$$

$$+ \left[\frac{160 \times 40^3}{12} + 6400 \times (70.6 - 20)^2\right] - [0.055 \times 40^4 + 1256.6(70.6 - 16.97)^3]$$

$$I_{XX} = 10^6 [(7.68 + 0.848) + (5.089 + 4.868) + (0.853 + 16.386) - (0.141 + 3.614)]$$

ومن ثم:

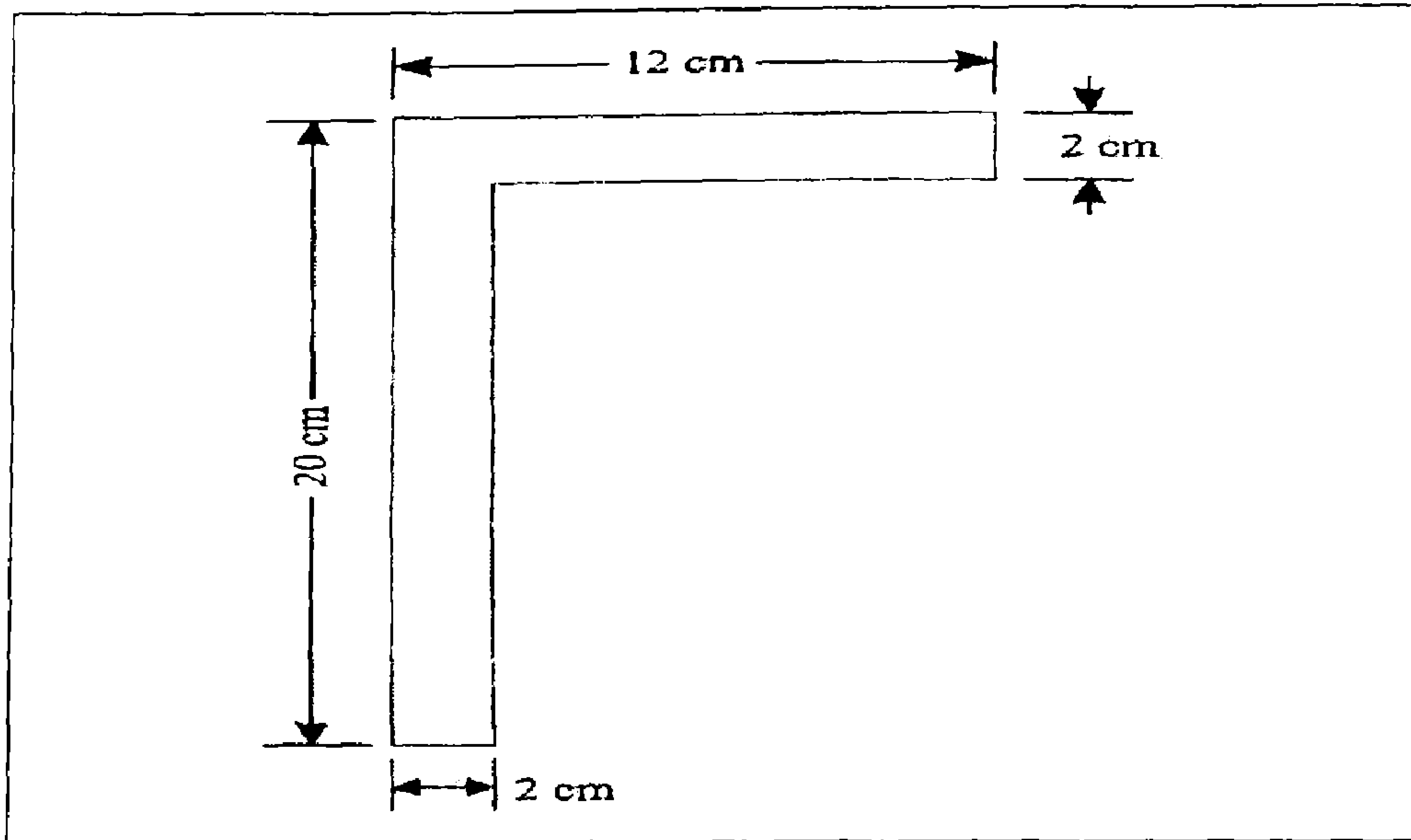
$$I_{XX} = 31.969 \times 10^6 \text{ mm}^2 \quad \text{(Ans.)}$$

المثال رقم (٣)

أوجد عزوم القصور الذاتي الأساسية واتجاهات المحاور الأساسية بالنسبة للمقطع الزاوية الموضح في الشكل التالي عن طريق:

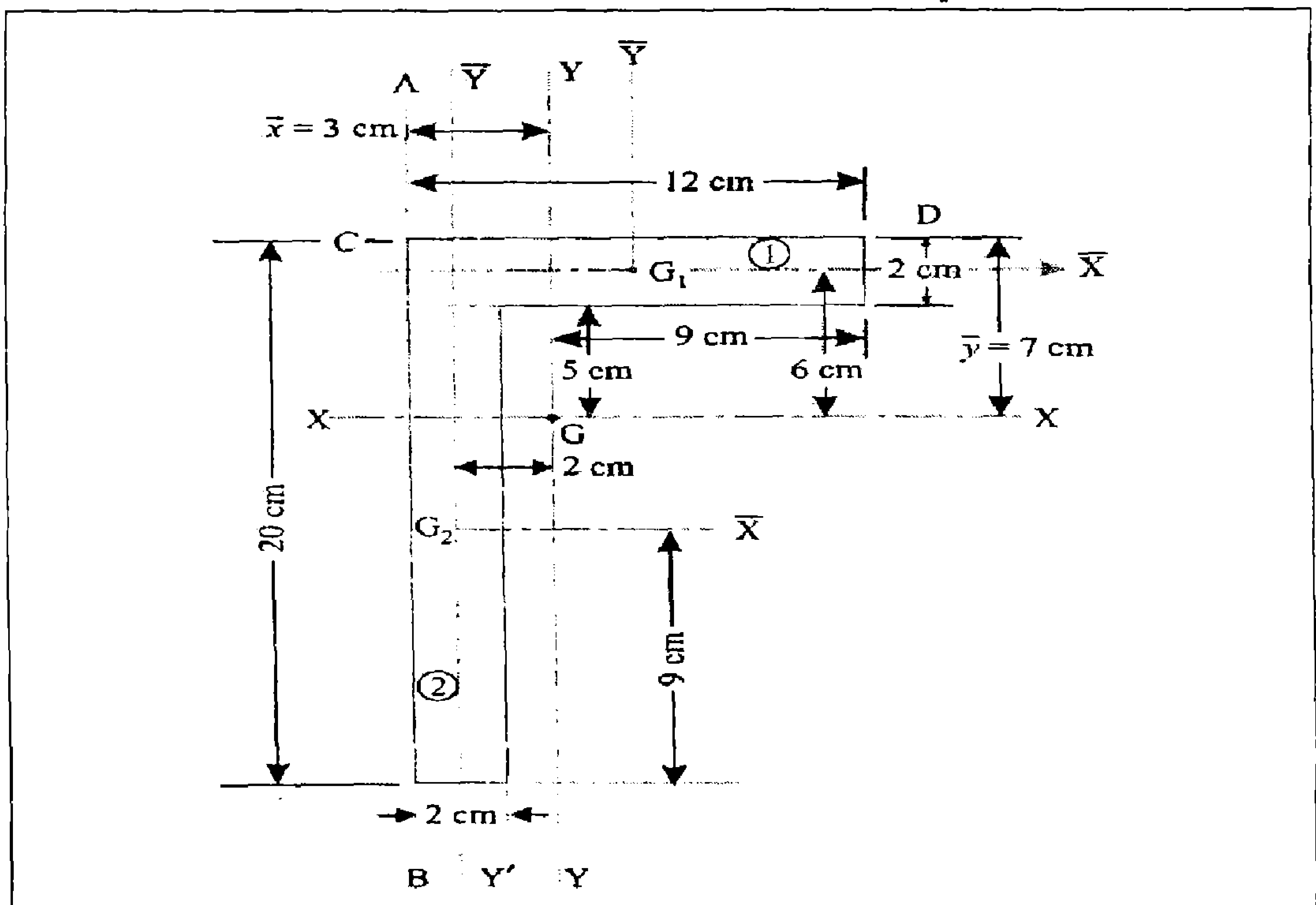
(i) الحسابات.

(ii) تكوين دائرة مور.



الحل

انظر الشكل التالي:



(i) الحل عن طريق الحسابات:

المساحة (a_1) = ١٢ × ٢ = ٢٤ سم٢.

المساحة (a_2) = ١٨ × ٢ = ٣٦ سم٢.

من AB نجد أن (x_1) = ٦ سم و(x_2) = ١ سم.

ومن CD نجد أن (y_1) = ١ سم و(y_2) = ١٨/٢ + ٢ = ١١ سم. إذن:

$$\bar{x} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2} = \frac{24 \times 6 + 36 \times 1}{24 + 36} = 3 \text{ cm}$$

كما أن:

$$y = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2} = \frac{24 \times 1 + 36 \times 11}{24 + 36} = 7 \text{ cm}$$

عزم القصور الذاتي حول محور X:

$$I_{XX} = \left[\frac{12 \times 2^3}{12} + 12 \times 2 \times (7-1)^2\right] + \left[\frac{2 \times 18^3}{12} + 2 \times 18 \times (11-7)^2\right]$$

$$I_{XX} = 872 + 1548 = 2420 \text{ cm}^4$$

عزم القصور الذاتي حول محور Y:

$$I_{YY} = \left[\frac{2 \times 12^3}{12} + 2 \times 12 \times (6-3)^2\right] + \left[\frac{18 \times 2^3}{12} + 18 \times 2 \times (3-1)^2\right]$$

$$I_{YY} = 504 + 156 = 660 \text{ cm}^4$$

منتج القصور الذاتي (I_{XY}):

يتم حساب (I_{XY}) بالنسبة للمستطيل رقم (١) كالآتي:

$$= I_{\bar{X}\bar{Y}} + A\,ab = 0 + (12 \times 2) \times 3 \times 6 = 432 \text{ cm}^4$$

كذلك، يتم حساب (I_{XY}) بالنسبة للمستطيل رقم (٢) كالآتي:

$$= I_{\bar{X}\bar{Y}} + A\,ab = 0 + (18 \times 2)(-2)(-4) = 288 \text{ cm}^4$$

إذن الـ (I_{XY}) الكلي = (I_{XY}) بالنسبة للمستطيل رقم (١) + (I_{XY}) بالنسبة للمستطيل رقم (٢) = ٤٣٢ + ٢٨٨ = ٧٢٠ سم٤.

اتجاهات المحاور الأساسية:

$$\tan 2\theta = \frac{2 I_{XY}}{I_{YY} - I_{XX}} = \frac{2 \times 720}{660 - 2420} = -0.818$$

$$\text{or} \quad 2\theta = -39.3° \quad \text{or} \quad (180 - 39.3°)$$

$$\therefore \quad \theta = -19.7° \quad \text{or} \quad 70.3°$$

عزوم القصور الذاتي الأساسية:

عزم القصور الذاتي الأساسي الأكبر:

$$I_{UU} = \left[\frac{I_{YY} + I_{XX}}{2}\right] + \sqrt{\left[\frac{I_{YY} - I_{XX}}{2}\right]^2 + I_{XY}^2}$$

$$I_{UU} = \left[\frac{660 + 2420}{2}\right] + \sqrt{\left[\frac{660 - 2420}{2}\right]^2 + (720)^2}$$

$I_{UU} = 1540 + 1137 = \mathbf{2677\ cm^4}$ **(Ans.)**

عزم القصور الذاتي الأساسي الأصغر:

$$I_{VV} = \left[\frac{I_{YY} + I_{XX}}{2}\right] - \sqrt{\left[\frac{I_{YY} - I_{XX}}{2}\right]^2 + I_{XY}^2}$$

$$I_{VV} = \left[\frac{660 + 2420}{2}\right] - \sqrt{\left[\frac{660 - 2420}{2}\right]^2 + (720)^2}$$

$I_{VV} = 1540 - 1137 = \mathbf{403\ cm^4}$

لمعرفة زاوية ميل المحور UU أو المحور VV، نضع (θ) = -١٩.٧ درجة في المعادلة العامة الخاصة بمنتج القصور الذاتي (المعادلة رقم (٣-٣٧)).

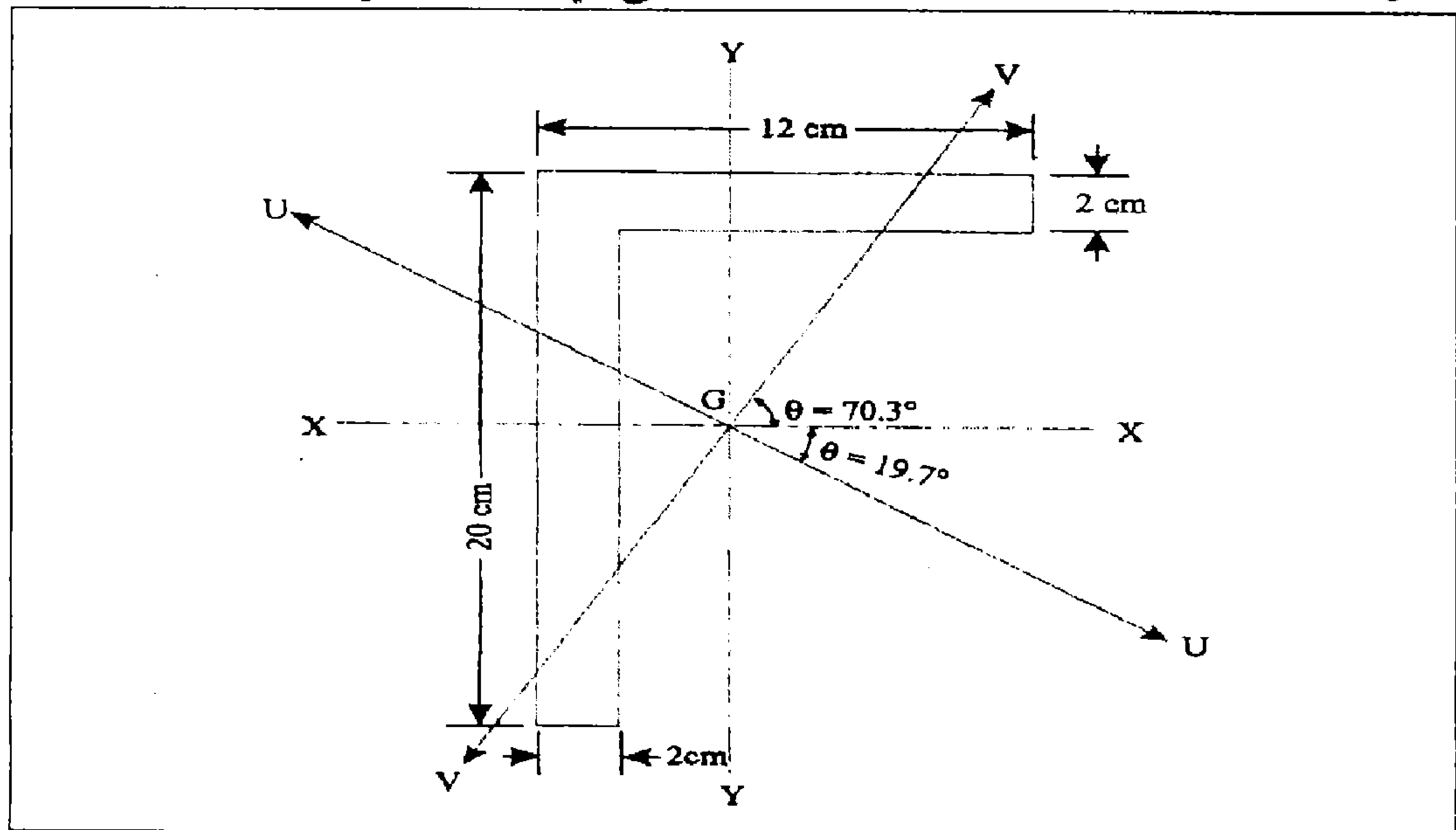
$$I_{X'X'} = \frac{I_{YY} + I_{XX}}{2} - \frac{I_{YY} - I_{XX}}{2} \cos 2\theta - I_{XY} \sin 2\theta$$

$$I_{X'X'} = \left(\frac{660 + 2420}{2}\right) - \left(\frac{660 - 2420}{2}\right) \cos (2 \times -19.7°) - 720 \sin (2 \times -19.7°)$$

$I_{X'X'} = 1540 + 680 + 457 = 2677\ cm^4$

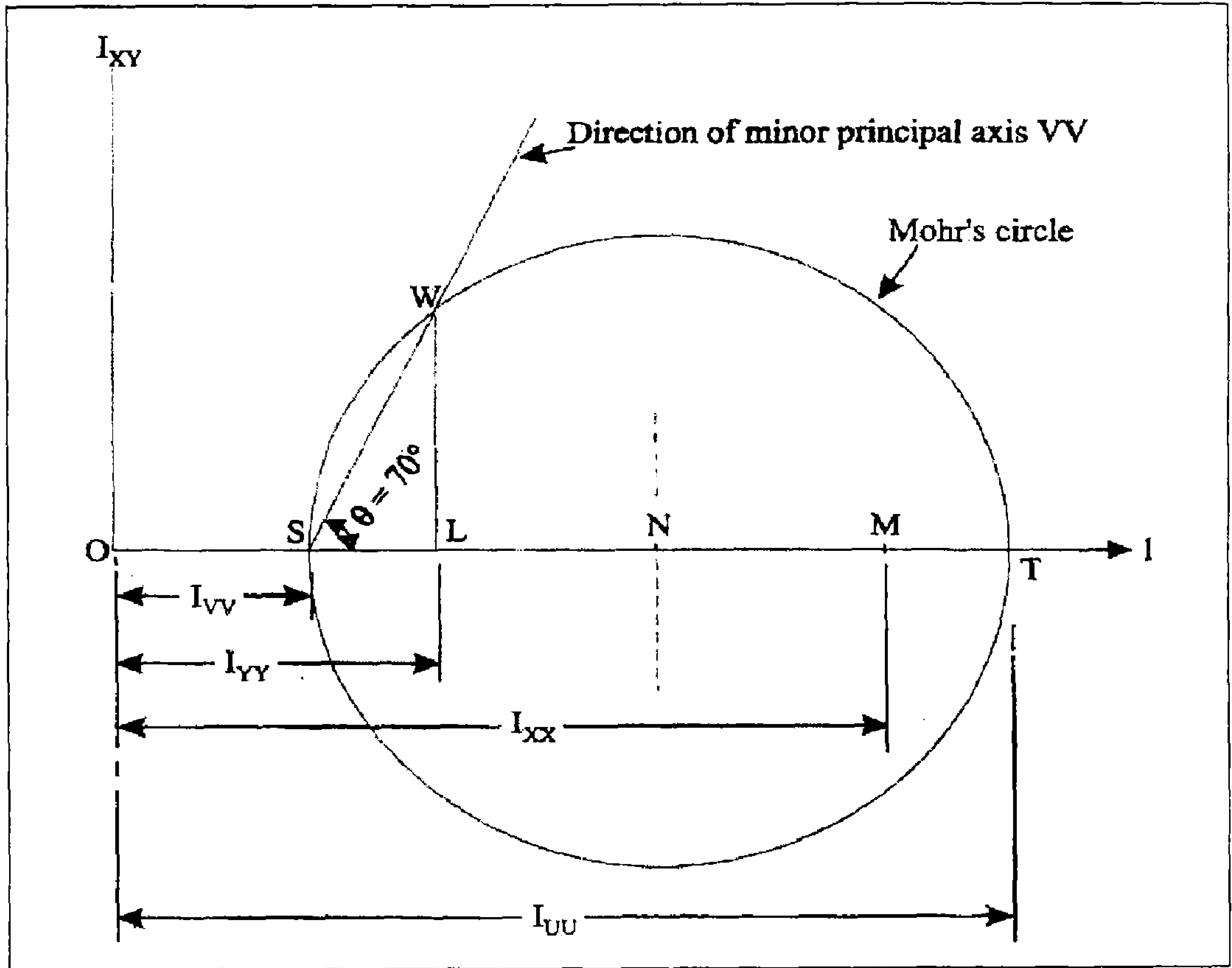
$I_{X'X'}$ = عزم القصور الذاتي الأساسي الأكبر.

إذن، المحور UU يميل بزاوية قدرها -١٩.٧ درجة على محور X كما أن المحور VV يميل بزاوية ٧٠.٣ درجة على محور X، كما هو موضح في الشكل التالي:



*(ii) الحل عن طريق تكوين دائرة **Mohr***

انظر الشكل التالي:



فيما يلي خطوات تكوين دائرة Mohr:

(١) خذ O هي نقطة الأصل ومنها قس $OL = I_{YY} = 660\ cm^4$ (بناءًا على مقياس رسم مناسب) وقس $OM = I_{XX} = 2420\ cm^4$ عبر المحور I الأفقي.

(٢) عند L ارسم العمود LW لأعلى بحيث أن $LW = I_{XY} = 720\ \text{cm}^4$ (حيث أن (I_{XY}) موجبة الإشارة).

(٣) نصف LM عند N.

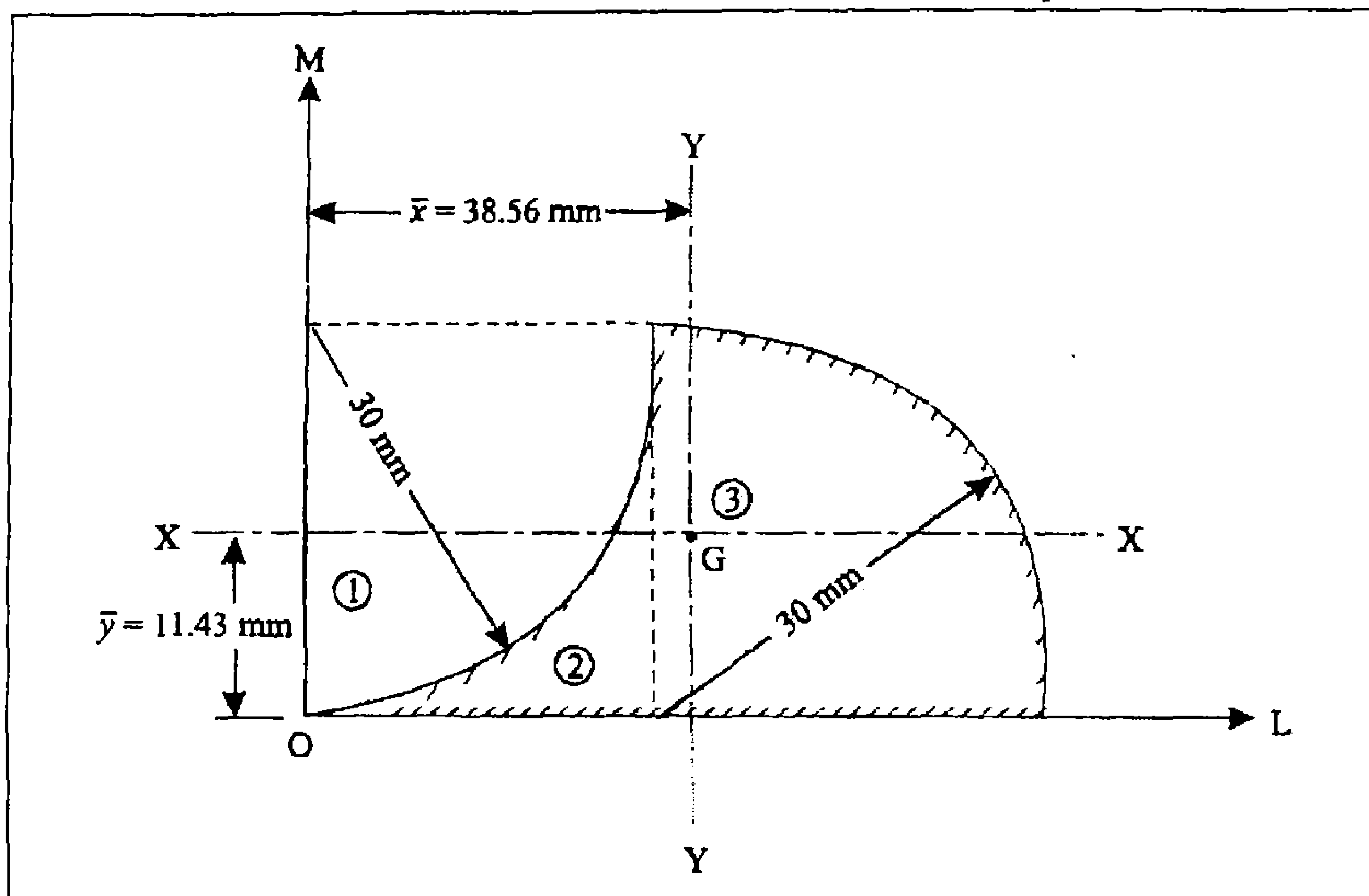
(٤) مع جعل N المركز وNW نصف القطر، ارسم دائرة تقطع امتداد كل من OL وOM في S وT على الترتيب.

إذن، $OT = I_{UU} = 2677\ \text{cm}^4$, and $OS = I_{VV} = 403\ \text{cm}^4$

المحور الأساسي الأصغر يميل براوية ٧٠ درجة.

المثال رقم (٤)

انظر الشكل التالي:



(i) من خلال المنطقة المظللة بالشكل التوضيحي، حدد مركز الثقل بالنسبة لكل من C وOM.

(ii) حدد عزم القصور الذاتي للمساحة حول المحور الأفقي المار عبر مركز الثقل.

الحل

(i) مركز ثقل المنطقة:

من أجل تحديد موضع مركز ثقل المنطقة المظللة، لدينا الجدول التالي:

Components	*Area 'a' (mm²)*	*Centroidal distance 'x' from OM (mm)*	*Centroidal distance 'y' from OL (mm)*	*ax (mm³)*	*ay (mm³)*
Quarter circle (1)	$\frac{\pi \times 30^2}{4}$ =706.85 (–)	$\frac{4 \times 30}{3\pi} = 12.73$	$30 - \frac{4 \times 30}{3\pi}$ = 17.27	8998.2 (–)	12207.3 (–)
Square (2)	30 × 30 = 900 (+)	$\frac{30}{2} = 15$	$\frac{30}{2} = 15$	13500	13500 (+)
Quarter circle (3)	$\frac{\pi \times 30^2}{4}$ = 706.85 (+)	$30 + \frac{4 \times 30}{3\pi}$ = 42.73	$\frac{4 \times 30}{3\pi} = 12.73$	30203.7	8998.2 (+)
	Σ a = 900	–	–	Σ ax = 34705.5	Σ ay = 10290.9

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, ax}{\Sigma\, a} = \frac{34705.5}{900} = \mathbf{38.56\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, ay}{\Sigma\, a} = \frac{10290.9}{900} = \mathbf{11.43\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

(ii) *عزم القصور الذاتي حول المحور* ***XX***:

يتم حساب عزم القصور الذاتي (I_{XX}) حول محور XX من خلال العلاقة التالية:

$$I_{XX} = -I_{XX_1} + I_{XX_2} + I_{XX_3}$$

حيث أن:

$$I_{XX_1} = \left[0.055 \times 30^4 + \frac{\pi \times 30^2}{4} \times \left(18.57 - \frac{4 \times 30}{3\pi}\right)^2\right]$$

$$I_{XX_2} = \left[\frac{30 \times (30)^3}{12} + 30 \times 30 \times (15 - 11.43)^2\right]$$

$$I_{XX_3} = \left[0.055 \times 30^4 + \frac{\pi \times 30^2}{4} \times \left(\frac{4 \times 30}{3\pi} - 11.43\right)^2\right]$$

إذن:

$$I_{XX} = -[44550 + 24091] + [67500 + 11470] + [44550 + 1198]$$

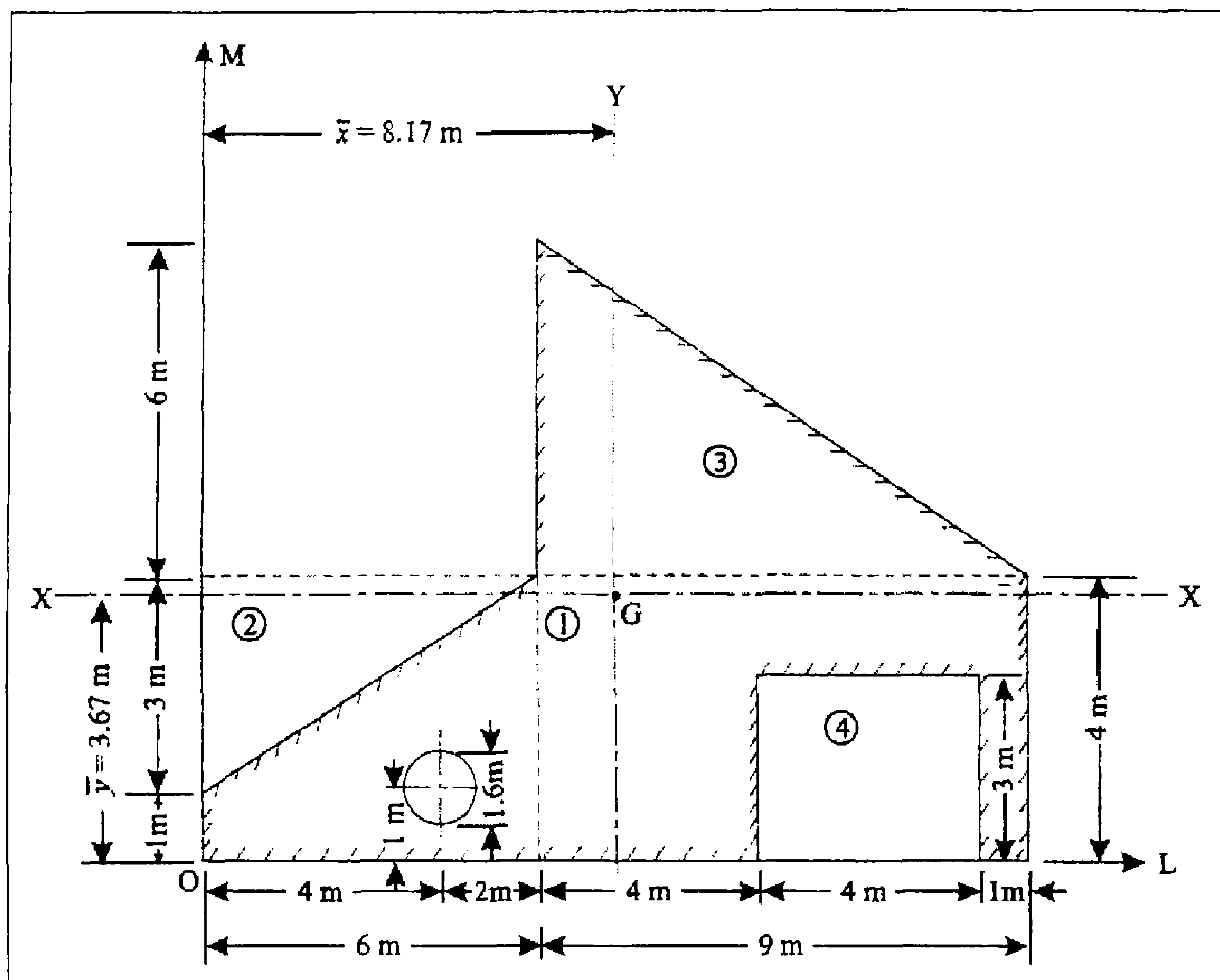
$$I_{XX} = -68641 + 78970 + 45748 = \mathbf{56077\ mm^4} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٥)

لدينا طبقة مستوية متعددة الأضلاع ومنها تم استقطاع دائرة قطرها ١.٦ متر ومستطيل أبعاده ٤ متر × ٣ متر كما هو موضح في الشكل التوضيحي الخاص بهذا المثال. حدد موضع مركز الثقل للمتبقي من الطبقة وأوجد العزم الثاني لمساحتها حول المحور المار بمركز الثقل ويوازي القاعدة.

الحل

انظر الشكل التالي:



(i) مركز ثقل الطبقة المتعددة الأضلاع:

من أجل تحديد موضع مركز الثقل للطبقة المتعددة الأضلاع الموضحة في الشكل السابق، سوف نستعين بالجدول التالي:

Components	*Area 'a' (mm²)*	*Centroidal distance 'x' from OM (mm)*	*Centroidal distance 'y' from OL (mm)*	*ax (mm³)*	*ay (mm³)*
Rectangle (1)	$15 \times 4 = 60$	$\frac{15}{2} = 7.5$	$\frac{4}{2} = 2$	450	120
Triangle (2)	$\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ (–)	$\frac{6}{3} = 2$	$1 + \frac{2}{3} \times 3 = 3$	18 (–)	27 (–)
Triangle (3)	$\frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27$	$6 + \frac{9}{3} = 9$	$4 + \frac{6}{3} = 6$	243	162
Rectangle (4)	$4 \times 3 = 12$ (–)	$10 + \frac{4}{2} = 12$	$\frac{3}{2} = 1.5$	144 (–)	18 (–)
Circle (5)	$\frac{\pi \times 1.6^2}{4} = 2.01$ (–)	4	1	8.04 (–)	2.01 (–1)
	$\Sigma a = 63.99$	–	–	$\Sigma ax = 522.96$	$\Sigma ay = 234.99$

إذن:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, ax}{\Sigma\, a} = \frac{522.96}{63.99} = \mathbf{8.17\ m} \quad \textbf{(Ans.)}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, ay}{\Sigma\, a} = \frac{234.99}{63.99} = \mathbf{3.67\ m} \quad \textbf{(Ans.)}$$

(ii) عزم القصور الذاتي (I_{XX}) حول محور XX:

يتم حساب عزم القصور الذاتي (I_{XX}) حول محور XX من خلال العلاقة التالية:

$$I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2} + I_{XX_3} - I_{XX_4} - I_{XX_5}$$

حيث أن:

$$I_{XX_1} = \left[\frac{15 \times 4^3}{12} + 15 \times 4 \times (3.67 - 2)^2\right]$$

$$I_{XX_2} = \left[\frac{6 \times 3^3}{36} + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times (3.67 - 3)^2\right]$$

$$I_{XX_3} = \left[\frac{9 \times 6^3}{36} + \frac{1}{2} \times 9 \times 6 \times (6 - 3.67)^2\right]$$

$$I_{XX_4} = \left[\frac{4 \times 3^3}{12} + 4 \times 3 \times (3.67 - 1.5)^2\right]$$

$$I_{XX_5} = \left[\frac{\pi \times (1.6)^4}{64} + \frac{\pi \times 1.6^2}{4} \times (3.67 - 1)^2\right]$$

إذن:

$$I_{XX} = (80 + 167.3) - (4.5 + 4.04) + (54 + 146.6) - (9 + 56.5) - (0.32 + 14.3)$$

$$I_{XX} = 247.3 - 8.54 + 200.6 - 65.5 - 14.62 = 359.24\ m^4$$

الفصل الرابع

عزوم الإنحناء وقوى القص

في هذا الفصل

- مقدمة عامة.
- بعض التعريفات الأساسية.
- تصنيف الكمرات.
- قوة القص **SF** وعزم الانحناء **BM**.
- الإشارات المستخدمة.
- الكابولي مع حمل عند الطرف الحر.
- الكابولي المحمل بحمل موزع بانتظام **UDL**.
- الكابولي المحمل بحمل موزع بانتظام **UDL** وحمل مركز في نقطة.
- الكابولي الحامل لحمل تتغير كثافته بانتظام من الصفر عند الطرف الحر إلى **w** لكل متر طولي عند الطرف المثبت.
- الكمرة البسيطة الارتكاز الحاملة لحمل مركز في منتصف البحر.
- الكمرة البسيطة الارتكاز الحاملة لحمل موزع بانتظام.
- العلاقة العامة بين الحمل، وقوة القص، وعزم الانحناء.
- الكمرة البسيطة الارتكاز الحاملة لحمل تتغير كثافته بانتظام من الصفر عند طرف إلى **w** لكل متر طولي عند الطرف الآخر.
- الكمرة البسيطة الارتكاز المشتملة على نتوءات متساوية وتحمل حمل موزع بانتظام **w** لكل متر طولي عبر الطول الكلي للكمرة.
- نقط الانقلاب.
- التحميل وديجرامات عزم الانحناء من ديجرامات قوة القص

٤-١ مقدمة عامة

أي منشأ عندما يكون محملاً، فإنه يتم تكوين مجموعة من الإجهادات في الأجزاء المختلفة من المنشأ، ومن أجل حساب هذه الإجهادات، حيث يكون المنشأ مرتكزًا على دعامات عند عدد من النقط، فإنه ينبغي أيضًا حساب عزوم الانحناء وقوى القص المؤثرة في المنشأ. وبصفة عامة، يمكن اعتبار أن أي منشأ يتألف من مجموعات من الكمرات المتصلة ببعضها البعض بطريقة ما، وأيضًا يمكن التعامل مع المنشأ بأكمله على إنه كمرة لها مقطع عرضي منمق elaborate cross-section. هذا، ويمكن إجراء العمليات الحسابية تدريجيًا على المنشأ ككل أولاً ثم على كل جزء على حدة بعد ذلك.

٤-٢ بعض التعريفات الأساسية

الكمرة beam

الكمرة عبارة عن عنصر إنشائي يتعامل مع نظام من الأحمال الخارجية المتعامدة على المحور.

الانحناء أو الانثناء Bending

يتضمن الإنحناء أو الانثناء حدوث تشوه لقضيب ما بسبب الأحمال المتعامدة على محوره بالإضافة إلى مزدوجات القوى المؤثرة في مستوى يمر عبر محور القضيب.

انثناء المستوى Plane bending

لو أن مستوى التحميل يمر عبر واحد من المحاور المركزية الأساسية الخاصة بالمقطع العرضي للكمرة، حينئذ يُقال على الانثناء أنه في المستوى (أو مباشر).

الانثناء المائل Oblique Bending

لو أن مستوى التحميل لا يمر عبر واحد من المحاور المركزية الأساسية للمقطع العرضي للكمرة، حينئذ يُقال على الانثناء أنه انثناء مائل.

حمل النقطة Point Load

حمل النقطة أو الحمل المركز هو الحمل الذي نعتبر أنه يؤثر عند نقطة واحدة. ولكن في الواقع الفعلي، يكون هذا الحمل موزعًا عبر مساحة صغيرة لأن مثل هذه الاتصالات الصغيرة الحادة الحواف لا تكون ممكنة بصفة عامة وبالتالي لا تُؤخذ في الاعتبار.

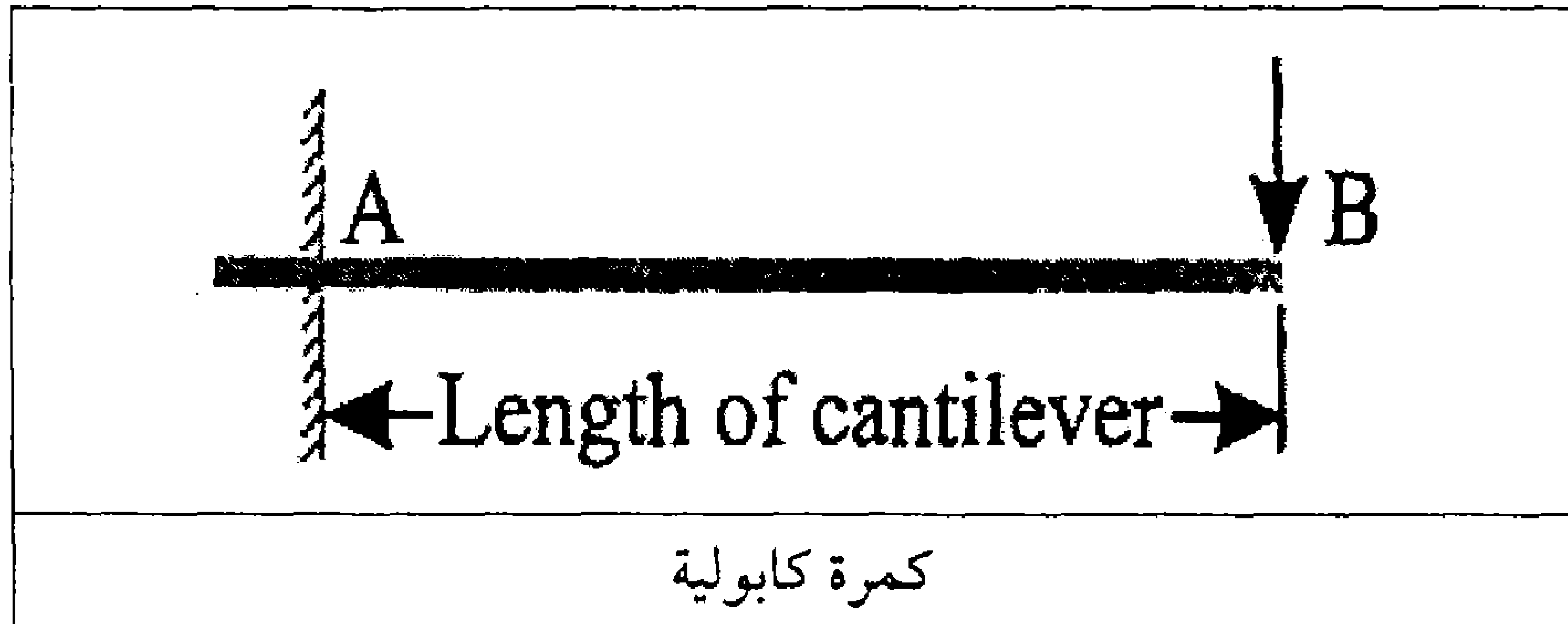
الحمل الموزع Distributed Load

الحمل الموزع هو ذلك الحمل الذي يكون موزعًا أو منشورًا بطريقةٍ ما عبر طول الكمرة. ولو أن النشر أو التوزيع كان منتظمًا (أي بمعدل منتظم، كأن يكون w كيلونيوتن/المتر الطولي) حينئذ يُقال أنه حمل موزع بانتظام UDL. ولو أن التوزيع ليس بمعدل منتظم، في هذه الحالة يُقال أنه حمل غير موزع بانتظام. وتحت هذا الصنف تقع الأحمال المثلثية وشبة المنحرفة.

٤-٣ تصنيف الكمرات

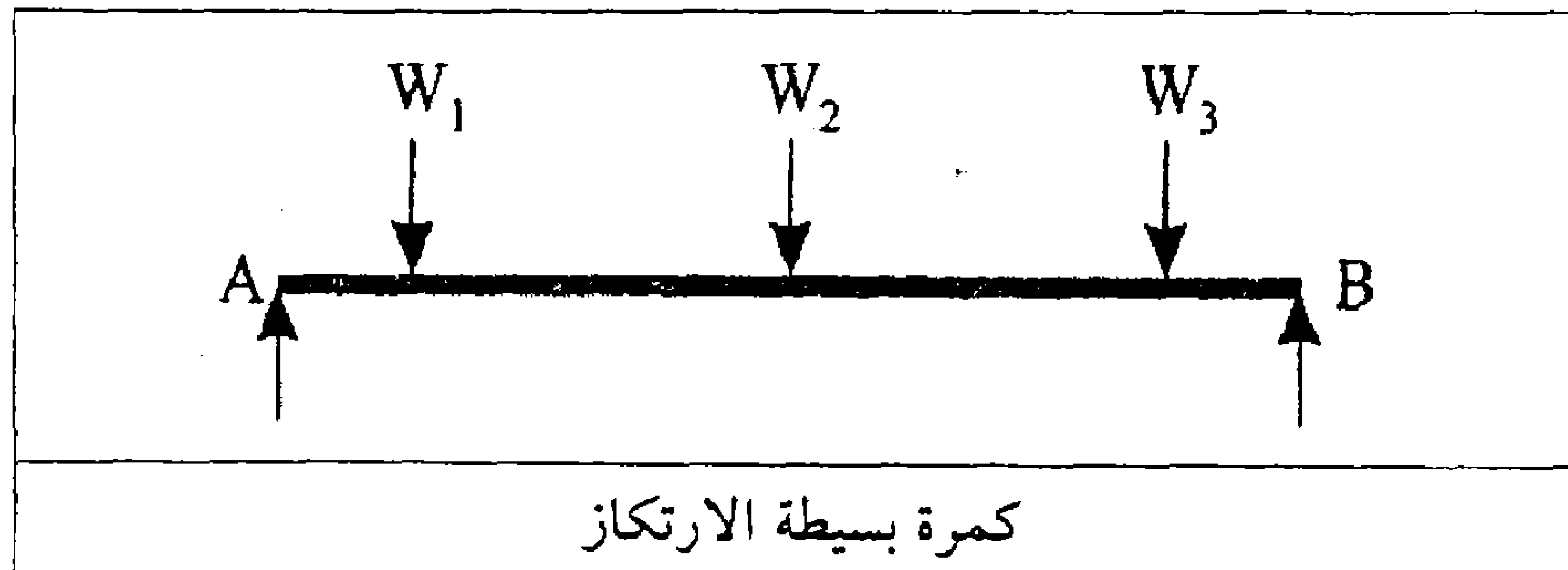
بناءًا على نوعية الدعامات، يمكن تصنيف الكمرات كالآتي:

(١) الكابولي Cantilever. الكابولي عبارة عن كمرة إحدى طرفيها مثبت والآخر حر. والشكل التالي يوضح كمرة كابولية طرفها A مثبت بجساءة داخل الدعامة الخاصة به في حين أن الطرف الآخر B حرًا. الطول بين A وB يُعرف بأنه طول الكابولي.



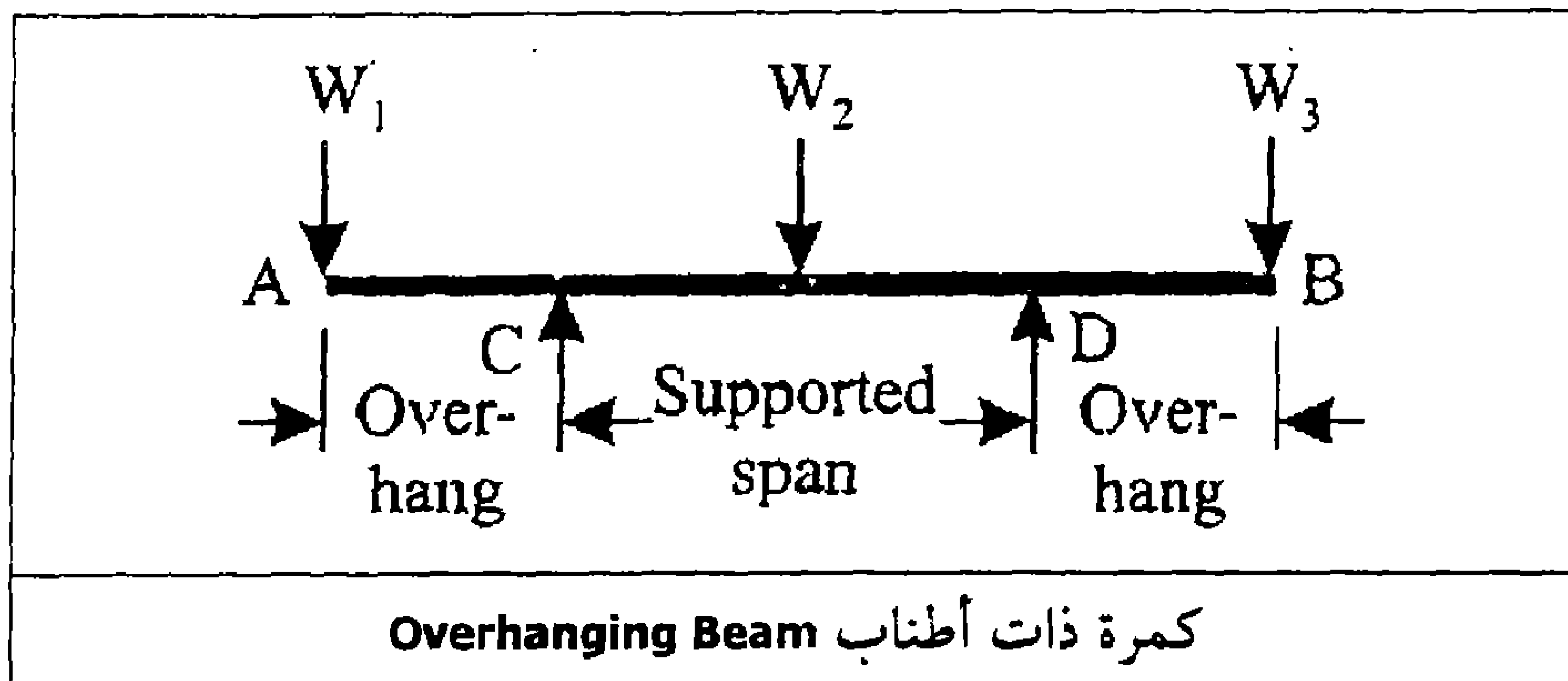
كمرة كابولية

(٢) الكمرة البسيطة (أو الحرة) الارتكاز Simply (or freely) supported beam. الكمرة البسيطة الارتكاز هي الكمرة التي يرتكز طرفيها بحرية على حوائط أو أعمدة أو حواف حادة، كما هو موضح في الشكل التالي. وفي هذه الحالات كلها، تكون ردود الأفعال لأعلى دائمًا.



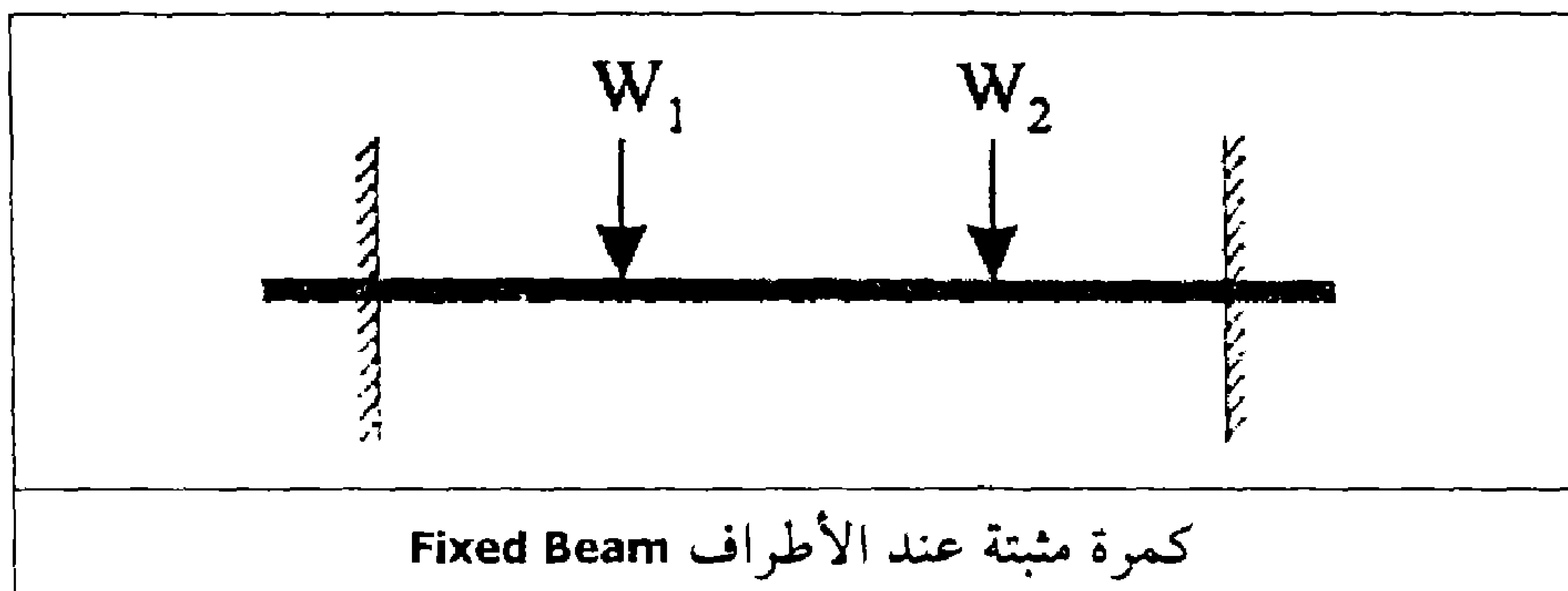
كمرة بسيطة الارتكاز

(٣) الكمرة ذات الأطناب Overhanging Beam. الكمرة ذات الأطناب هي الكمرة التي بها لا تكون الدعامات عند الأطراف أي أن الكمرة تمتد لمسافة ما بعد الدعامات إما من جهة واحدة أو من الجهتين. في الشكل التالي، كل من C وD عبارة عن دعامات وكل من الطرفين A وB بعيدين عن الدعامتين C وD بمسافة.



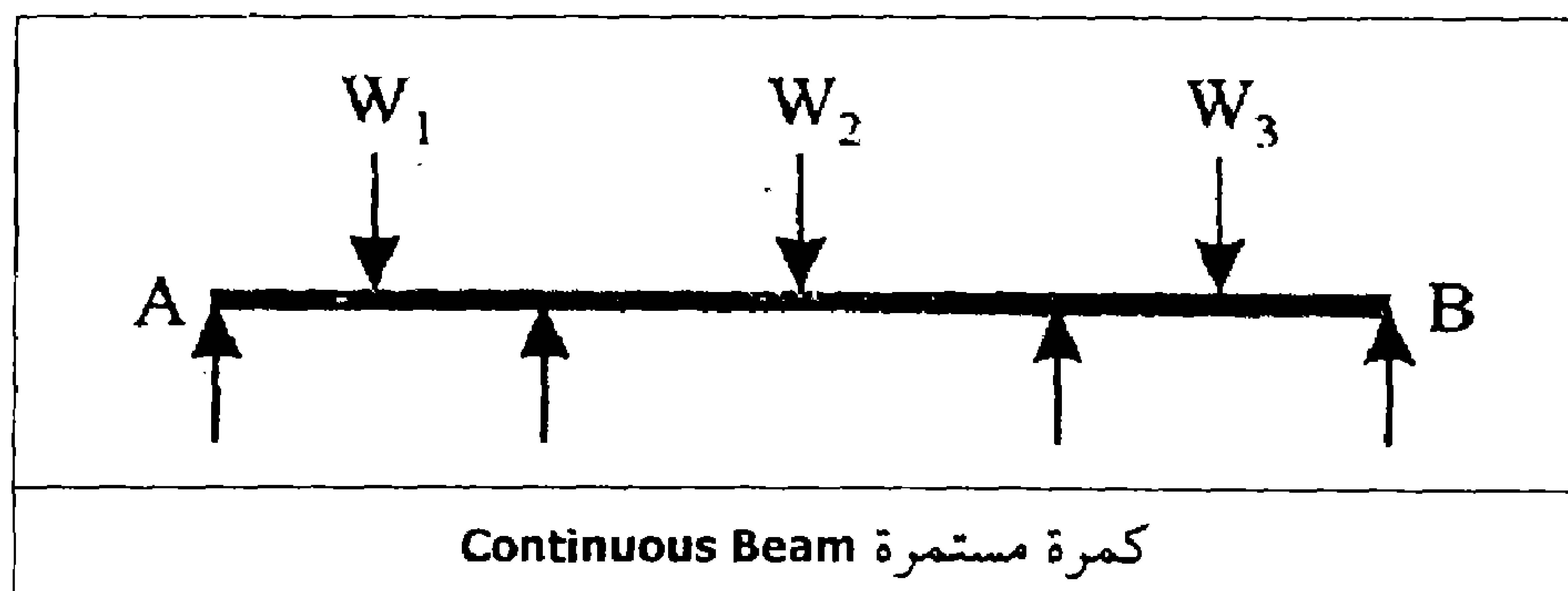
كمرة ذات أطناب **Overhanging Beam**

(٤) الكمرة المثبتة Fixed Beam. عبارة عن كمرة تكون أطرافها مثبتة بجساءة أو مبنية داخل الحوائط أو الأعمدة التي ترتكز عليه (انظر الشكل التالي).



كمرة مثبتة عند الأطراف **Fixed Beam**

(٥) الكمرة المستمرة Continuous beam. عبارة عن كمرة يكون لها أكثر من دعامتين (انظر الشكل التالي). والدعامات عند أقصى اليسار وأقصى اليمين تسمى الدعامات الطرفية end supports وكل الدعامات الأخرى، باستثناء الدعامات الطرفية، تسمى الدعامات البينية intermediate supports.

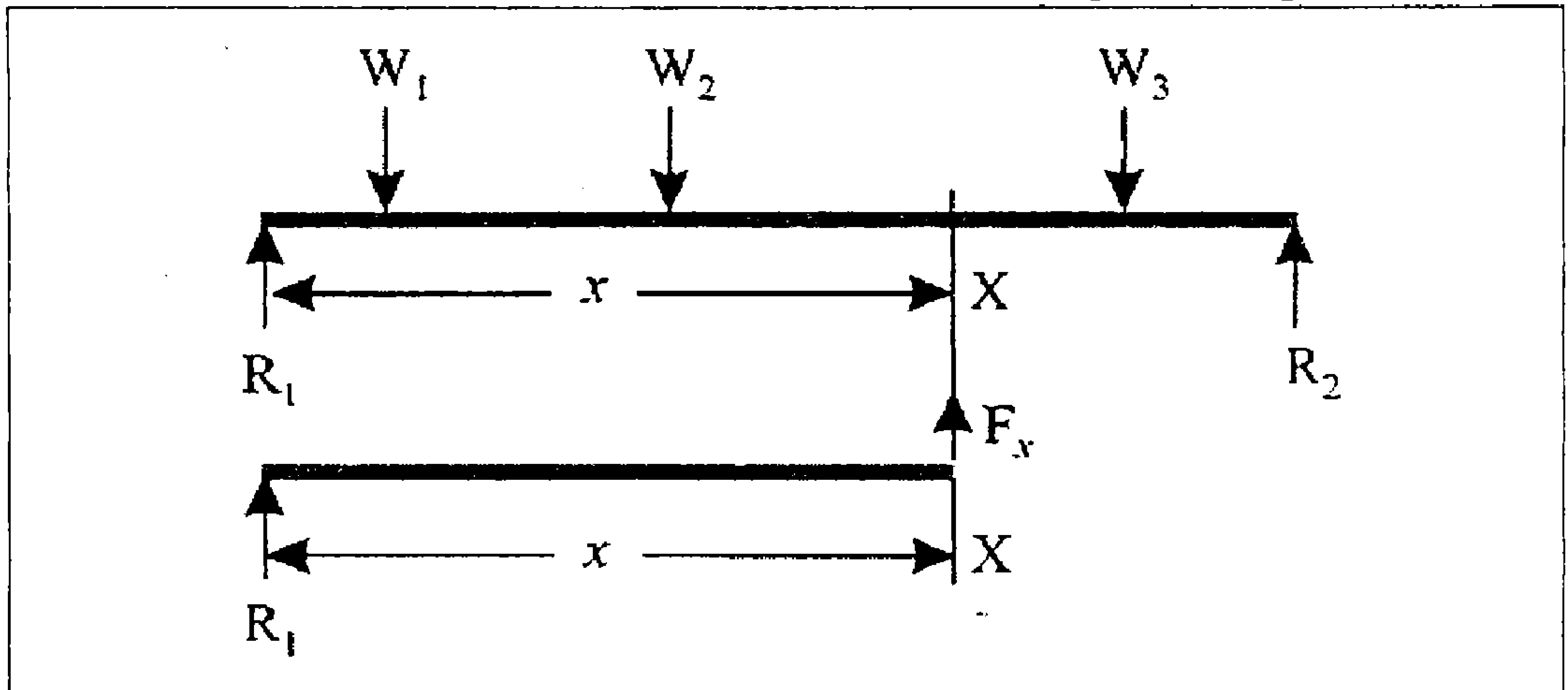


كمرة مستمرة **Continuous Beam**

من الممكن ملاحظة أن الأنواع الثلاثة الأولى من الكمرات (أي الكمرات الكابولية، والكمرات البسيطة الارتكاز، والكمرات ذات الأطناب) تعرف بالكمرات المجددة استاتيكيًا Statically Determinate Beams حيث أنه يمكن تحديد ردود أفعال تلك الكمرات عند دعاماتها باستخدام معادلات الاتزان الاستاتيكي كما أن ردود الأفعال مستقلة عن تشوه الكمرات. أما النوعان الأخيران من الكمرات (أي الكمرات المثبتة والكمرات المستمرة) فتُعرف بالكمرات الغير محددة استاتيكيًا Statically Indeterminate Beams حيث أنه لا يمكن تحديد ردود أفعالها عند الدعامات باستخدام معادلات الاتزان الاستاتيكي.

٤-٤ قوة القص .S.F وعزم الانحناء .B.M

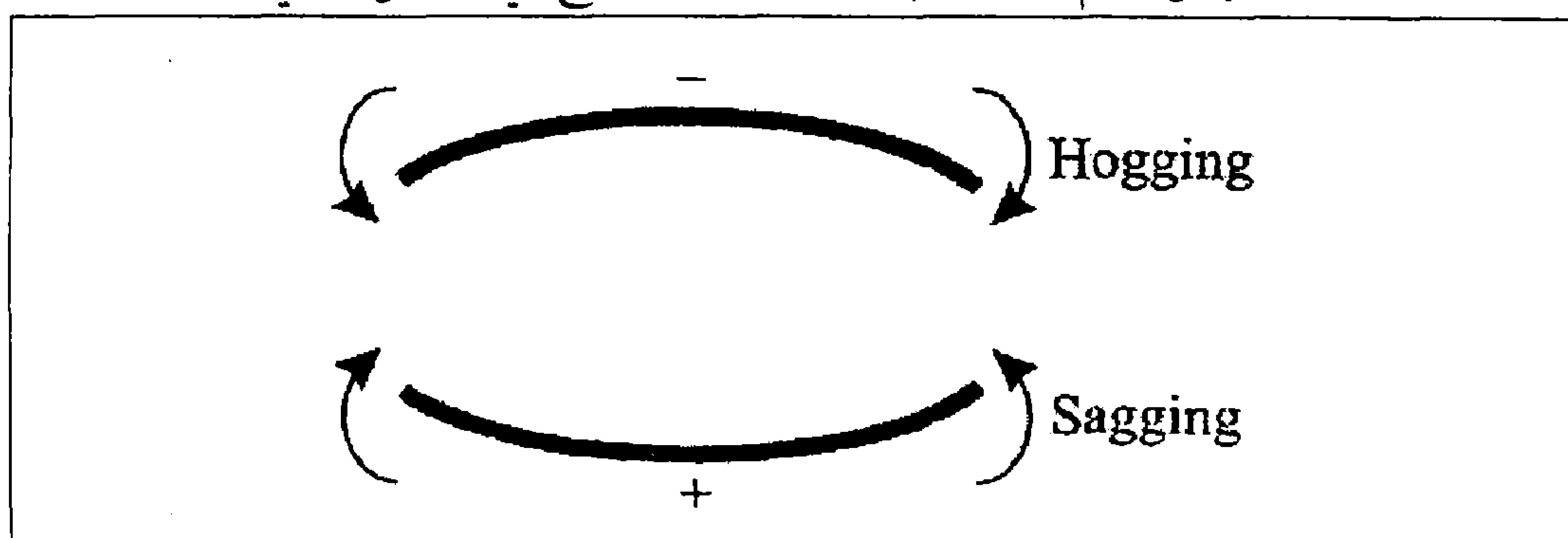
عندما تُقطع كمرة ما، وهي في حالة اتزان تحت تأثير مجموعة من القوى، في مقطع عرضي ما X، وتبقى الكمرة على يسار المقطع العرضي في اتزان (انظر الشكل التالي)، فإن قوة ما ينبغي أن تؤثر عند المقطع العرضي. وقبل القطع، فإن هذه القوة يمكن أن تتوفر من خلال المادة المجاورة، ويمكن أن تؤثر في اتجاه يمس المقطع العرضي. ومن ثم، ستكون هناك قوة قص shearing force عند المقطع العرضي. وعدديًا، سوف تُعطى قوة القص هذه عن طريق المجموع الجبري للقوة على يسار أو على يمين المقطع العرضي. وكما هو متبع، فإن القوة المتجه لأعلى على يسار المقطع سوف تنتج قوة قص سالبة. وبالمثل، أي قوة متجه لأعلى على يمين المقطع سوف تنتج قوة قص موجبة.



عند دراسة بمزيد من التفصيل اتزان المادة على يسار المقطع X (الشكل السابق) بمزيد من التفصيل، نجد أنه يمكن ألا توجد محصلة عزم على يسار المقطع. ومن ثم، أي عزم ينتج بواسطة القوى المؤثرة في الكمرة ينبغي أن يُوازن بعزم مساوي في المقدار ومضاد

له في الاتجاه ينتج بواسطة القوى الداخلية المؤثرة في الكمرة عند المقطع. هذا يسمى عزم الانحناء **bending moment** عند المقطع.

عزم الانحناء عبارة عن المجموع الجبري للعزوم على يسار أو يمين المقطع. في كل حالة، وبأخذ الاتزان في الاعتبار، إما بالنسبة للقوى أو العزوم، فإن المحصلة، الحادثة بسبب القوى المطبقة على أحد جانبي المقطع تكون متزنة بعزم الانحناء وقوة القص المؤثرة عند المقطع. "الإشارات المتفق عليها" بالنسبة لعزوم الانحناء تتمثل في أن الكمرة تكون في حالة "تقوس لأعلى **hogging**" لو أنها معرضة لعزم انحناء سالب، وتكون في حالة "تقوس لأسفل **sagging**" عندما تتعرض لعزم انحناء موجب، كما هو موضح في الشكل التالي:



٤-٥ الإشارات المتفق عليها Sign Conventions

من أجل كتابة التعبيرات الرياضية العامة التي تخص كل من عزم الانحناء وقوة القص، علينا أن نتبنى النظام التالي للإشارات:

الإشارات المتفق عليها بالنسبة لقوة القص

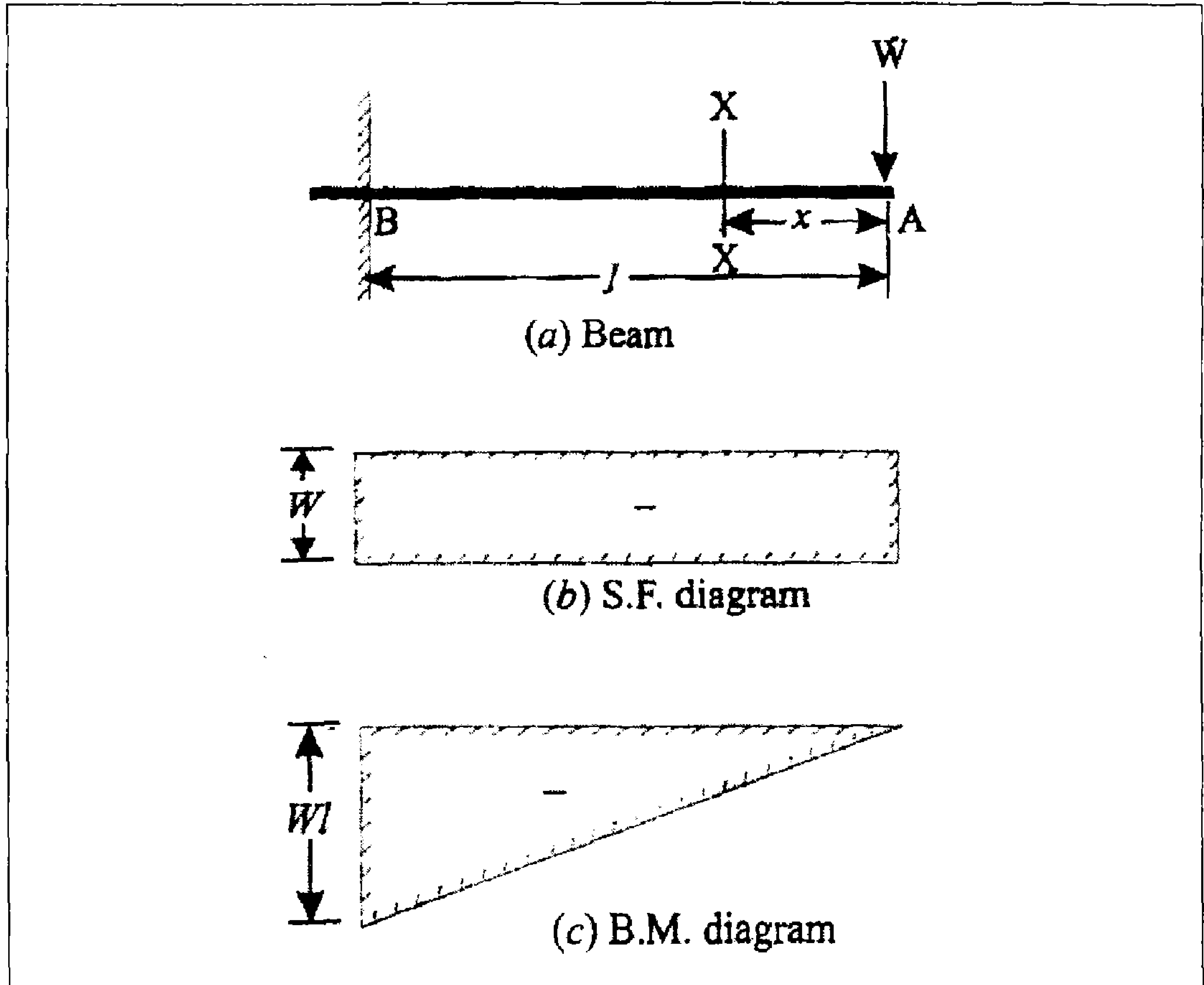
أي قوة قص تتجه لأعلى على الجانب الأيمن للمقطع العرضي أو تتجه لأسفل على يسار المقطع العرضي سيتم التعامل معها على إنها موجبة الإشارة. وبالمثل، قوة القص "السالبة" ستكون التي تتجه لأسفل على يمين المقطع أو لأعلى على يسار المقطع.

الإشارات المتفق عليها بالنسبة لعزم الانحناء

عزم الانحناء المتسبب في التقعر لأعلى سوف يؤخذ على إنه "موجب" ويسمى عزم التقوس لأسفل **sagging bending moment**، وعزم الانحناء المتسبب في التحدب لأعلى سوف يؤخذ على إنه "سالب" ويسمى عزم التقوس لأعلى **Hogging bending moment**.

٦-٤ الكابولي المعرض لحمل عند الطرف الحر

انظر الشكل التالي:



(a) Beam
(b) S.F. diagram
(c) B.M. diagram

أي كابولي يكون مرتكزًا عند أحد طرفيه فقط، حيث يكون هذا الطرف مبني عند دعامته، مما يعطيه ميل ثابت عند تلك النقطة.

لندرس سويًا مقطع عرضي XX على مسافة x من الطرف الحر A.

قوة القص عند المقطع العرضي XX:

$$S_x = -W$$

قوة القص عند المقطع X:

$$M_x = -W*x$$

ومن ثم، نجد أن قوة القص ثابتة عند كل مقاطع العنصر بين الطرفين A, B. ولكن عزم الانحناء عند أي مقطع يكون متناسبًا مع مسافة المقطع من الطرف الحر.

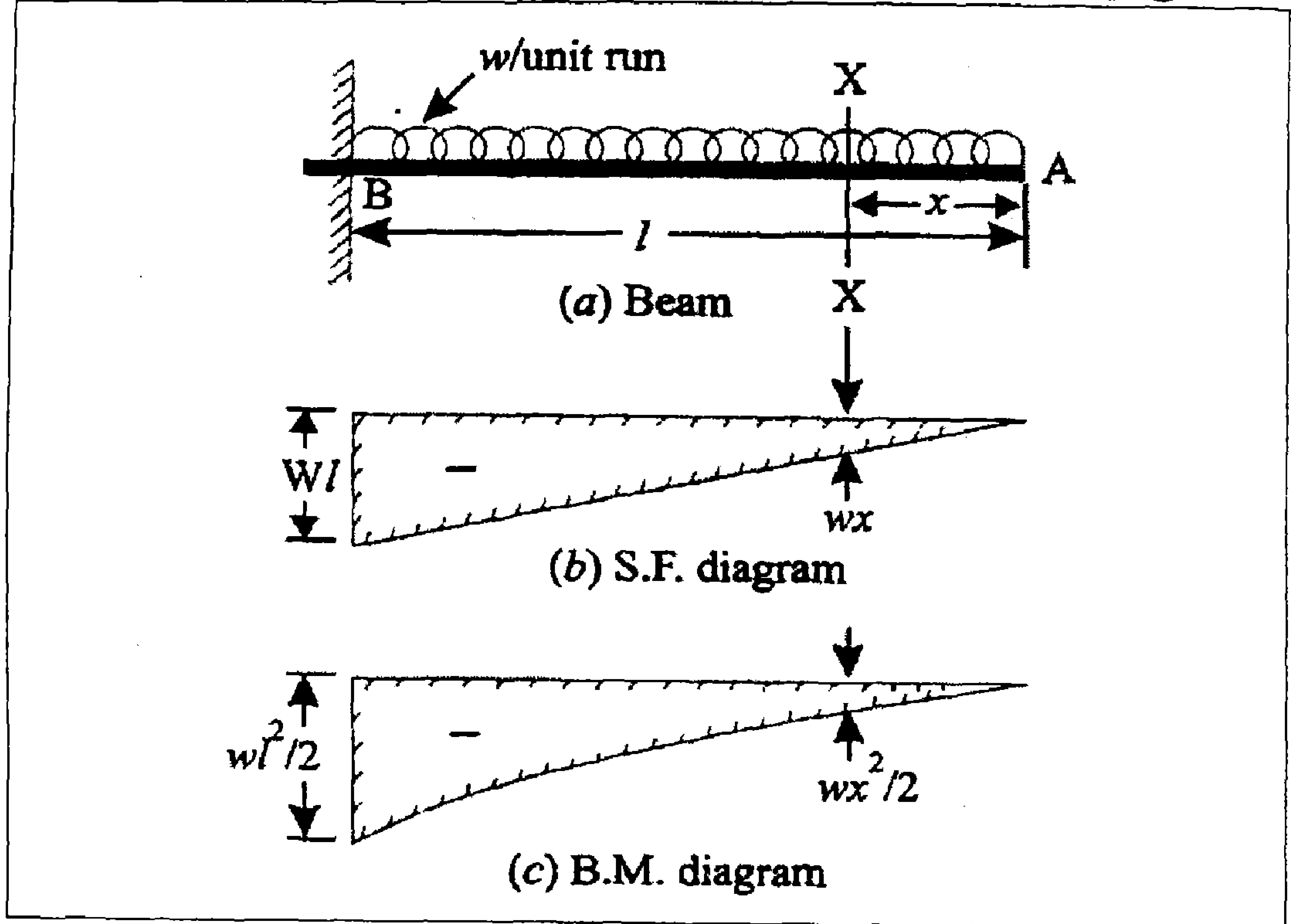
عند (x=0) أي عند A يكون عزم الانحناء = صفر.

عند (x=l) أي عند B يكون عزم الانحناء = W*l.

في الشكل السابق نشاهد كل من ديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء.

٤-٧ الكابولي المعرض لحمل موزع بانتظام

لنجعل الحمل الموزع عبر الطول الكلي للكمرة، عبارة عن w لكل متر طولي، كما هو موضح في الشكل التالي:



(a) Beam

(b) S.F. diagram

(c) B.M. diagram

لندرس سويًا المقطع XX على مسافة x من الطرف الحر A.

قوة القص عند المقطع XX:

$$S_x = -w * x$$

عزم الانحناء عند المقطع XX:

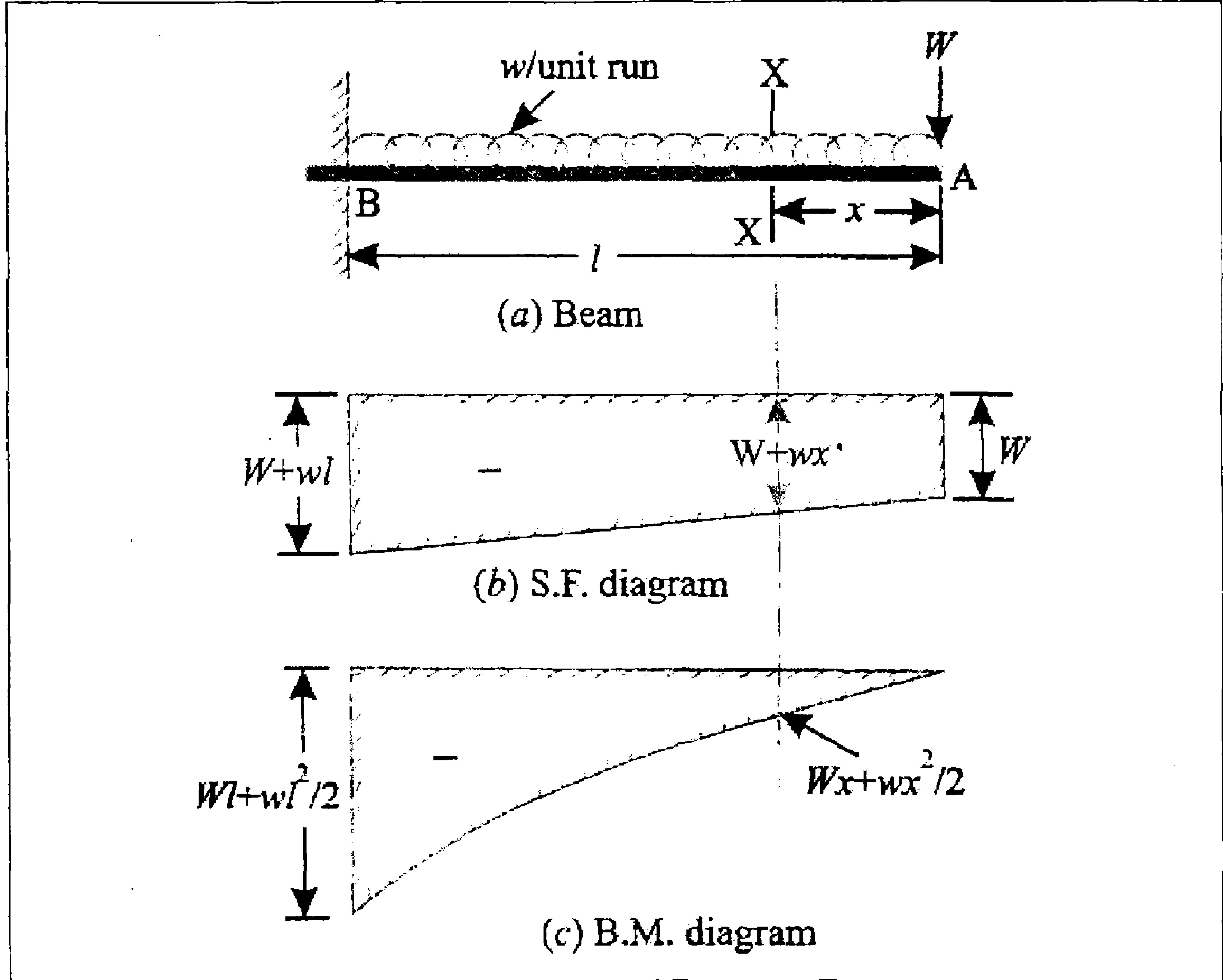
$$M_x = -w * x * x/2 = -w * x^2/2$$

ومن ثم، نجد أن تباين قوة القص يكون بناءًا على القانون الخطي **linear law**، في حين أن تباين عزم الانحناء يكون بناءًا على قانون القطع الناقص **parabolic law**.

عزم الانحناء (M_x)	قوة القص (S_x)	قيمة x
٠	٠	٠
$-w*l^2/2$	$-w*l$	l

٤-٨ دراسة كابولي محمل بحمل موزع بانتظام مع حمل مركز عند الطرف الحر

في الشكل التالي، نشاهد كابولي AB طوله (l) (مثبت عند B وحر عند A) ويحمل حمل موزع بانتظام w لكل متر طولي عبر الطول الكلي للكمرة بالإضافة إلى حمل مركز W عند الطرف الحر.



(a) Beam

(b) S.F. diagram

(c) B.M. diagram

لندرس أي مقطع عرضي XX على مسافة x من الطرف الحر A.

يتم حساب قوة القص عند المقطع العرضي XX كالآتي:

$$S_x = -(W + wx)$$

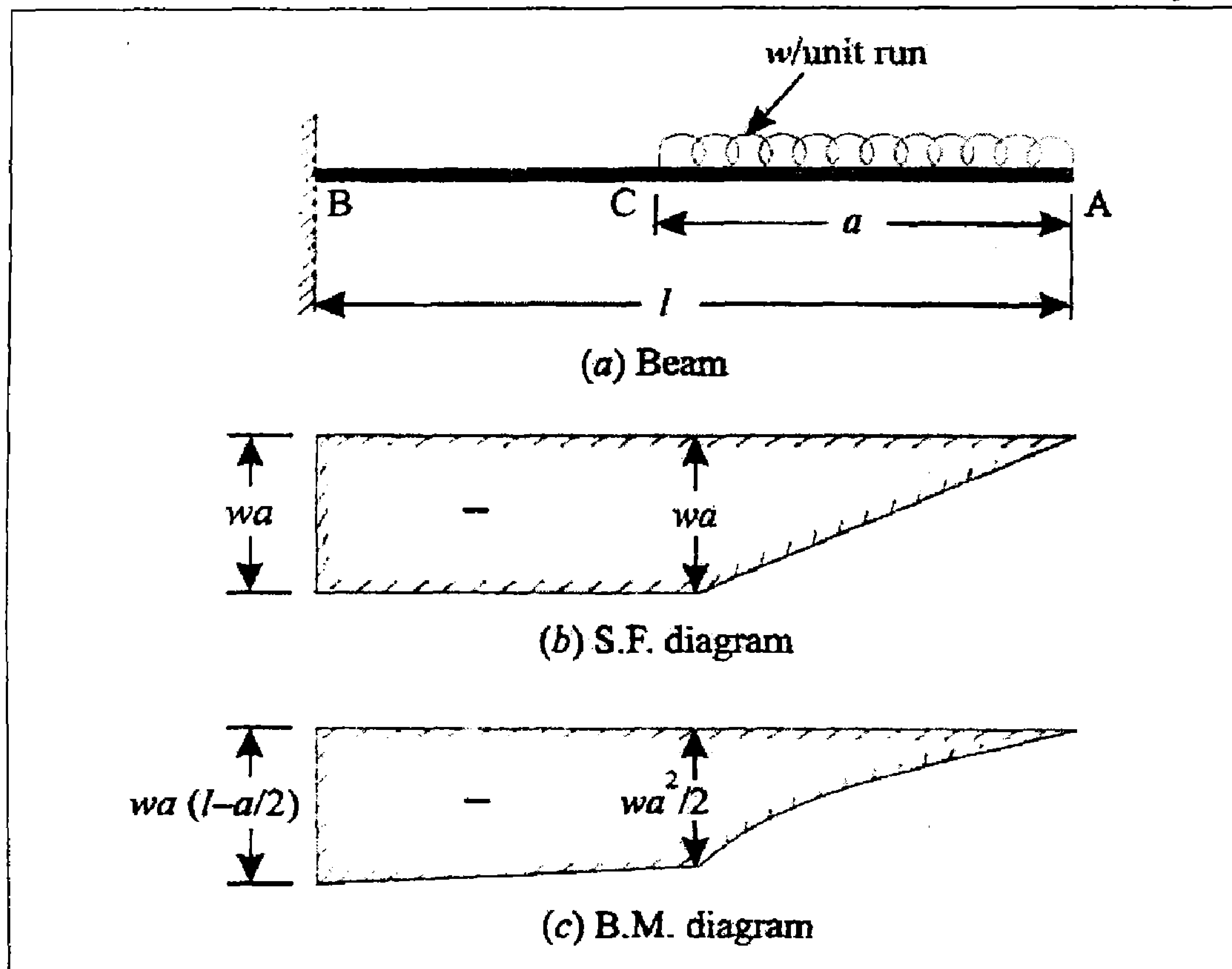
كما يتم حساب عزم الانحناء عند المقطع العرضي XX كالآتي:

$$M_x = -\left(Wx + \frac{wx^2}{2}\right)$$

مما سبق يتضح لنا أن قوة القص تتباين بناءًا على القانون الخطي في حين أن عزم الانحناء يتباين بناءًا على قانون القطع الناقص.

٤-٩ كابولي يحمل حمل موزع بانتظام في جزء من طوله من الطرف الحر

في الشكل التالي، نشاهد كابولي AB طوله (l) ويحمل حمل موزع بانتظام w لكل متر طولي لمسافة a من الطرف الحر.



لندرس أي مقطع عرضي بين C وA على مسافة x من الطرف الحر A.

يتم حساب قوة القص وعزم الانحناء عند هذا المقطع العرضي كالآتي:

$$S_x = -wx$$

$$M_x = -\frac{wx^2}{2}$$

هذه العلاقات تعتبر جيدة بالنسبة لكل قيمة x التي تتراوح من الصفر إلى a (أي في المسافة بين C وA). ومن ثم، بالنسبة لهذا النطاق تتباين قوة القص بناءًا على القانون الخطي في حين أن عزم الانثناء يتباين بناءًا على قانون القطع الناقص.

عزم الانحناء (M_x)	قوة القص (S_x)	قيمة x
٠	٠	٠
$-w*a^2/2$	$-w*a$	a

والآن، لندرس أي مقطع عرضي بين B وC على مسافة x من الطرف A.

يتم حساب قوة القص وعزم الانحناء عند المقطع العرضي كالآتي:

$$S_x = -wx$$

$$M_x = -wa\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

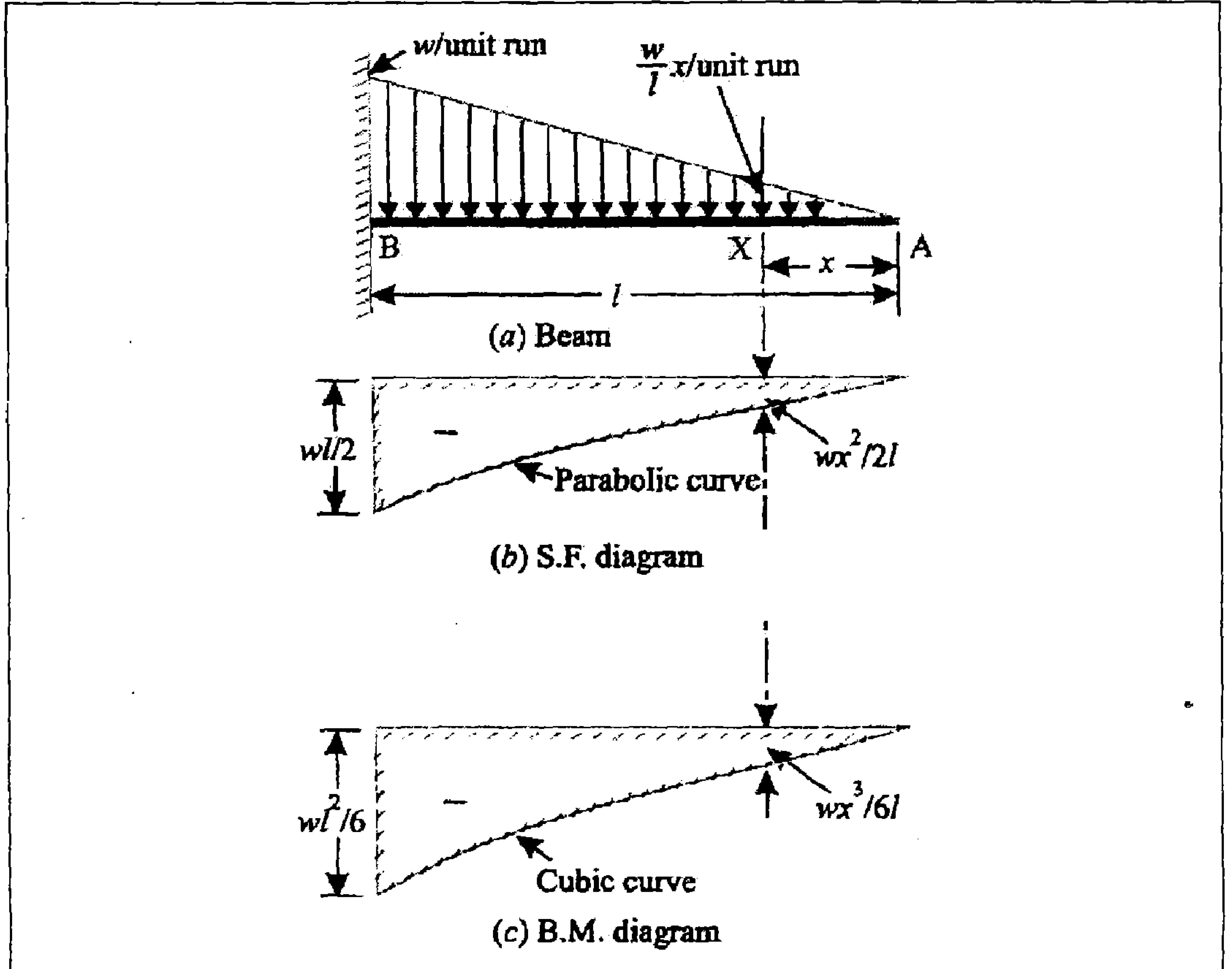
ومن ثم، بين B وC نجد أن قوة القص ثابتة (=w*a) في حين أن عزم الانحناء يتباين بناءًا على القانون الخطي.

$$\text{At } x = a, \quad M_x = -wa\,(a - a/2) = -\frac{wa^2}{2}$$

$$\text{At } x = l, \quad M_x = -wa\,(l - a/2)$$

٤-١٠ كابولي يحمل حمل تتغير شدته بانتظام من الصفر عند الطرف الحر إلى w لكل متر طولي عند الطرف المثبت

في الشكل التالي نشاهد كابولي AB طوله (l) ويحمل حمل تتغير شدته بانتظام من الصفر عند الطرف الحر إلى w لكل وحدة طولية عند الطرف المثبت.



(a) Beam

(b) S.F. diagram

(c) B.M. diagram

لنجعل شدة التحميل عند المقطع XX على مسافة x من الطرف الحر A عبارة عن (w_x) لكل وحدة طولية.

إذن، $w_x = \frac{w}{l} . x$ حيث أن شدة (كثافة) الحمل تزداد بانتظام من الصفر عند الطرف الحر إلى w عند الطرف المثبت.

إذن، الحمل المؤثر بالنسبة لمسافة عنصرية dx من x يساوي (w_x*dx)، ومن ثم يتم حساب الحمل الكلي المؤثر بالنسبة لأي مسافة بين (x=a) و(x=b) كالآتي:

$$= \sum_{x=a}^{x=b} w_x . dx = \text{Area of load diagram between } x = a \text{ and } x = b.$$

ومن ثم، نحن نصل إلى استنتاج غاية في الأهمية وهو أن الحمل الموزع الكلي المؤثر على أي قطعة تساوي مساحة ديجرام الحمل على تلك القطعة.

يتم حساب قوة القص وعزم الانحناء عند مسافة x من الطرف A كالآتي:

قوة القص (S_x) = مساحة ديجرام الحمل بين X وA

$$S_x = -\frac{1}{2} . x.w_x = -\frac{1}{2} . x. \frac{w}{l} . x = -\frac{wx^2}{2l}$$

وعزم الانحناء (M_x) = عزم الحمل المؤثر على XA حول X = مساحة ديجرام الحمل بين X وA × مسافة مركز ثقل هذا الديجرام من X.

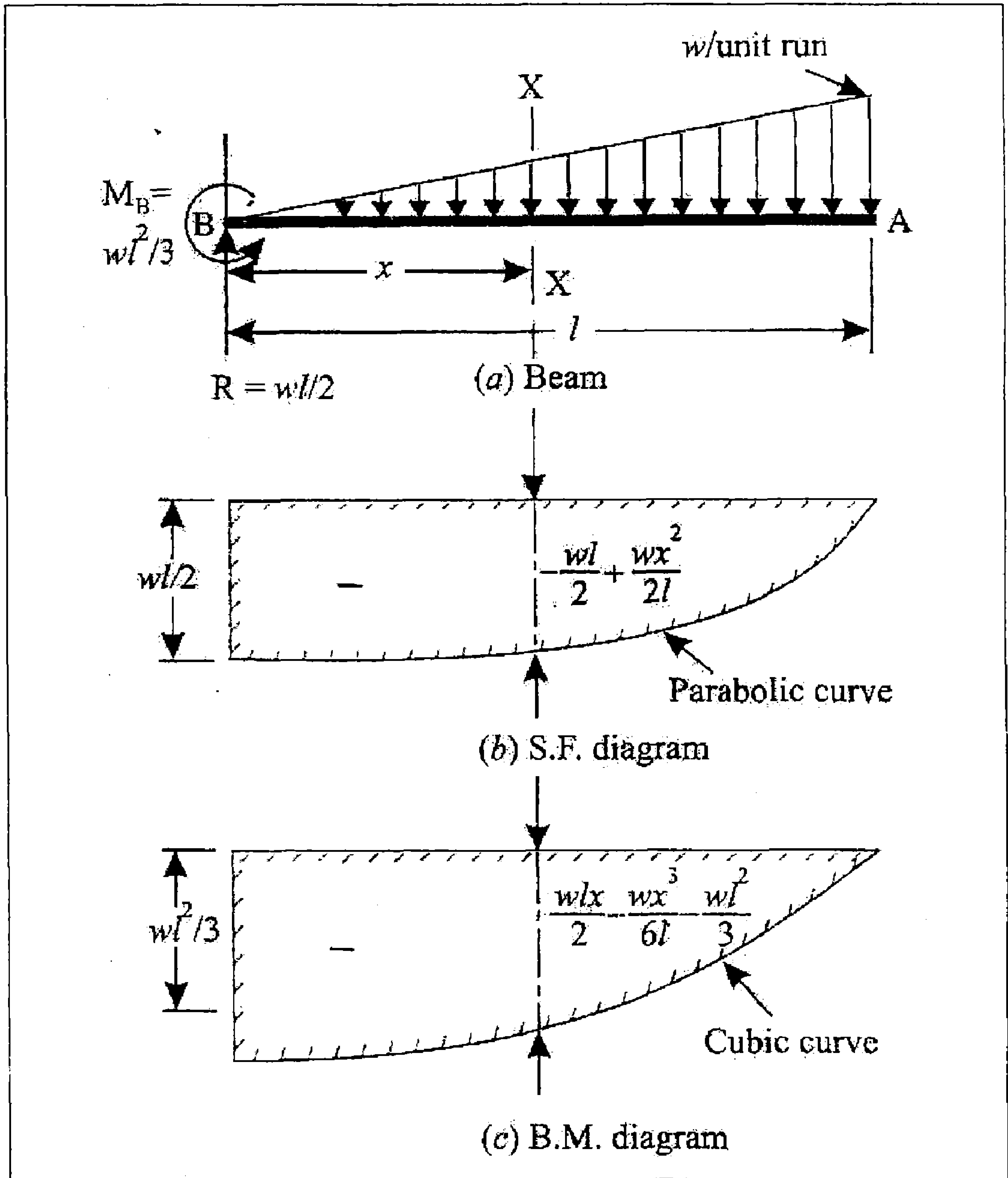
$$M_x = -\frac{wx^2}{2l} . \frac{x}{3} = -\frac{wx^3}{6l}$$

عزم الانحناء (M_x)	قوة القص (S_x)	قيمة x
٠	٠	٠
-w*l²/6	-w*l/2	l

تتغير قوة القص وهي متبعة قانون القطع الناقص في حين أن يتغير عزم الانحناء متبعًا لقانون تكعيبي **cubic law**.

٤-١١ كابولي يحمل حمل تتغير شدته بانتظام من الصفر عند الطرف المثبت إلى w لكل وحدة طولية عند الطرف الحر

في الشكل التالي نشاهد كابولي AB طوله (l) (مثبت عند B وحر عند A) يحمل حمل تتغير شدته بانتظام من الصفر عند الطرف المثبت إلى w لكل وحدة طولية عند الطرف الحر.



من المناسب أن يتم إيجاد قوة القص وعزم الانحناء عند أي مقطع عرضي عن طريق دراسة الجزء الأيسر للمقطع العرضي. ولندرس أي مقطع عرضي XX على مسافة x من الطرف المثبت B.

لنجعل (M_B) عبارة عن العزم الذي هو رد فعل أو ما يسمى بعزم التثبيت عند B.

قوة القص عند المقطع العرضي XX = المجموع الجبري للقوى الواقعة على BX،

إذن:

$$S_x = -\frac{wl}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{wx}{l} = -\frac{wl}{2} + \frac{wx^2}{2l}$$

عزم الانحناء عند المقطع XX = المجموع الجبري لعزوم القوى وردود الأفعال على BX حول X. إذن:

$$M_x = \frac{wl}{2} x - \frac{wx^2}{2l} \cdot \frac{x}{3} - M_B$$

وحيث أن (M_B) = عزم الحمل الكلي حول B ويتم حسابه كالآتي:

$$M_B = \frac{wl}{2} \cdot \frac{2l}{3} = \frac{wl^2}{3}$$

إذن:

$$M_x = \frac{wl}{2} x - \frac{wx^3}{6l} - \frac{wl^2}{3}$$

ومن ثم، عند (x=0) أي عند B فإن:

$$S_B = -\frac{wl}{2} \text{ and } M_B = -\frac{wl^2}{3}$$

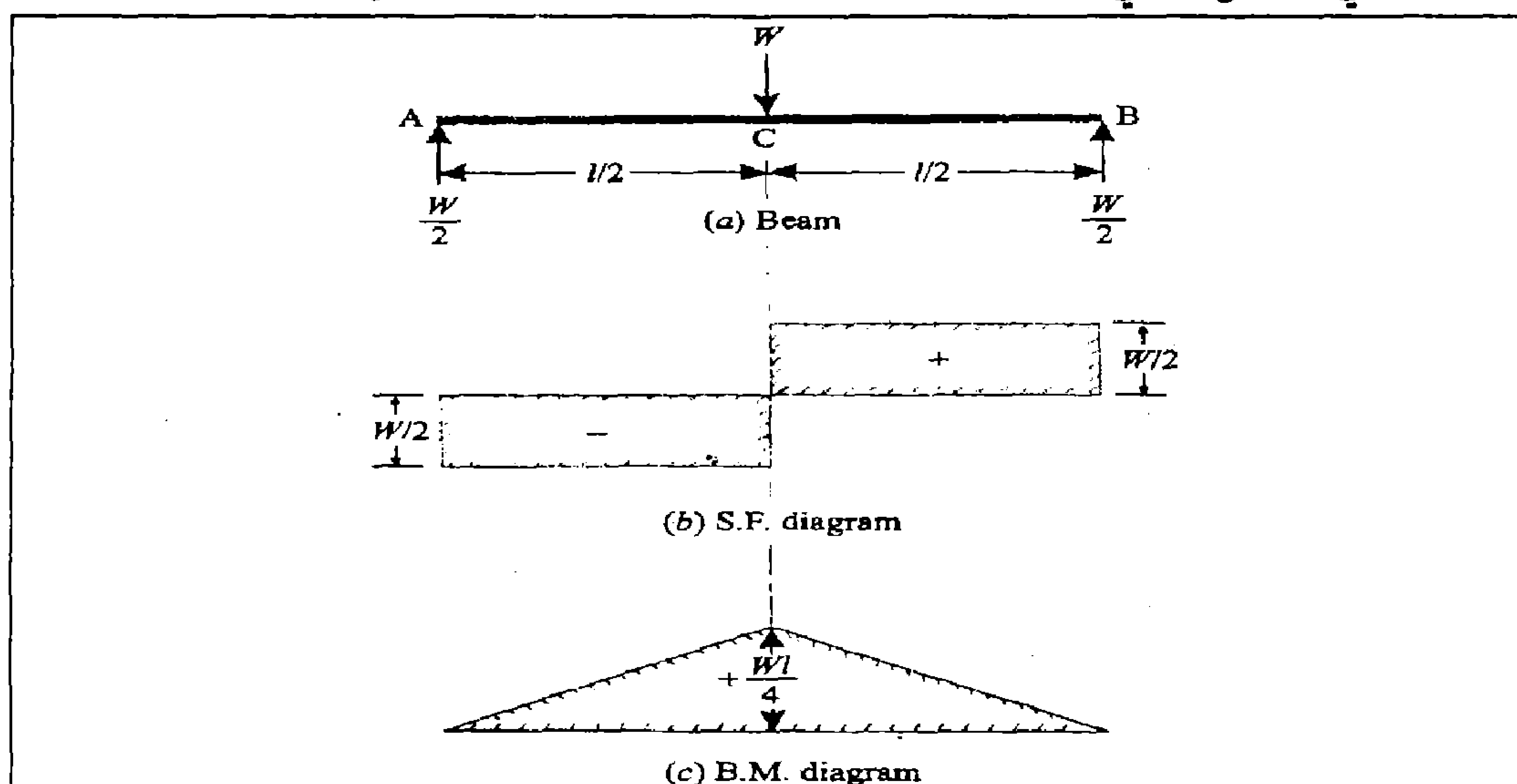
وعند (x=l) أي عند A فإن:

$$S_A = -\frac{wl}{2} + \frac{wl^2}{2l} = 0$$

$$M_A = \frac{wl}{2} \cdot l - \frac{wl^3}{6l} - \frac{wl^2}{3} = \frac{wl^2}{2} - \frac{wl^2}{6} - \frac{wl^2}{3} = 0$$

٤-١٢ كمرة بسيطة الارتكاز تحمل حمل مركز في نقطة عند منتصف البحر

في الشكل التالي، نشاهد كمرة AB بسيطة الارتكاز عند الطرفين A وB.



لنجعل بحر الكمرة عبارة عن (l) وتحمل حمل W مركز في نقطة عند منتصف البحر. وحيث أن الحمل موضوع بتماثل على البحر، فإن ردود الأفعال عند كل دعامة تكون (W/2).

إذن:

$$R_A = R_B = \frac{W}{2}$$

بالنسبة لأي مقطع بين B وC، تكون قوة القص عبارة عن (+W/2).

وبالنسبة لأي مقطع بين C وA، نجد أن:

$$S.F. = \frac{W}{2} - W = -\frac{W}{2}$$

وعند المقطع C نجد أن قوة القص تتغير من (+W/2) إلى (-W/2).

عزم الانحناء على مسافة x من B في BC يكون (+W*x/2).

عزم الانحناء عند B (حيث x=0) يكون صفرًا.

عزم الانحناء (M_C) عند C (حيث x=l/2) يساوي (W*l/4).

يتم حساب عزم الانحناء عند مسافة x من B في الجزء CA من خلال العلاقة التالية:

$$M_x = +\frac{Wx}{4} - W\,(x - l/2)$$

وعند C حيث (x=l/2) يكون عزم الانحناء (M_C) عبارة عن (+W*l/4).

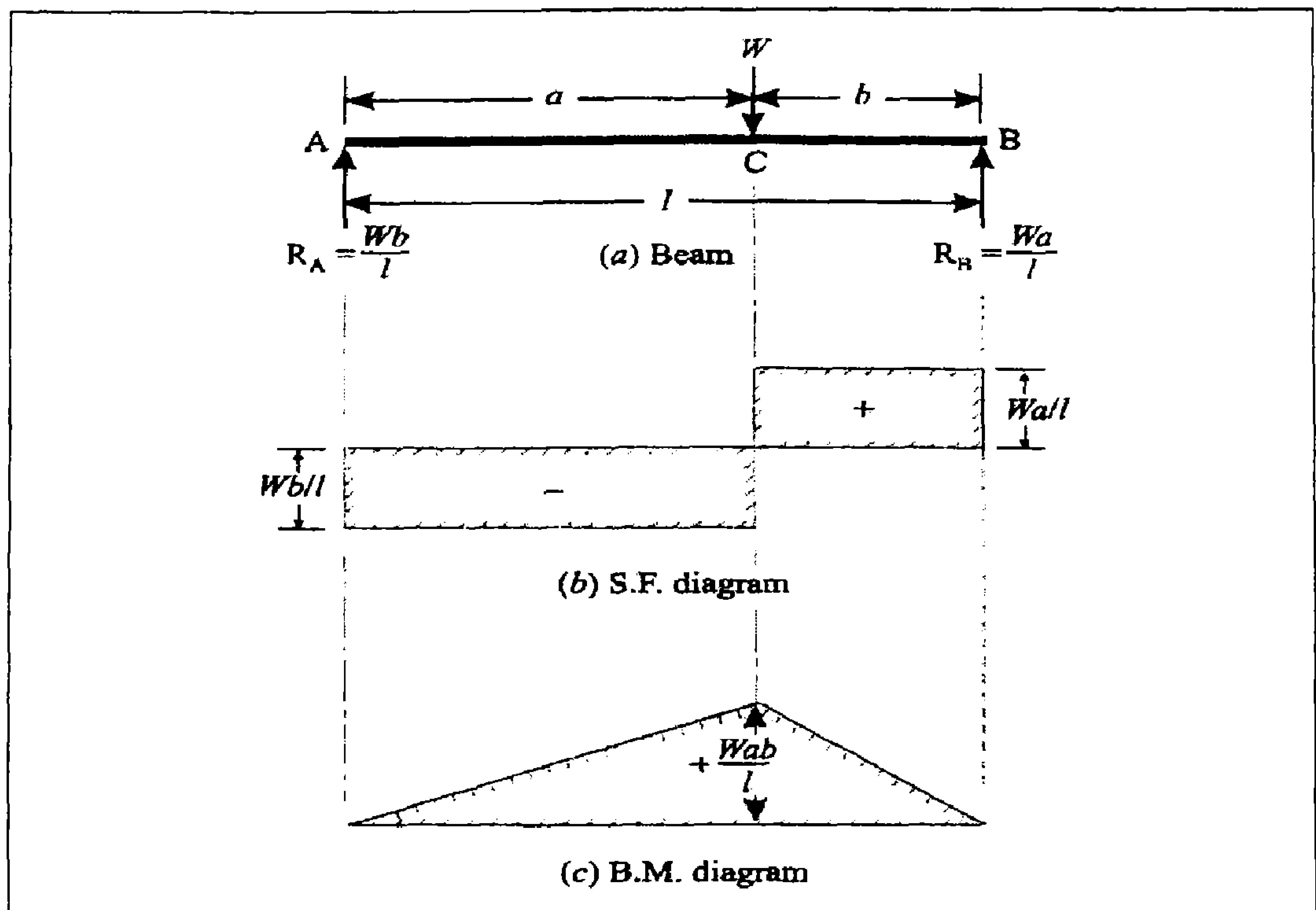
وعند A حيث (x=l) يتم حساب عزم الانحناء (M_A) كالآتي:

$$M_A = \frac{Wl}{2} - \frac{Wl}{2} = 0$$

ملاحظة	عزم الانحناء عند الدعامات في حالة الكمرات البسيطة الارتكاز يكون صفرًا دائمًا.

٤-١٣ الكمرات البسيطة الارتكاز المعرضة لحمل مركز ليس عند المنتصف

لنجعل الكمرة AB التي بحرها (l) (كما هو موضح في الشكل التالي) تحمل حمل W مركز في نقطة توجد على مسافة a من الطرف A وعلى مسافة b من الطرف B.



(a) Beam
(b) S.F. diagram
(c) B.M. diagram

بأخذ العزوم حول A للحصول على ردود أفعال الدعامات، نحصل على الآتي:

$$R_B \times l = W \times a$$

إذن:

$$R_B = \frac{Wa}{l}$$

ولكن:

$$R_A + R_B = W$$

إذن:

$$R_A = W - \frac{Wa}{l} = \frac{W(l-a)}{l} = \frac{Wb}{l}$$

قوة القص على يسار B تكون (+W*a/l) وهذه القوة تظل ثابتة حتى C.

قوة القص على يسار C تكون:

$$\left(+\frac{Wa}{l} - W\right) = \left[\frac{-W\,(l-a)}{l}\right] = -\frac{Wb}{l}$$

وهذه القوة تظل ثابتة حتى A.

عزم الانحناء عند الدعامات A وB = صفر.

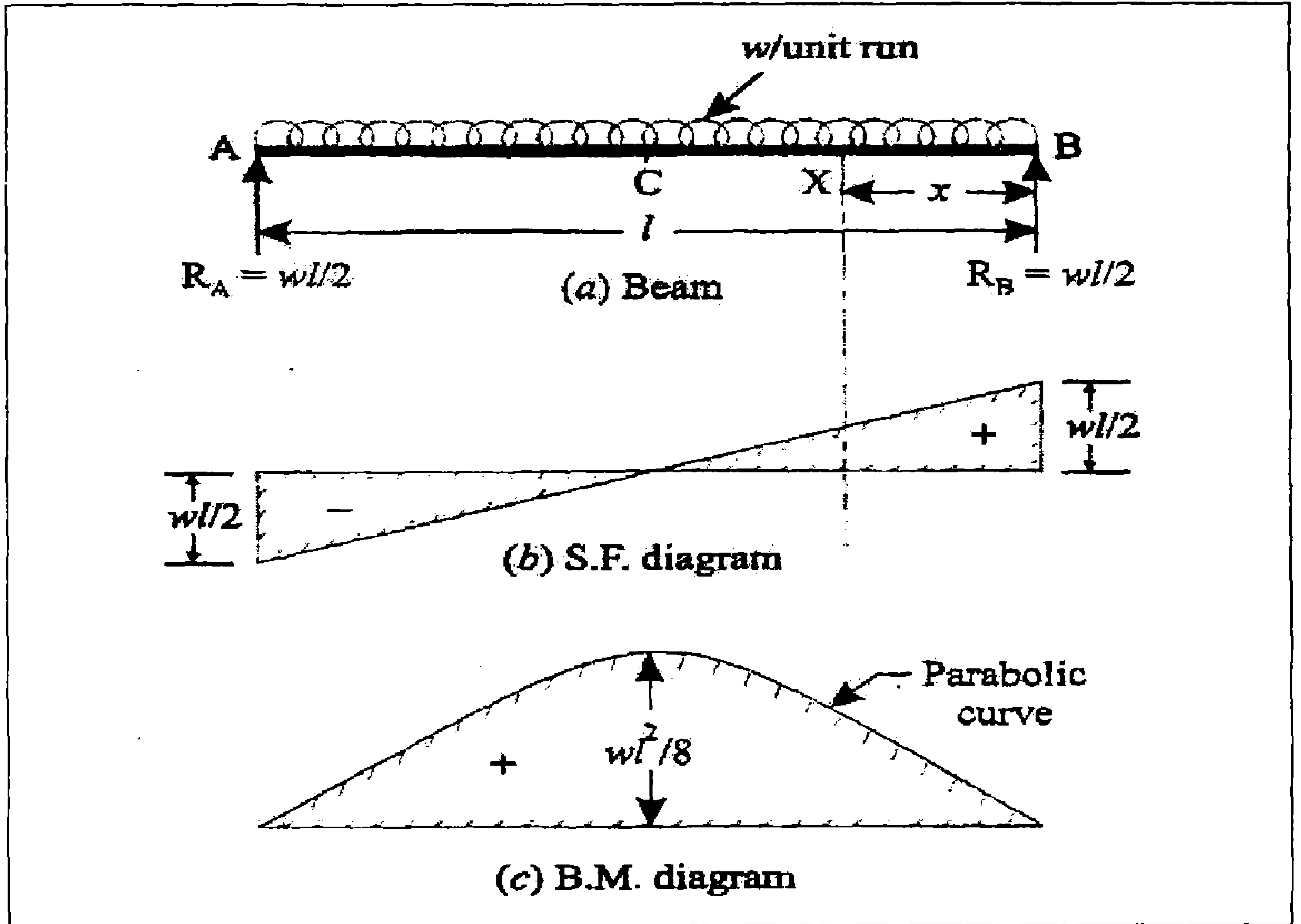
عزم الانحناء عند C يكون:

$$M_C = \frac{Wa}{l} \times b = \frac{Wab}{l}$$

ومن ثم، يصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى عند C حيث تتغير إشارة قوة القص.

٤-١٤ الكمرات البسيطة الارتكاز الحاملة لحمل موزع بانتظام قدره w لكل وحدة طولية عبر البحر كله

في الشكل التالي نشاهد كمرة بسيطة الارتكاز AB تحمل حمل موزع بانتظام (U.D.L.) قدره w لكل وحدة طولية عبر البحر بأكمله:



(a) Beam
(b) S.F. diagram
(c) B.M. diagram

بالتماثل، تكون ردود الأفعال عند الدعامات متساوية، أي أن:

$$R_A = R_B = \frac{wl}{2}$$

قوة القص عند المقطع X على مسافة x من B:

$$S_x = +\frac{wl}{2} - wx$$

قوة القص عند B (حيث x=صفر):

$$S_B = +\frac{wl}{2}$$

قوة القص عند منتصف البحر C (حيث (x=l/2)):

$$S_C = +\frac{wl}{2} - \frac{wl}{2} = 0$$

قوة القص عند A (حيث (x=l)):

$$S_A = +\frac{wl}{2} - wl = -\frac{wl}{2}$$

عزم الانحناء عند المقطع X:

$M_x = +\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}$	**(i)**

عزم الانحناء عند B (حيث (x=0)) (M_B) = صفر.

عزم الانحناء عند A (حيث (x=l)):

$$M_A = \frac{wl}{2} \times l - \frac{wl^2}{2} = 0$$

لكي يصل عزم الانحناء إلى القيمة القصوى، نضع (dM_x/dx) بالنسبة للمعادلة (i) تساوي صفر، إذن:

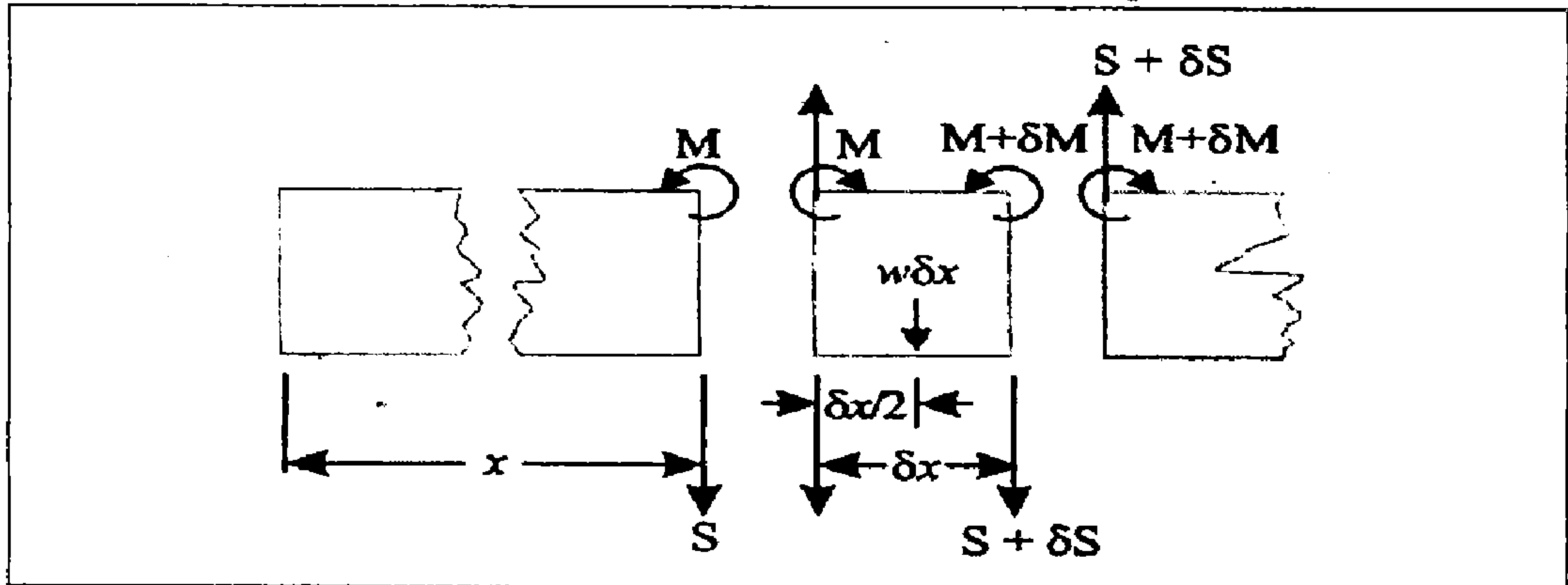
$$\frac{dM_x}{dx} = +\frac{wl}{2} - wx = 0$$

أي أن (x=l/2) (ليصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى، من الممكن ملاحظة أن قوة القص عند هذه النقطة يكون صفرًا)، إذن:

$$M_{max} = +\frac{wl}{2} \times \frac{l}{2} - \frac{w}{2} \times \left[\frac{l}{2}\right]^2 = +\frac{wl^2}{8}$$

٤-١٥ العلاقة العامة التي تربط بين الحمل، وقوة القص، وعزم الانحناء

انظر الشكل التالي:



لندرس مسافة قصيرة (δ_x) من كمرة على مسافة x من نقطة أصل مختارة. ولنجعل الحمل فوق هذه المسافة القصيرة عبارة عن w لكل وحدة طولية ويؤثر رأسيًا لأسفل؛ إذن قوة

القص عبر هذه المسافة القصيرة سوف يزداد من S إلى (S+δS) في حين أن عزم الانحناء يزداد من M إلى (M+δM). هذه المسافة القصيرة تكون في حالة اتزان وهي واقعة تحت تأثير كل من القوى الرأسية والازدواجيات couples.

القوى الرأسية:

$$(S + \delta S) - S = w\,\delta x$$

$$\therefore\ \delta S = w.\delta x$$

$$\text{or, } \frac{\delta S}{\delta x} = w$$

$\frac{dS}{dx} = w$	**(i)**

الازدواجيات **Couples**:

$$M - (M + \delta M) = -S\,\delta x + w\delta x\left(\frac{\delta x}{2}\right)$$

$$\text{or, } -\delta M = -S.\delta x + \frac{w}{2}(\delta x)^2$$

حيث أن $[(\delta x)^2]$ عبارة عن كمية صغيرة من الرتبة الثانية، لذلك يمكن جعلها تساوي صفر.

$$\therefore\ -\delta M = -S\,\delta x \qquad \text{or} \qquad S = \frac{\delta M}{\delta x}$$

وفي العلاقة التالية:

$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt.}}\ S = \frac{dM}{dx}$	**(ii)**

وبوضع تلك العلاقات في صورة تكاملية، نحصل على الآتي:

$S = \int w\,dx$	**(iii)**
$M = \int s\,dx$	**(iv)**

من المعادلة (i) نستنتج أن معدل تغير قوة القص عند أي مقطع يمثل معدل التحميل عند المقطع.

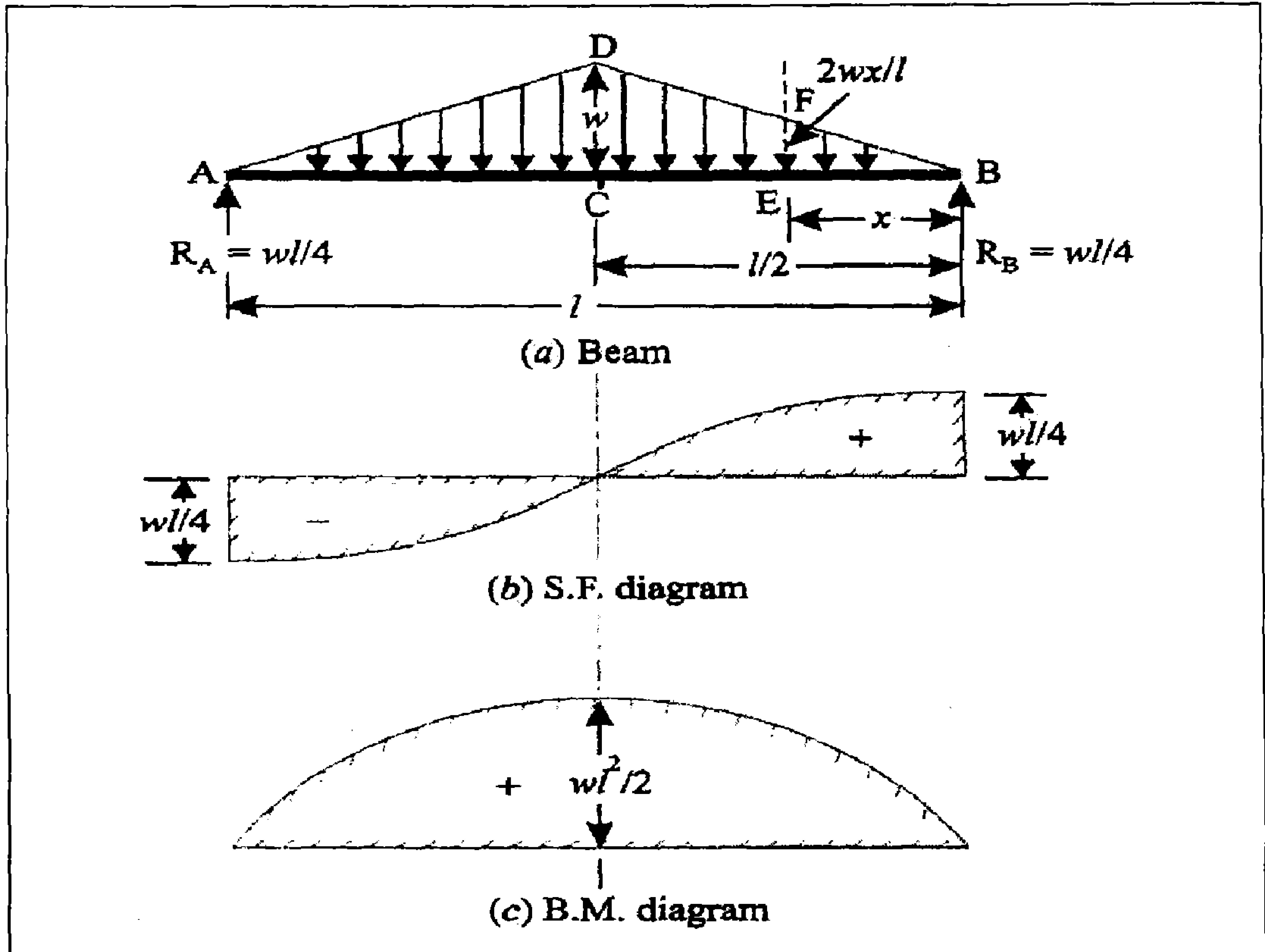
ومن المعادلة رقم (ii) نستنتج أن معدل تغير عزم الانحناء عند أي مقطع يمثل قوة القص عند هذا المقطع.

عزم الانحناء عند **M** سيصل إلى الحد الأقصى أو الحد الأدنى عندما (**dM/dx=0**) أي (**S=0**). ومن ثم، عند المقاطع التي بها تكون قوى القص أصفار أو تتغير عندها إشارات

قوى القص (لأنها تمر عبر الصفر) حينئذ يصل عزم الانحناء إما إلى الحد الأقصى أو إلى الحد الأدنى.

٤-١٦ الكمرات البسيطة الارتكاز الحاملة لحمل تتغير كثافته بانتظام من الصفر عند الأطراف إلى w لكل وحدة طولية عند منتصف البحر

في الشكل التالي نشاهد كمرة بسيطة الارتكاز AB بحرها (l) وتحمل حمل تتغير كثافته بانتظام من الصفر عند الأطراف إلى w لكل وحدة طولية عند منتصف البحر:



(a) Beam

(b) S.F. diagram

(c) B.M. diagram

الحمل الكلي على الكمرة:

$$= w \times \frac{l}{2}$$

$$\therefore \quad R_A = R_B = \frac{wl}{4}$$

معدل التحميل عند أي مقطع على مسافة x من B:

$$\frac{EF}{BE} = \frac{CD}{BC}$$

(وذلك من تشابه المثلثات BCD وBEF)

$$\therefore \ EF = \frac{CD \times BE}{BC} = \frac{w \times x}{l/2} = \frac{2\ wx}{l}$$

إذن، قوة القص عند المقطع تكون:

$$S_x = + \frac{wl}{4} - \frac{1}{2} \times x \times \frac{2\,wx}{l} = \frac{wl}{4} - \frac{wx^2}{l}$$

قوة القص عند B (حيث (x=0)):

$$S_B = + \frac{wl}{4}$$

قوة القص عند C (حيث (x=l/2)):

$$S_C = + \frac{wl}{4} - \frac{w}{l}(l/2)^2 = 0$$

قوة القص عند A:

$$S_A = + \frac{wl}{4} - w \times \frac{l}{2} = - \frac{wl}{4}$$

المعادلة العامة الخاصة بقوة القص عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية وهي تمثل قطع ناقص، ومن ثم فإن ديجرام قوة القص يكون على شكل قطع ناقص.

عزم الانحناء عند المقطع محل الدراسة يكون بالصورة التالية:

$$M_x = \frac{wl}{4}\,x - \left(\frac{1}{2}\,x \times \frac{2wx}{l}\right) \times x/3 = \frac{wl}{4}\,x - \frac{wx^3}{3l}$$

عزم الانحناء يكون صفرًا عند كل من الدعامتين A وB حيث أن الكمرة بسيطة الارتكاز.

من أجل أن يصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى لدينا الآتي:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{wl}{4} - \frac{wx^2}{l} = 0$$

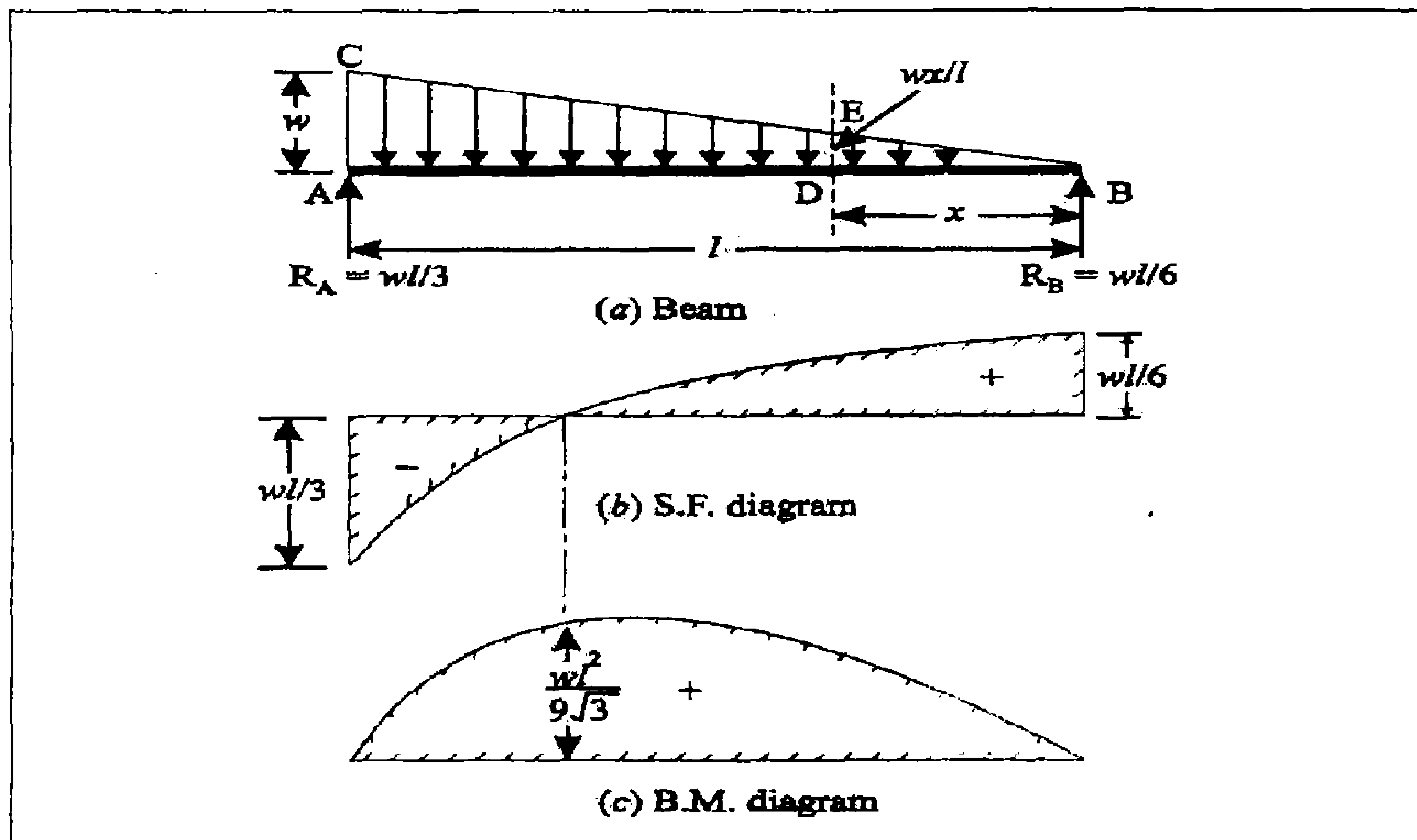
أي (x=l/2) (هنا تكون قوة القص صفرًا).

ومن ثم، يصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى عند منتصف البحر ويتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$$M_{max} = \frac{wl}{4} \times \frac{l}{2} - \frac{w}{3l} \times \left[\frac{l}{2}\right]^3 = \frac{wl^2}{8} - \frac{wl^2}{24} = + \frac{wl^2}{12}$$

٤-١٧ الكمرات البسيطة الارتكاز الحاملة لحمل تتغير كثافته بانتظام من الصفر عند أحد الأطراف إلى w لكل وحدة طولية عند الطرف الآخر

في الشكل التالي نشاهد كمرة بسيطة الارتكاز AB بحرها (l) وتحمل حمل تتغير كثافته بانتظام من الصفر عند الطرف الأيمن B إلى w لكل وحدة طولية عند الطرف الأيسر A:



(a) Beam

(b) S.F. diagram

(c) B.M. diagram

لنجعـل (R_A) و(R_B) عبـارة عـن ردود الأفعـال الرأسـية عنـد A وB. ومـن أجـل اتـزان الكمرة، وبأخذ العزوم حول A، نحصل على الآتي:

$$R_B \times l = \left(\frac{1}{2} \times l \times w\right) \times \frac{l}{3}$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{wl}{6}$$

$$\text{But,} \quad R_A + R_B = \frac{wl}{2}$$

$$\therefore \quad R_A = \frac{wl}{2} - \frac{wl}{6} = \frac{wl}{3}$$

معدل التحميل عند أي مقطع على مسافة x من B يكون:

$$\frac{DE}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

(وذلك من تشابه المثلثات BAC وBDE).

$$\text{or,} \quad DE = \frac{AC \times DB}{AB} = \frac{wx}{l}$$

إذن، قوة القص عند المقطع:

$$S_x = R_B - \text{load } BDE = \frac{wl}{6} - \frac{1}{2} \times x \times \frac{wx}{l} = \frac{wl}{6} - \frac{wx^2}{2l}$$

قوة القص عند B (حيث (x=0)):

$$S_B = +\frac{wl}{6}$$

قوة القص عند A (حيث (x=l)):

$$S_A = \frac{wl}{6} - \frac{w}{2l} \times (l)^2 = \frac{wl}{6} - \frac{wl}{2} = -\frac{wl}{3}$$

قوة القص تكون صفر عندما:

$$\frac{wl}{6} - \frac{wx^2}{2l} = 0 \text{ or } x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

عزم الانحناء عند المقطع يكون:

$$M_x = \frac{wl}{6} \times x - \left(\frac{1}{2} x \times \frac{wx}{l}\right) \times \frac{x}{3} = \frac{wlx}{6} - \frac{wx^3}{6l}$$

يصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى عندما:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{wl}{6} - \frac{wx^2}{2l} = 0$$

$$\text{or,} \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

(هنا تكون قوة القص صفرًا)

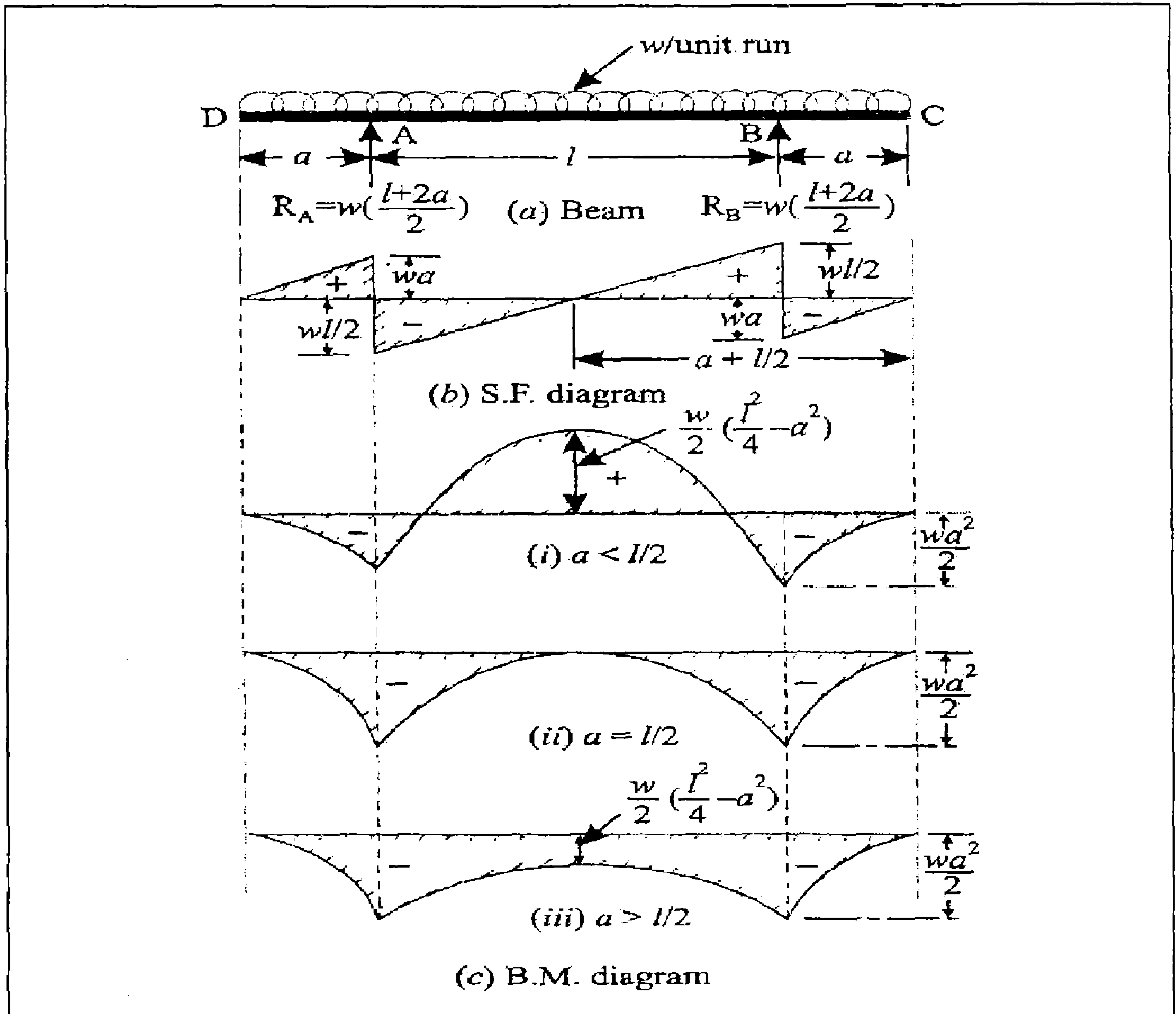
ومن ثم:

$$M_{\max} = \frac{wl}{6} \times \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{w}{6l}\left[\frac{l}{\sqrt{3}}\right]^3 = \frac{wl^2}{6\sqrt{3}} - \frac{wl^3}{18\sqrt{3}\,l} = \frac{wl^2}{9\sqrt{3}}$$

عزم الانحناء عند الدعامتين A, B يكون صفرًا حيث أن الكمرة بسيطة الارتكاز.

٤-١٨ الكمرات بسيطة الارتكاز ذات الأطناب المتساوية وتحمل حمل موزع بانتظام قدره w لكل وحدة طولية عبر الطول كله

في الشكل التالي نشاهد كمرة DABC طولها (l+2a) وترتكز على دعامتين عند A, B بحيث أن (AB=l) و(DA=BC=a):



لنجعل الكمرة تحمل حمل موزع بانتظام (w) لكل وحدة من طول الكمرة عبر الطول الكلي للكمرة.

حيث أن التحميل متماثل على الكمرة، فإن كل رد فعل رأسي يساوي نصف الحمل الكلي الواقع على الكمرة:

$$R_A = R_B = \frac{w\,(l + 2a)}{2}$$

قوة القص على يمين B تماما = w*a-.

قوة القص على يسار B تماما:

$$= -\,wa + \frac{w\,(l + 2a)}{2} = +\,\frac{wl}{2}$$

قوة القص على يمين A تماما:

$$= -\,w(l + a) + \frac{w\,(l + 2a)}{2} = -\,\frac{wl}{2}$$

قوة القص على يسار A تماما:

$$= - w\ (l + a) + 2 \times \frac{w\ (l + 2a)}{2} = + wa$$

قـوة القـص تكـون (+w*l/2) عنـد B ويكـون (-w*l/2) عنـد A وسـتكون صـفر عنـد المنتصف بين A وB.

عزم الانحناء عند B:

$$= - wa \times \frac{a}{2} = - \frac{wa^2}{2}$$

يصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى عند النقطة التي عندها القص يساوي صفر أي على مسافة (a+l/2) من C، ويتم حسابه كالآتي:

$$M_{max} = \left[-\frac{w}{2} (a + l/2)^2 + \frac{w(l + 2a)}{2} \times l/2 \right]$$

$$M_{max} = \frac{w}{2} \left[\frac{l^2}{4} - a^2 \right]$$

لو أن a أقل من (l/2) إذن ستكون (M_{max}) موجبة وسيكون ديجرام عزم الانحناء كما هو موضح في الجزء (a) بالشكل السابق.

لـو أن a تـساوي (l/2) إذن ستكون (M_{max}) صفرًا وسيكون ديجرام عزم الانحناء كما هو موضح في الجزء (b) بالشكل السابق.

لو أن a أكبر من (l/2) إذن ستكون (M_{max}) سالبة وسيكون ديجرام عزم الانحناء كما هو موضح في الجزء (c) بالشكل السابق.

لو أن عزم الانحناء صفرًا على مسافة x من أي طرف، إذن:

$$- \frac{wx^2}{2} + \frac{w(l + 2a)}{2} (x - a) = 0$$

$$\text{or} \quad x = \frac{(l + 2a) \pm \sqrt{l^2 - 4a^2}}{2}$$

٤-١٩ نقط الانقلاب

إن عـزوم الانحنـاء ذات الطبيعـة المختلفـة تـؤدي دائمًـا إلـى حـدوث انحنـاءات فـي الكمرات في اتجاهات متقابلة. ففي أي كمرة لو أن إشارة عزم الانحناء تتغير عند نقطة ما، فإن هذا يعني أن عزم الانحناء عند تلك النقطة يكون صفرًا، ويتغير انحناء الكمرة عند هذه النقطة التي يُطلق عليها نقطة انقلاب **Point of Contraflexure**. ولهذا، عند أي نقطة انقلاب تنثني في الاتجاه المقابل. ونقطة الانقلاب تسمى أيضًا نقطة انثناء **point of inflexion** أو

مفصل تصوري virtual hinge. هذا، ويمكن إيجاد نقطة الانقلاب عن طريق جعل معادلة عزم الانحناء (التي هي دالة في x) تساوي صفر بالنسبة لجزء من البحر حيث من المتوقع أن تتغير إشارة عزم الانحناء.

٤-٢٠ التحميل وديجرامات عزوم الانحناء من ديجرامات قوى القص

لو أن ديجرام قوة القص لكمرة ما معلوم، (أو لو أن ديجرام عزم الانحناء معلوم) حينئذ يمكن بسهولة جدًا رسم ديجرامات التحميل لتلك الكمرة، وخاصة عند الأخذ في الاعتبار النقط التالية:

(١) ديجرام قوة القص سوف يتألف من مستطيل (أو عدة مستطيلات)، لو أن الكمرة محملة بأحمال مركزة في نقط.

(٢) ديجرام قوة القص سيتألف من خطوط مائلة بالنسبة للجزء الواقع تحت تأثير حمل موزع بانتظام U.D.L.

(٣) ديجرام قوة القص سيتألف من خطوط من الدرجة الثانية parabolic lines بالنسبة للجزء المعرض لحمل موزع مثلثي الشكل أو على هيئة شبة منحرف.

(٤) سوف يتألف ديجرام قوة القص من خطوط من الدرجة الثالثة cubics بالنسبة للجزء المعرض لحمل موزع توزيعًا على هيئة قطع ناقص.

(٥) سوف يتألف ديجرام عزم الانحناء من خطوط مائلة لو أن الكمرة محملة بأحمال مركزة في نقط.

(٦) سوف يتألف ديجرام عزم الانحناء من خطوط من الدرجة الثانية parabolic lines بالنسبة للجزء المعرض لحمل موزع بانتظام U.D.L.

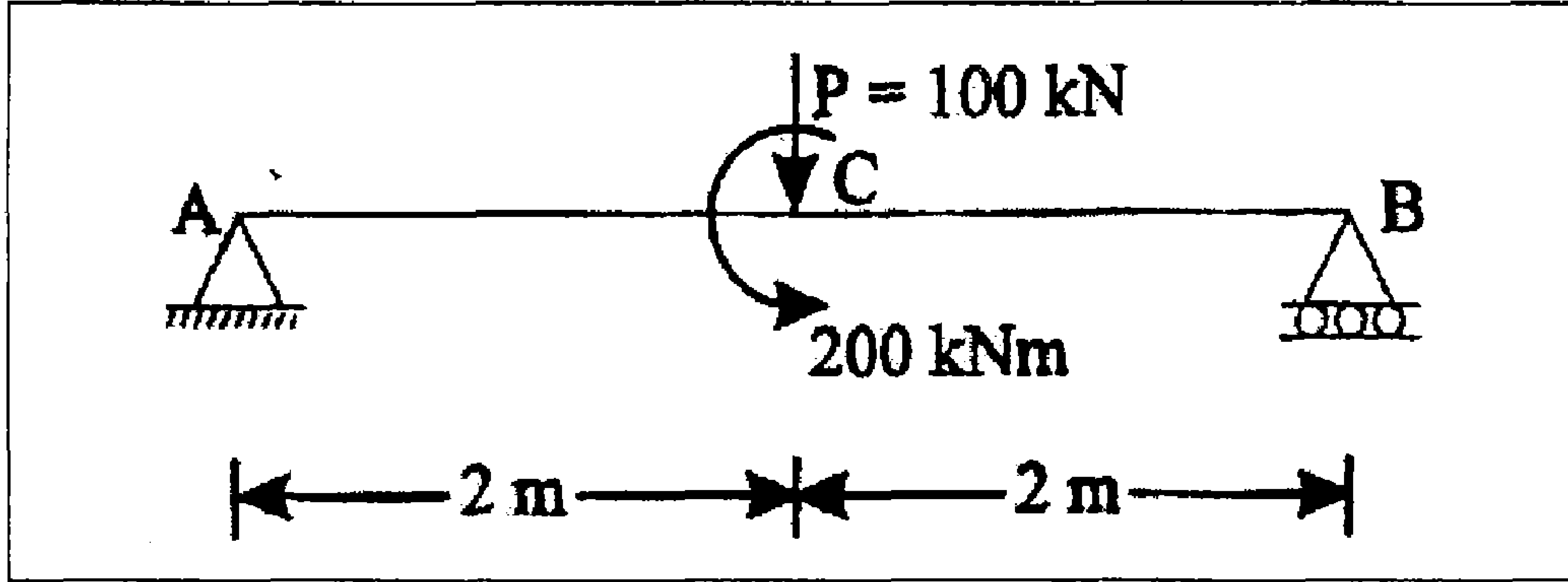
(٧) سوف يتألف ديجرام عزم الانحناء من خطوط أو متعددات حدود polynomials من الدرجة الثالثة cubics بالنسبة للجزء المعرض لحمل موزع مثلثي الشكل.

(٨) سوف يتألف ديجرام عزم الانحناء من متعددة حدود من الدرجة الرابعة forth degree polynomial لو أن توزع الحمل على هيئة قطع ناقص parabolic.

٤-٢١ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

ارسم ديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء من أجل الكمرة البسيطة الارتكاز المحملة بقوة (P) مركزة في نقطة قدرها ١٠٠ كيلونيوتن وعزم (M_c) مركز في نقطة قدره ٢٠٠ كيلونيوتن.متر كما هو موضح في الشكل التالي:



الحل

يتم أولاً تحديد ردود الأفعال (R_A) و(R_B).

بأخذ العزوم حول النقطة A، فإننا نحصل على الآتي:

$$R_B \times 4 + 200 = 100 \times 2$$

وأيضًا:

$$R_A + R_B = 100$$

إذن (R_A) = ١٠٠ كيلونيوتن.

<u>الحسابات الخاصة بقوة القص:</u>

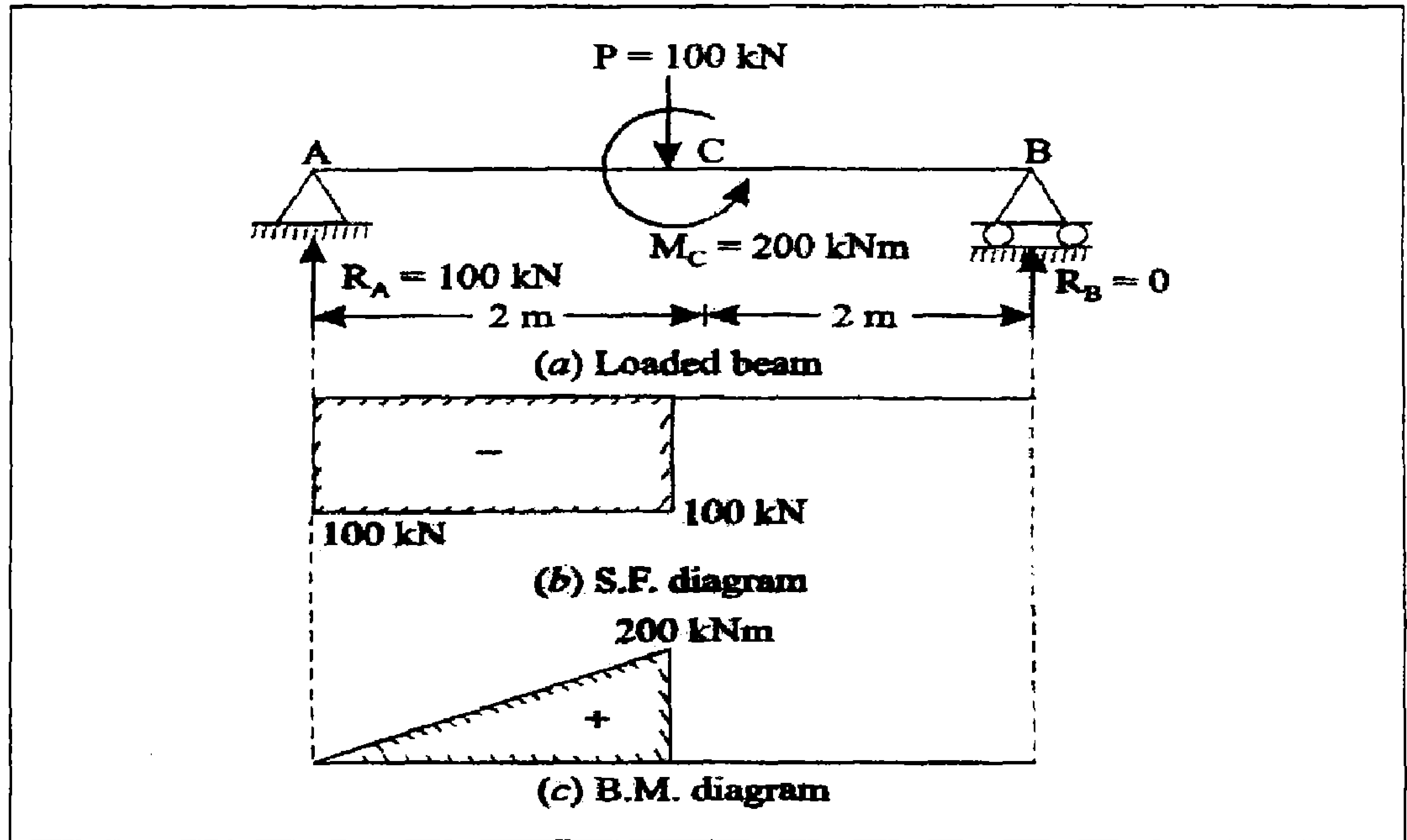
$$S_{B-C} = 0$$
$$S_{C-A} = -100 \text{ kN}$$
$$S_A = -100 \text{ kN}$$

في الجزء (b) بالشكل التالي نشاهد ديجرام قوة القص .S.F

<u>الحسابات الخاصة بعزم الانحناء **.B.M**:</u>

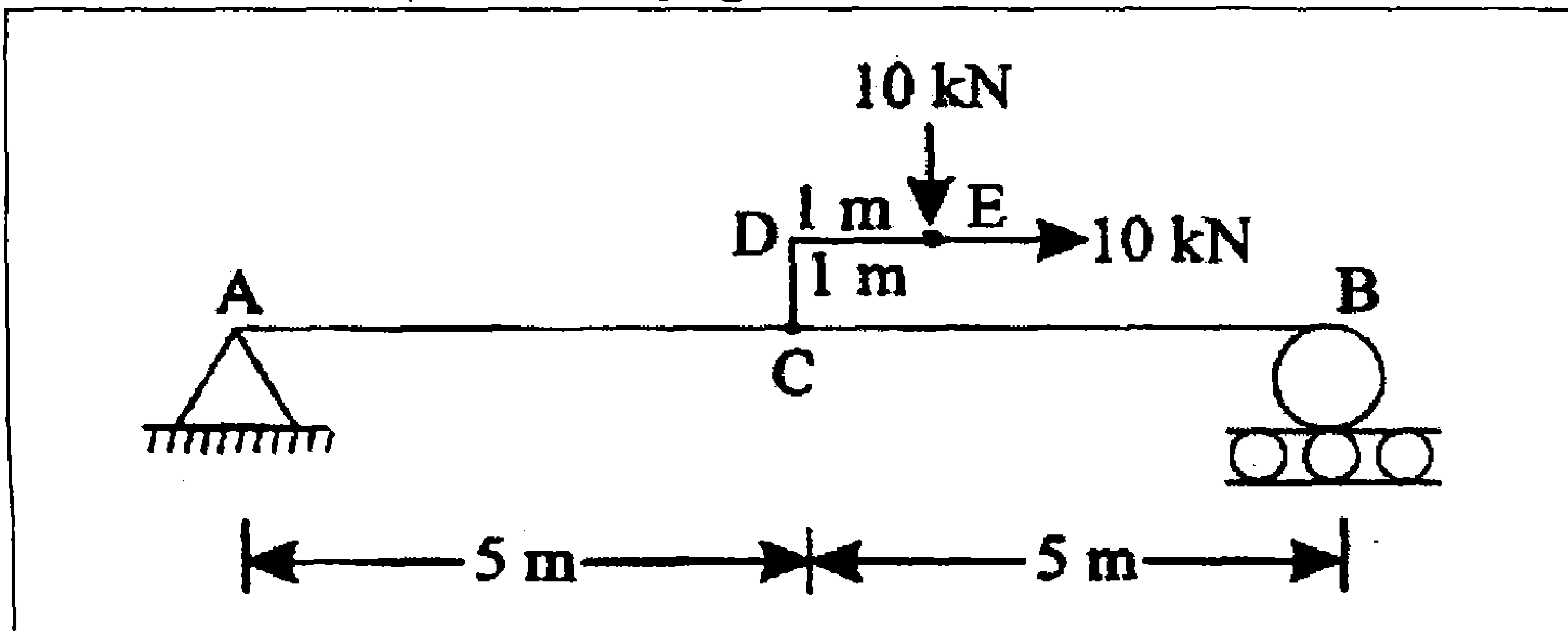
$$M_B = 0$$
$$M_C = +200 \text{ kNm}$$
$$M_A = +200 - 100 \times 2 = 0$$

في الجزء (c) بالشكل التالي نشاهد ديجرام عزم الانحناء .B.M



المثال رقم (٢)

تم لحام bracket (CDE) بكمرة AB بحرها ١٠ متر عند نقطة C. الكمرة متصلة مفصليًا بالدعامة A ومرتكزة على rollers عند الدعامة B. الأحمال الرأسية والأفقية عبارة عن ١٠ كيلونيوتن وهي تؤثر عند E، كما هو موضح في الشكل التالي:



المطلوب

رسم الآتي من أجل الكمرة مع إظهار القيم عند الـ salient points:

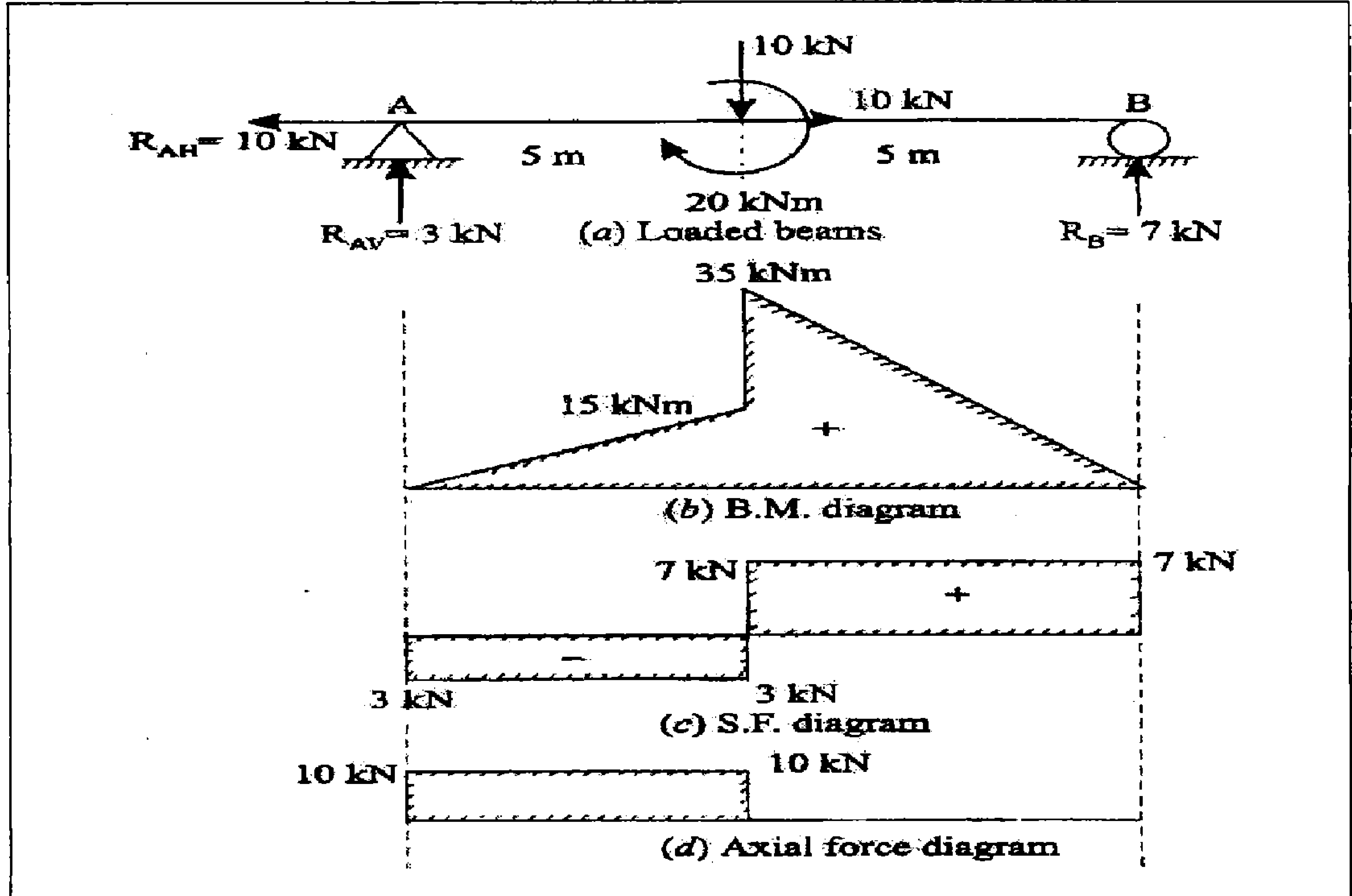
(i) ديجرام عزم الانحناء.

(ii) ديجرام قوة القص.

(iii) ديجرام القوة المحورية.

الحل

الشكل التالي يوضح كمرة مفصلية عند A ومرتكزة على roller عند B. الأحمال الرأسية والأفقية عبارة عن ١٠ كيلونيوتن وهي تؤثر عند E، من خلال الـ bracket الملحوم CDE.



(*a*) Loaded beams
(*b*) B.M. diagram
(*c*) S.F. diagram
(*d*) Axial force diagram

الحمل الرأسي الذي مقداره ١٠ كيلونيوتن المؤثر عند E يكافئ العزم المؤثر في اتجاه عقارب الساعة والذي قيمته (١٠ × ١) = ١٠ كيلونيوتن.متر المؤثر عند C معًا مع حمل رأسي يؤثر لأسفل قدره ١٠ كيلونيوتن عند C.

القوة الأفقية (١٠ كيلونيوتن) المؤثرة عند E يساوي عزم يؤثر في اتجاه عقارب الساعة قدره (١٠ × ١) = ١٠ كيلونيوتن.متر عند C معًا مع حمل محوري قدره ١٠ كيلونيوتن عند C.

الجزء (a) بالشكل السابق يوضح الكمرة المحملة بحمل رأسي قدره ١٠ كيلونيوتن يؤثر عند C مع عزم كلي في اتجاه عقارب الساعة (١٠ + ١٠) = ٢٠ كيلونيوتن.متر يؤثر عند C. وأيضًا نشاهد حمل أفقي (حمل محوري) قدره ١٠ كيلونيوتن يؤثر عند C.

<u>حساب ردود الأفعال عند كل من A وB:</u>

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
R_{AH}	المركبة الأفقية لرد الفعل عند الدعامة المفصلية A.
R_{AV}	المركبة الرأسية لرد الفعل عند الدعامة المفصلية A.
R_B	رد الفعل عند الدعامة الـ Roller (B).

من الواضح أن:

$$R_{AH} = 10\ kN\ (\leftarrow)$$

من أجل تحديد (R_B)، يتم تطبيق $\Sigma M_A = 0$.

$$R_B \times 10 = 10 \times 5 + 20 = 70$$

إذن:

$$R_B = 7\ kN\ (\uparrow)$$

وأيضًا:

$$R_{AV} + R_B = 10$$

إذن:

$$R_{AV} = 10 - R_B = 10 - 7 = 3\ kN\ (\uparrow)$$

(i) حسابات عزم الانحناء .B.M:

$M_B = 0$
$M_C = 7 * 5 - 20 = 15$ kN.m

عزم الانحناء يقل من ٣٥ كيلونيوتن.متر إلى ١٥ كيلونيوتن.متر كما هو موضح في الجزء (b) بالشكل السابق.

$M_A = 0$

في الجزء (b) بالشكل السابق نشاهد ديجرام عزم الانحناء.

(ii) حسابات قوة القص .S.F:

$S_{B-C} = 7$ kN
$S_{C-A} = 7 - 10 = -3$ kN
$S_A = -3$ kN

في الجزء (c) بالشكل السابق نشاهد ديجرام قوة القص.

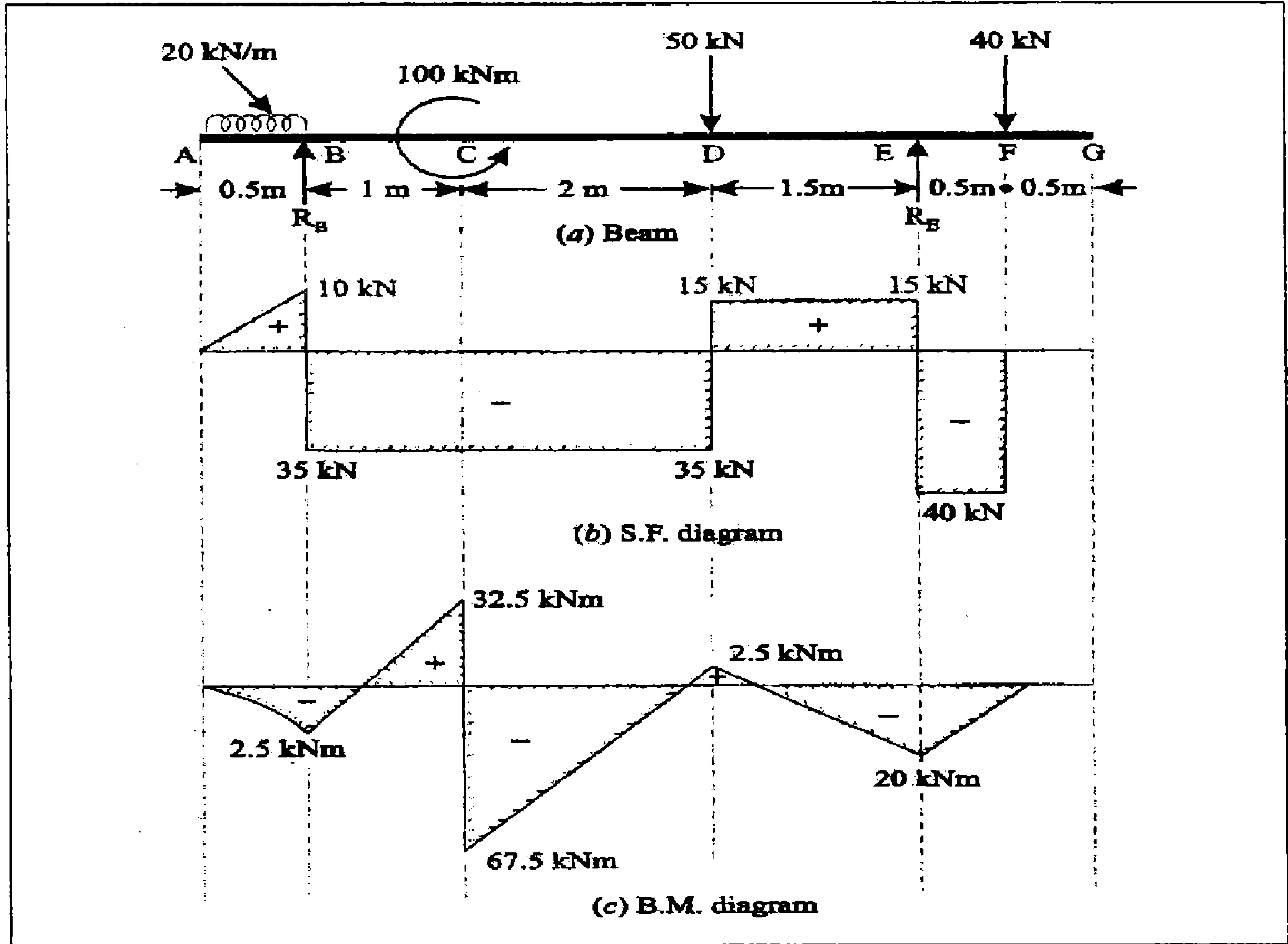
(iii) ديجرام القوة المحورية:

في الجزء (d) بالشكل السابق نشاهد ديجرام قوة القص.

المثال رقم (٣)

المطلوب تكوين كل من ديجرام عزم الانحناء وديجرام قوة القص للكمرة الموضحة في الشكل الخاص بهذا المثال.

الحل



(*a*) Beam
(*b*) S.F. diagram
(*c*) B.M. diagram

ردود الأفعال عند كل من B وE:

بأخذ العزوم حول B، إذن نحصل على الآتي:

$$R_E \times 4.5 + 20 \times 0.5 \times \frac{0.5}{2} + 100 = 50 \times 3 + 40 \times 5$$

أو:

$$4.5\ R_E + 2.5 + 100 = 150 + 200$$

R_E = 55 kN

وأيضًا:

$$R_B + R_E = 20 \times 0.5 + 50 + 40$$

أو:

$$R_B + 55 = 10 + 50 + 40$$

إذن:

R_B = 45 kN

حسابات قوة القص:

S_F = -40 kN
S_E = -40 + 55 = 15 kN

S_D = 15 - 50 = -35 kN
S_B = -35 + 45 = 10 kN
S_A = 10 - (20 * 0.5) = 0

في القسم (b) بالشكل السابق نشاهد ديجرام قوة القص .S.F

حسابات عزم الانحناء:

M_G = 0
M_F = 0
M_E = -40 * 0.5 = -20 kN.m
M_D = -40 * 2 + 55 * 1.5 = 2.5 kN.m
M_C = -40 * 4 + 55 * 3.5 - 50 * 2 = -67.5 kN.m

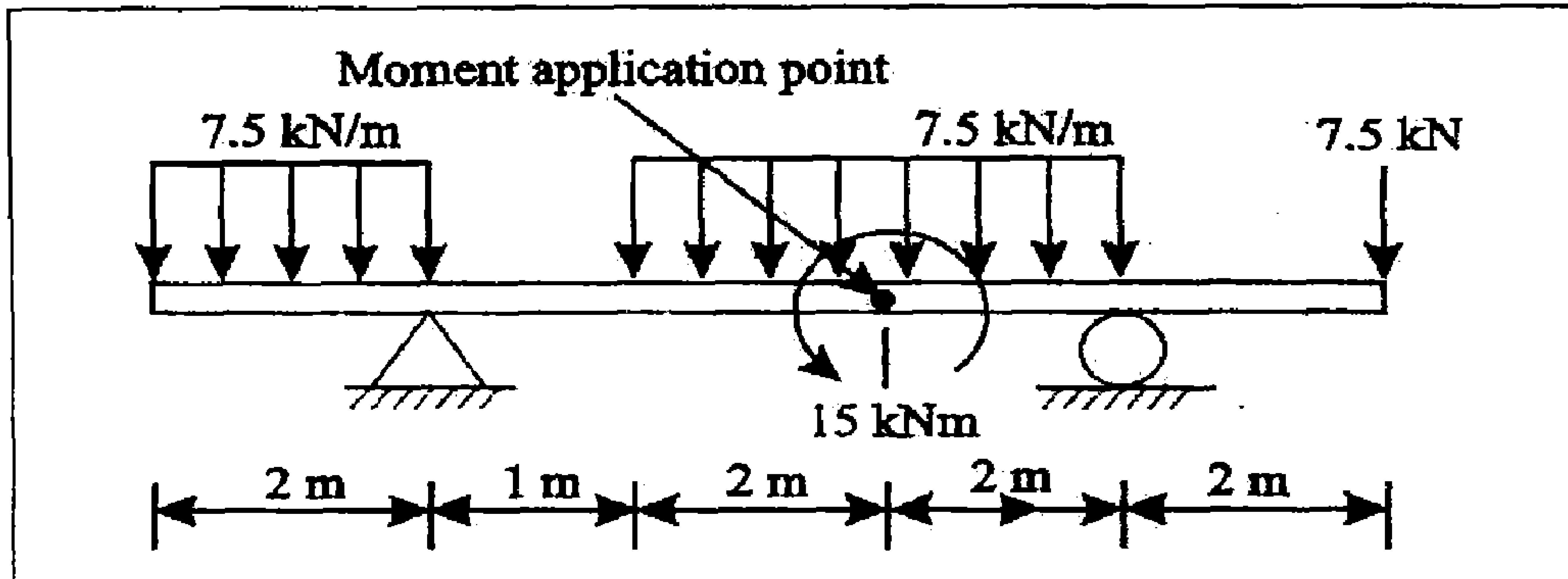
يزداد عزم الانحناء من -٦٧.٥ كيلونيوتن.متر إلى ١٠٠ كيلونيوتن.متر.

M_B = -20 * 0.5 * (0.5/2) = -2.5 kN.m
MA = 0

في القسم (c) بالشكل السابق نشاهد ديجرام عزم الانحناء B.M.

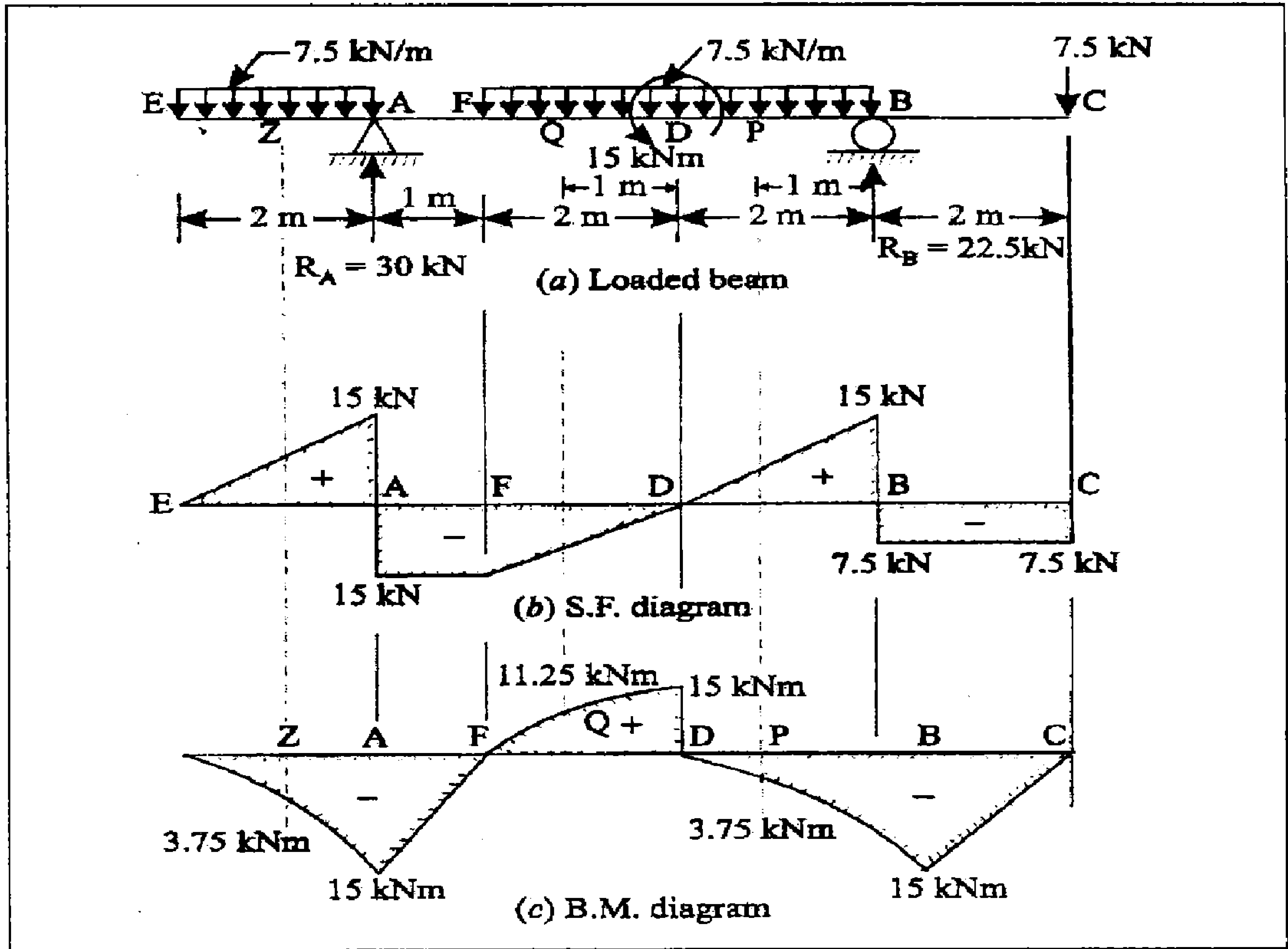
المثال رقم (٤)

ارسم **sketch** لكل من ديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء بالنسبة للكمرة الموضحة في الشكل التالي. أشر إلى كل المعالم الهامة.



الحل

في الشكل التوضيحي الخاص بهذا المثال، نشاهد الكمرة الـ overhanging مع الأحمال المعطاة.



(a) Loaded beam

(b) S.F. diagram

(c) B.M. diagram

<u>الحسابات الخاصة بردود الأفعال:</u>

بأخذ العزوم حول A، نحصل على الآتي:

$$R_B \times 5 + 7.5 \times 2 \times \frac{2}{5} + 15 = 7.5 \times 7 + 7.5 \times 4 \times \left(\frac{4}{2} + 1\right)$$

أو:

$$5R_B + 15 + 15 = 52.5 + 90$$

إذن:

$$R_B = 22.5 \text{ kN} (\uparrow)$$

وأيضًا:

$$R_A + R_B = 7.5 \times 2 + 7.5 \times 4 + 7.5 = 52.5 \text{ kN}$$

إذن:

$$R_A = 52.5 - 22.5 = 30 \text{ kN } (\uparrow)$$

في الجزء (a) بالشكل التوضيحي الخاص بهذا المثال نشاهد الكمرة وهي محملة بالقيم المحسوبة لردود الأفعال (R_A) و(R_B).

<u>حسابات قوى القص:</u>

S_C = -7.5 kN

$S_B = -7.5 + 22.5 = 15$ kN
$S_F = 15 - 7.5*4 = -15$ kN
$S_A = -15 + 30 = 15$ kN
$S_E = 15 - 7.5*2 = 0$

في الجزء (b) بالشكل التوضيحي الخاص بهذا المثال نشاهد ديجرام قوى القص.

حسابات عزوم الانحناء:

$M_C = 0$

$$M_B = -7.5 \times 2 = -15 \text{ kNm}$$

$$M_P = -7.5 \times (2+1) + 22.5 \times 1 - 7.5 \times 1 \times \frac{1}{2} = -3.75 \text{ kNm}$$

$$M_D = -7.5 \times 4 + 22.5 \times 2 - 7.5 \times 2 \times \frac{2}{2} + 15$$

$$M_D = -30 + 45 - 15 + 15 = 15 \text{ kNm}$$

(عزم الانحناء يتغير من صفر إلى ١٥ كيلونيوتن.متر عند D).

$$M_Q = -7.5 \times 5 + 22.5 \times 3 - 7.5 \times 3 \times \frac{3}{2} + 15$$

$$M_Q = -37.5 + 67.5 - 33.75 + 15 = 11.25 \text{ kNm}$$

$$M_F = -7.5 \times 6 + 22.5 \times 4 - 7.5 \times 4 \times \frac{4}{2} + 15 = -45 + 90 - 60 + 15 = 0$$

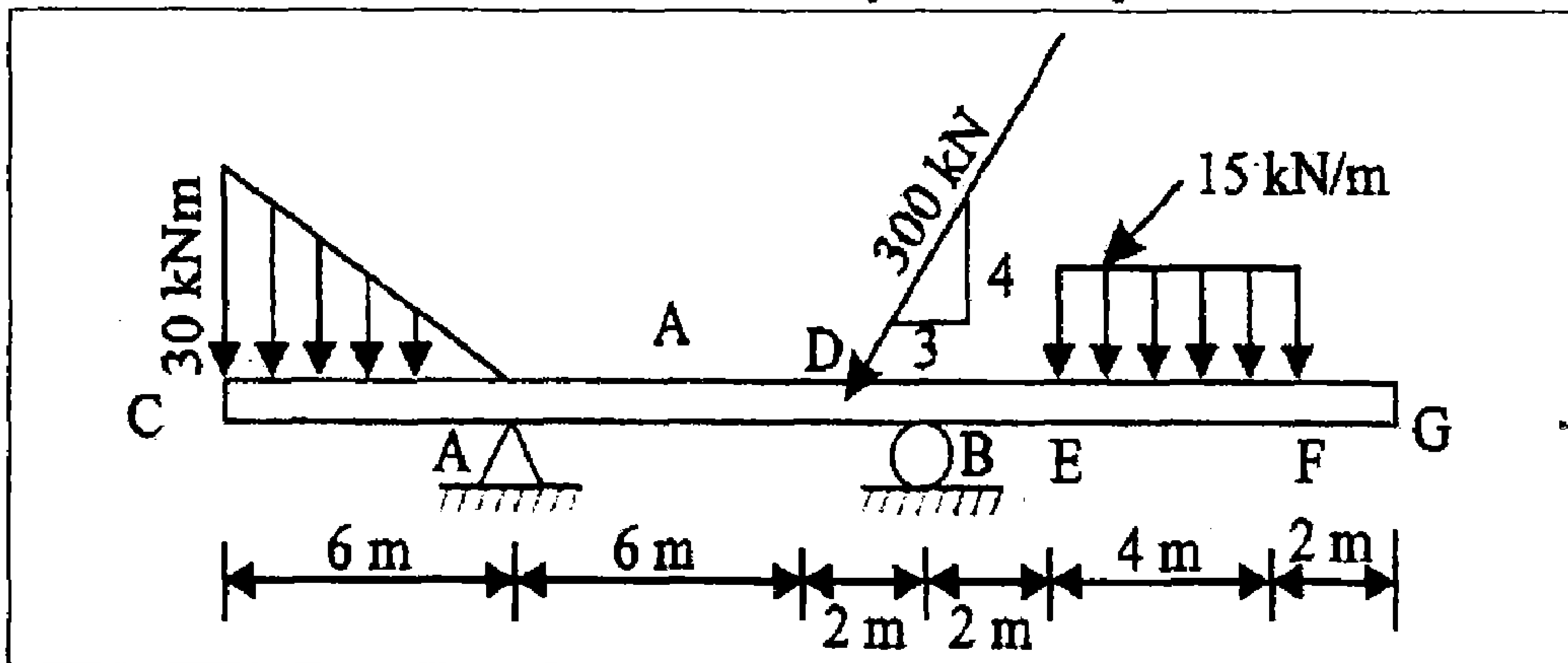
$$M_Z = -7.5 \times 1 \times \frac{1}{2} = -3.75 \text{ kNm} \quad \text{(From L.H.S.)}$$

$M_E = 0$

في الجزء (c) بالشكل التوضيحي الخاص بهذا المثال نشاهد ديجرام عزم الانحناء.

المثال رقم (٥)

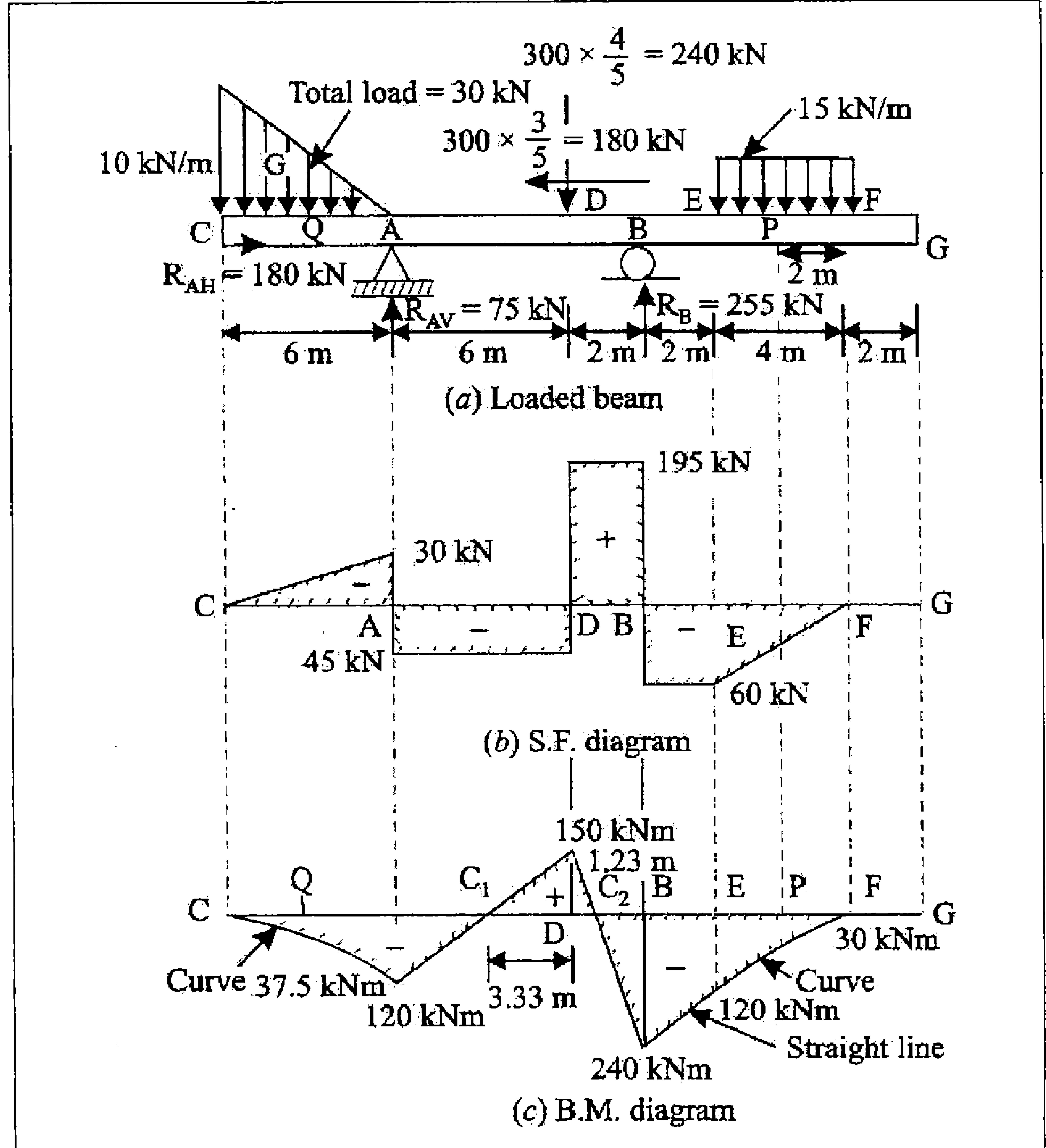
المطلوب تكوين كل من ديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء من أجل الكمرة المحملة الموضحة في الشكل التالي:



وأيضًا أوجد موضع الانقلاب بالنسبة للكمرة.

الحل

في الشكل التوضيحي التالي نشاهد الكمرة المحملة. من هذا نرى حمل مائل قدره ٣٠٠ كيلونيوتن ويؤثر عند D.



بتحليل هذه القوة أفقيًا ورأسيًا، يصبح لدينا الآتي:

المركبة الرأسية:

$$= 300 \times \frac{4}{5} = 240 \text{ kN } (\downarrow)$$

المركبة الأفقية:

$$= 300 \times \frac{3}{5} = 180 \text{ kN } (\leftarrow)$$

حيث أن الدعامة عند B ليست rollers فإنها لا تستطيع أن تقدم أي رد فعل أفقي في حين أن الدعامة المفصلية عند A فتقدم رد فعل أفقي. ومن ثم:

$$R_{AH} = 180 \text{ kN} (\rightarrow)$$

ردود الأفعال:

لكي يتم تحديد رد الفعل (R_B) فإننا نطبق $\Sigma M_A = 0$:

$$R_B \times 8 + \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 6\right) \times \frac{2}{3} \times 6 = 15 \times 4 \times \left(\frac{4}{2} + 2 + 2 + 6\right) + 240 \times 6$$

أو:

$$8R_B + 120 = 720 + 1440$$

إذن:

$$R_B = 255 \text{ kN} (\uparrow)$$

ولكن:

$$R_{AV} + R_B = \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 6\right) + (15 \times 4) + 240 = 330$$

إذن:

$$R_{AV} = 330 - 225 = 75 \text{ kN } (\uparrow)$$

حسابات قوة القص:

S_{G-F} = 0
S_F = -15 * 4 = -60 kN

(قوة القص تزداد من صفر إلى ٦٠ كيلونيوتن).

S_B = -60 + 255 = 195 kN
S_D = 195 - 240 + 75 = 30 kN
S_C = 30 - 0.5 * 10 * 6 = 0

في الجزء (b) بالشكل التوضيحي السابق نشاهد ديجرام قوة القص.

حسابات عزم الانحناء **B.M.**:

M_C = 0
M_F = 0
M_P = -15 * 2 * 2/2 = -30 kN.m
M_E = -15 * 4 * 4/2 = -120 kN.m
M_B = -15 * 4 * (4/2 + 2) = -240 kN.m
M_D = -15 * 4 * (4/2 + 2 + 2) + 255 * 2 = 150 kN.m
M_A = -15 * 4 * (4/2 + 2 + 2 + 6) + 255 * 8 - 240 * 6 = -120 kN.m

لندرس سويًا مقطع عرضي تخيلي XX يوجد على مسافة x من الدعامة A، في الجزء CA من الكمرة.

$$M_x = -15 \times 4\left(\frac{4}{2} + 2 + 2 + 6 + x\right) + 255 \times (2 + 6 + x)$$
$$- 240\ (6 + x) + 75x - \frac{1}{2}x.\frac{5}{3}x.\frac{1}{3}x$$

علمًا بأن $\frac{y}{x} = \frac{10}{6}$ or $y = \frac{10}{6}x = \frac{5}{3}x$ (كما هو موضح في الجزء (a) بالشكل التوضيحي السابق).

$$M_x = -60(12 + x) + 255(8 + x) - 240\ (6 + x) + 75x - \frac{5}{18}x^3$$

$$M_{Q(x=3)} = -60(12 + 3) + 255(8 + 3) - 240(6 + 3) + 75 \times 3 - \frac{5}{18} \times 3^3$$

$$M_{Q(x=3)} = -900 + 2805 - 2160 + 225 - 7.5 = -37.5 \text{ kNm}$$

$$M_A = -60(12 + 6) + 225(8 + 6) - 240(6 + 6) + 75 \times 6 - \frac{5}{18} \times 6^3$$

$$M_A = -1080 + 3570 - 2880 + 450 - 60 = 0$$

في الجزء (c) بالشكل التوضيحي السابق نشاهد ديجرام عزم الانحناء.

نقط الانقلاب أن الانعكاس inflextion points:

لنجعل كل من (C_1) و(C_2) عبارة عن نقط الانقلاب. ولنجعل النقطة (C_2) توجد على مسافة x من النقطة B ومن ثم:

$$M_x = -15 \times 4\left(\frac{4}{2} + 2 + x\right) + 255x = 0$$

أو:

$$-60(4 + x) + 255x = 0$$

إذن:

$x = 1.23$ m (from B) (Ans.)

والآن، لنجعل النقطة (C_1) توجد على مسافة x من النقطة D، ومن ثم:

$$M_x = -15 \times 4\left(\frac{4}{2} + 2 + 2 + x\right) + 255(2 + x) - 240x = 0$$

أو:

$$-60\ (6 + x) + 255\ (2 + x) - 240x = -360 - 60x + 510 + 255x - 240x = 0$$

إذن:

$x = 3.33$ m (from D) (Ans.)

نقطتي الانقلاب (C_1) و(C_2) نشاهدهما في الجزء (c) بالشكل التوضيحي الخاص بهذا المثال.

الفصل الخامس

إجهادات الإنثناء في الكمرات

في هذا الفصل

- نظرية الانثناء البسيط (معادلة الانثناء).
- موضع المحور الطبيعي.
- معامل المقطع.
- التطبيق العملي لمعادلة الانثناء.
- الكمرة المصنوعة من مواد غير متجانسة (الكمرة المنشطرة بالفولاذ Flitched Beam).
- الكمرات ذات القوة المنتظمة.
- الشريحة ثنائية المعدن Bimetallic Strip.
- الخرسانة المسلحة R.C.C.

٥-١ نظرية الانثناء البسيط (معادلة الانثناء)

عندما تكون كمرة ما محملة فإنها تنثني وتكون معرضة لعزوم انحناء. وبالتالي، يتم إنتاج إجهادات الطولية أو إجهادات انثناء في المقطع العرضي. ومن أجل تحديد المنفعة العملية لأي كمرة، فمن المهم جدًا أن يتم تأسيس علاقة بين نصف قطر الانحناء الذي تنثني به الكمرة، وعزم الانحناء، وإجهاد الانثناء وأبعاد المقطع العرضي للكمرة. المعادلة التي تصل بين تلك الكميات تسمى "معادلة الانثناء **bending equation**".

الفرضيات الخاصة بنظرية الانثناء

(١) مادة الكمرة تامة التجانس في جميع الأنحاء.

(٢) الاجهاد الناتج يكون متناسبًا مع الانفعال ولا يمكن للإجهاد أن يتعدى حد المرونة في أي موضع بالكمرة.

(٣) قيمة معامل المرونة (E) لا تتغير بالنسبة لألياف الكمرة سواء كانت معرضة للشد أو معرضة للضغط.

(٤) الاتجاه العرضي للكمرة، الذي يكون مستويًا قبل الانثناء، يظل مستويًا بعد الإنثناء.

(٥) لا توجد محصلة جذب أو دفع على المقطع العرضي للكمرة.

(٦) الأحمال يتم تطبيقها في مستوى الانثناء.

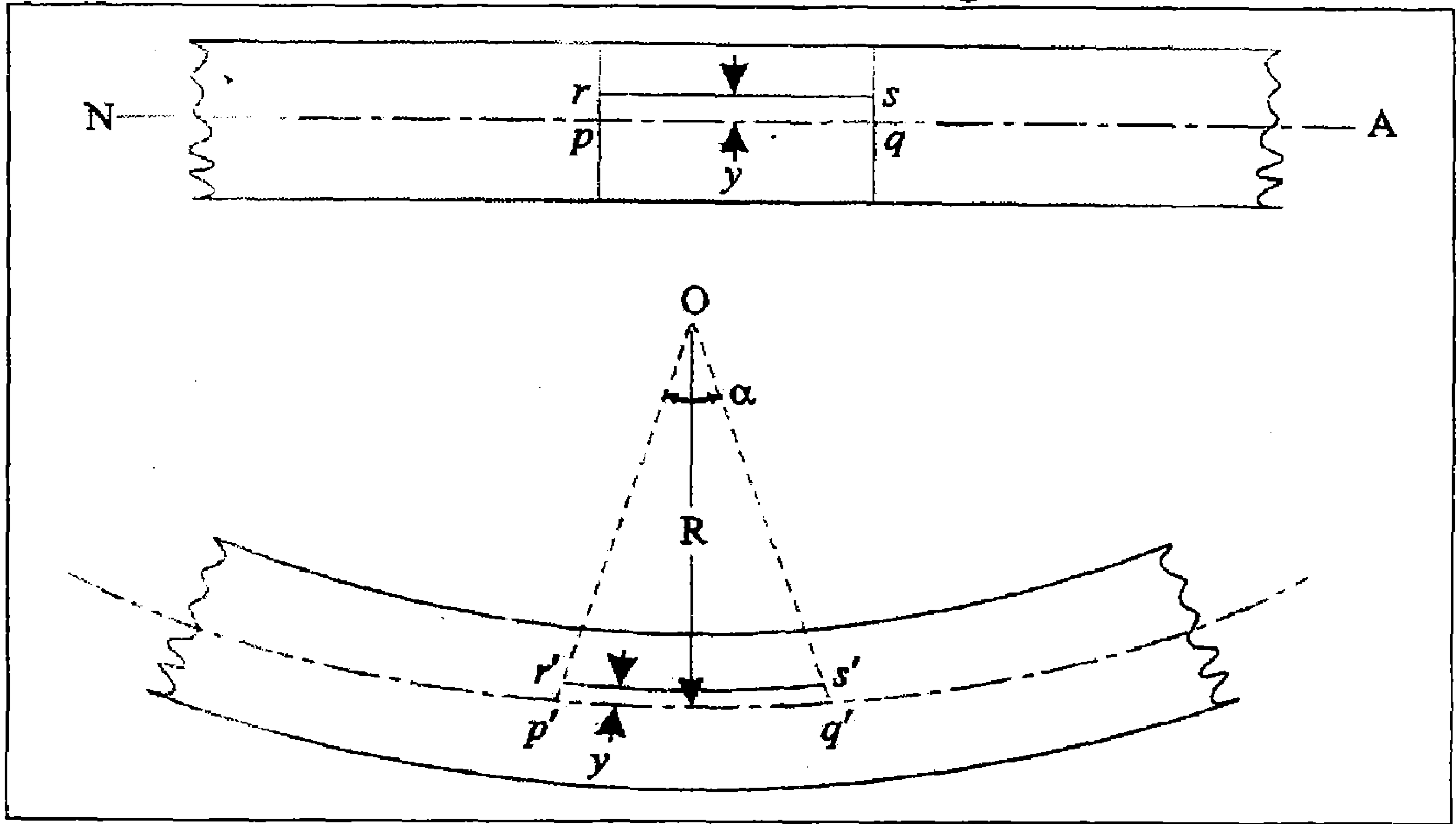
(٧) مقطع الكمرة في الاتجاه العرضي يكون متماثلاً حول خط يمر عبر مركز الجاذبية في مستوى الانثناء.

(٨) نصف قطر انحناء الكمرة قبل الانثناء يكون كبيرًا جدًا مقارنة بأبعادها في الاتجاه العرضي.

ينتج عن عزم الانحناء أو الازدواج أن طول الكمرة سيتخذ شكلاً منحنيًا، ويمكن التعامل مع مسافة قصيرة جدًا على إنها جزء من قوس بدائرة. يتبع هذا أنه عند أنصاف الأقطار الخارجية ستكون المادة في حالة شد وعند أنصاف الأقطار الداخلية ستكون المادة في حالة انضغاط، وعند نصف قطر معين لن يكون هناك أي إجهاد. هذه الطبقة من المادة تسمى الطبقة الطبيعية أو المحور الطبيعي.

في الشكل التالي نشاهد مقطع طولي في كمرة؛ وفيه نجد أن الطبقة الطبيعية (المحور الطبيعي) .N.A منثني ليؤلف قوس من دائرة نصف قطرها R. ومن ثم كان طول الطبقة الطبيعية

قبل الانثناء عبارة عن pq وأصبح p'q' بعد الانثناء.



لندرس طبقة ما (rs) توجد على مسافة y من pq، التي تصبح r's' بعد الانثناء. ولنجعل p'q' تقابل زاوية (α) عند مركز الانحناء، إذن:

$p'q' = R\alpha$ and $r's' = (R - y)\,\alpha$

إبتداءًا، الطبقات المتوازية يمكن أن يكون لها أطوال متساوية، لهذا (pq=rs) وحيث أنه لا يوجد أي إجهاد عند الطبقة الطبيعية، إذن لن يكون هناك انفعال أيضًا، إذن:

$p'q' = pq$

والآن، الانفعال في rs:

$$= \frac{rs - r's'}{rs}$$

ولكن $rs = pq = p'q'$، إذن:

$$\text{Strain} = \frac{p'q' - r's'}{rs}$$

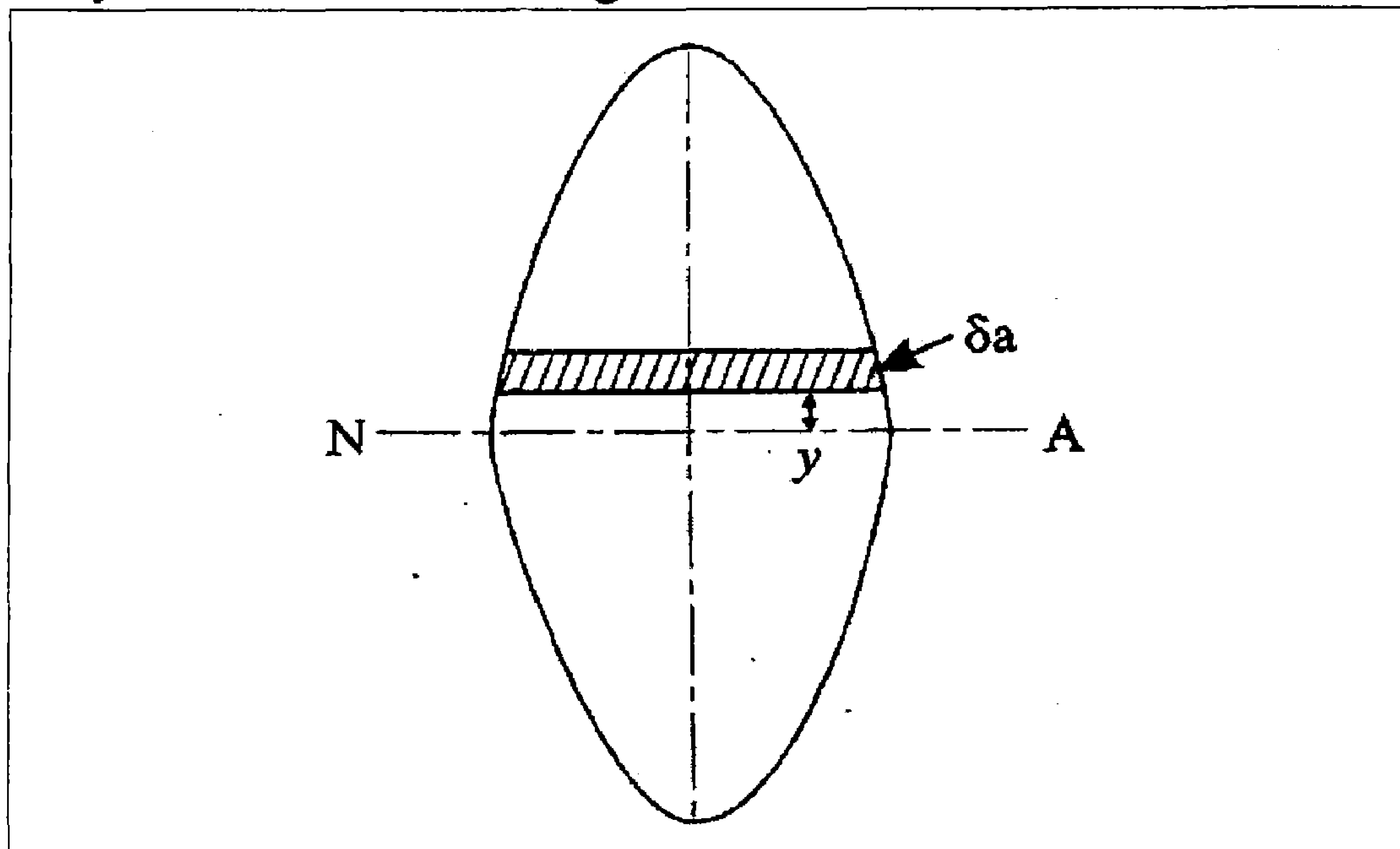
ولكن $p'q' = R\,\alpha$، كما أن $r's' = (R - y)\,\alpha$، ومن ثم يتم حساب الانفعال من خلال العلاقة التالية:

$$= \frac{R\alpha - (R - y)\alpha}{R\alpha} = \frac{y}{R}$$

والآن، لو أن الإجهاد في rs عبارة عن (σ) ومعامل يانج عبارة عن E، إذن:

$\text{Strain} = \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{R}$ or $\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$	(5-1)

لو أننا قمنا الآن بدراسة مقطع ما في الاتجاه العرضي للكمرة (كما هو موضح في الشكل التالي)، إذن لنجعل شريحة مساحتها (δa)، وتقع على مسافة y من المحور الطبيعي.



إذن، القوة العمودية على هذه المساحة (δa) تكون:

$$= \frac{E}{R} y \delta a$$

الآن، يتم حساب عزم هذه القوة حول المحور الطبيعي كالآتي:

$$= \frac{E}{R} y \ \delta a \times y \quad \text{or} \quad \frac{E}{R} y^2 \ \delta a$$

هذا هو عزم المقاومة للمادة الحادثة بسبب الإجهاد المنتج، أما عزم المقاومة الكلي فيتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$$= \Sigma \frac{E}{R} y^2 \ \delta a \quad \text{or} \quad \frac{E}{R} \Sigma y^2 \ \delta a$$

كما أن $\Sigma y^2 \ \delta a$ عبارة عن العزم الثاني للمساحة حول المحور الطبيعي (I_{NA}).

إذن، عزم المقاومة يكون:

$$M = \frac{E}{R} \times I$$

ولكن حيث أن عزم المقاومة يوازن عزم الانحناء المطبق، أذن:

$$M = \frac{E}{R} \times I \quad \text{or} \quad \frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

ولكن $\frac{E}{R}=\frac{\sigma}{y}$، إذن:

$\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y}=\frac{E}{R}$	(5-2)

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
M	عزم المقاومة.
I	عزم القصور الذاتي للمقطع حول المحور الطبيعي .N.A.
E	معامل يانج للمرونة.
R	نصف قطر انحناء المحور الطبيعي.
σ	إجهاد الانثناء.

هذه المعادلة تسمى "معادلة الانثناء Bending Equation".

٢-٥ موضع المحور الطبيعي

عندما ندرس المقطع العرضي بكمرة ما (انظر الشكل السابق)، نقول أنه لن توجد قوة محصلة على المقطع من أجل حالة الاتزان.

القوة المؤثرة في مساحة صغيرة (δa) على مسافة y من المحور الطبيعي يتم حسابها كالآتي:

$$\delta F=\sigma\cdot\delta a=\frac{E}{R}y\cdot\delta a$$

أو، القوة الكلية العمودية على المقطع تكون:

$$F=\frac{E}{R}\Sigma y\cdot\delta a$$

إذن، من أجل أن تكون القوة المحصلة صفرًا، إذن:

$$\Sigma y\cdot\delta a=0.$$

والآن، $\Sigma y\cdot\delta a$ عبارة عن عزم المساحة المقطعية حول المحور الطبيعي، وحيث أن هذا العزم يساوي صفر، إذن ينبغي أن يمر المحور الطبيعي عبر مركز المساحة.

ومن ثم، يمر المحور الطبيعي أو الطبقة الطبيعية عبر مركز المساحة.

٣-٥ معامل المقطع Section Modulus

بالرجوع إلى معادلة الانثناء، $\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y}$، نحصل على الآتي:

$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{M}{I/y} \quad \text{or} \quad \sigma = \frac{M}{Z}$	(5-3)

حيث إن:

المعنى والاستخدام	المعامل
معامل المقطع وهو ناتج قيمة I على y.	Z

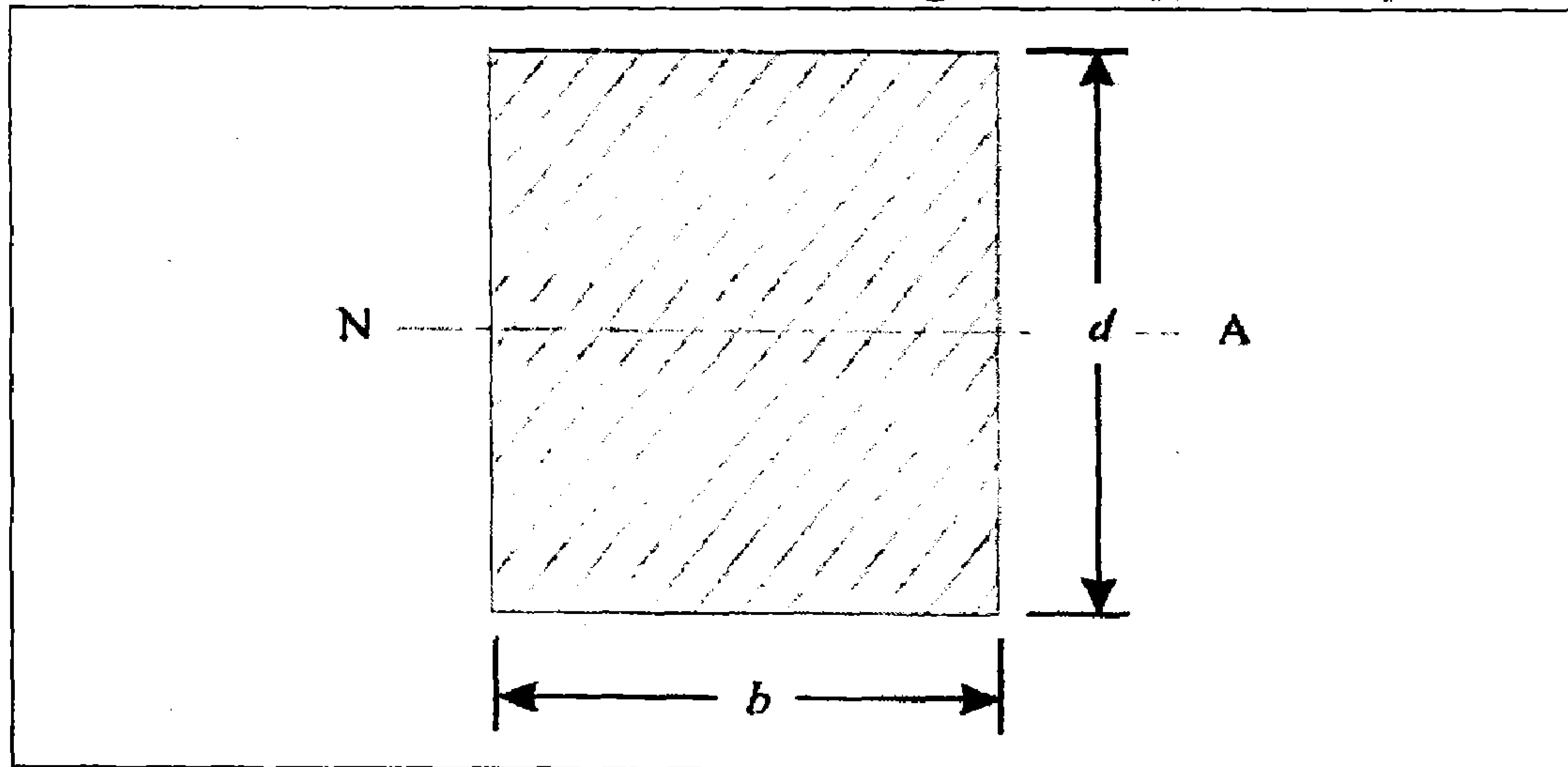
معامل المقطع عادة ما يُستعان به من أجل كل المقاطع القياسية وعمليًا يعد أكثر استخدامًا من العزم الثاني للمساحة (أو عزم القصور الذاتي .M.O.I).

- قوة ومتانة مقطع الكمرة تعتمد بصفة أساسية على معامل المقطع.

فيما يلي سنقوم بحساب معاملات المقطع للمقاطع المستطيلة والدائرية.

(i) المقطع المستطيل:

في الشكل التالي نشاهد مقطع مستطيل عرضه b وعمقه d:



لنجعل المحور المركزي الأفقي عبارة عن المحور الطبيعي.

معامل المقطع (Z) = عزم القصور الذاتي حول المحور الطبيعي / مسافة أقصى نقطة بالمقطع من المحور الطبيعي.

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

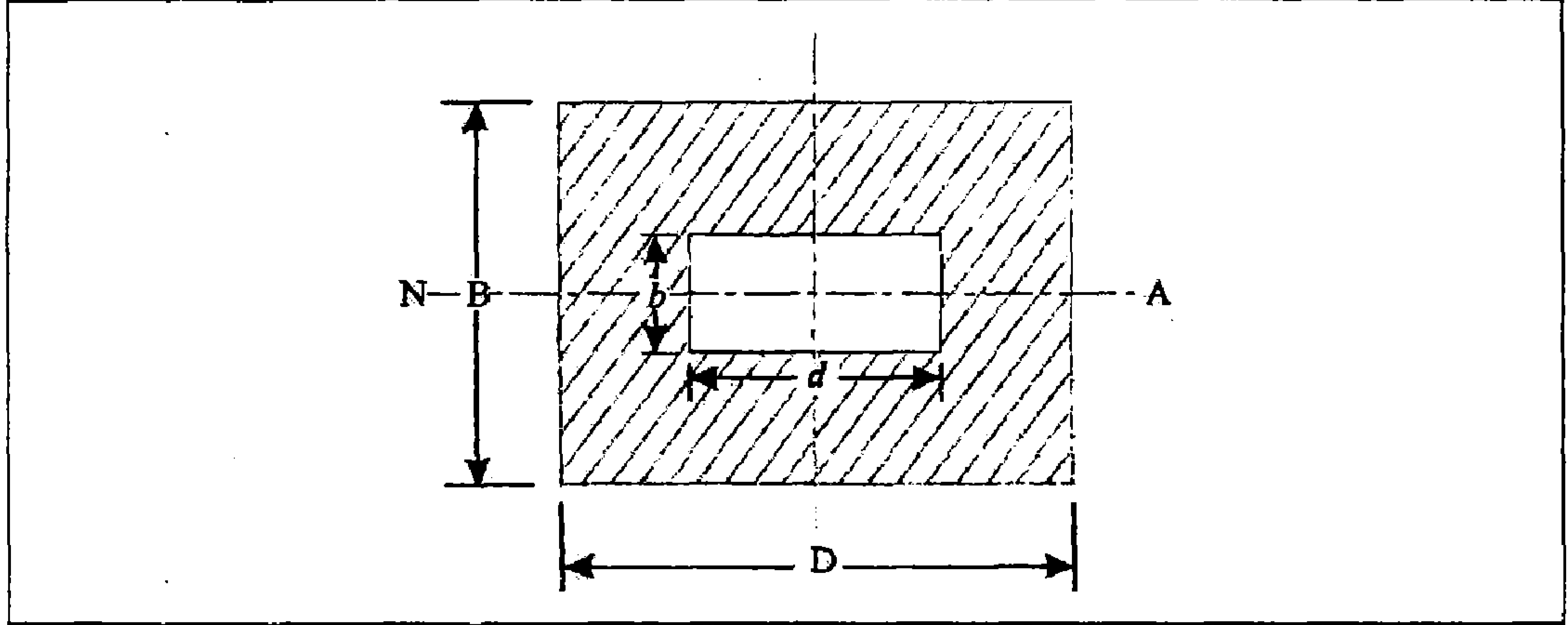
ولكن، $y_{max} = \frac{d}{2}$ and, $I = \frac{bd^3}{12}$ ، إذن:

$Z = \frac{bd^3/12}{d/2} = \frac{bd^2}{6}$	(5-4)

(عزم المقاومة، $M = \sigma Z = \sigma \times \frac{1}{6} b d^2$).

(ii) مقطع مستطيل مفرغ من الداخل:

انظر الشكل التالي:



عزم القصور الذاتي حول المحور الطبيعي:

$$I = \frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12} = \frac{1}{12}(BD^3 - bd^3)$$

$$y_{max} = D/2$$

إذن، معامل المقطع:

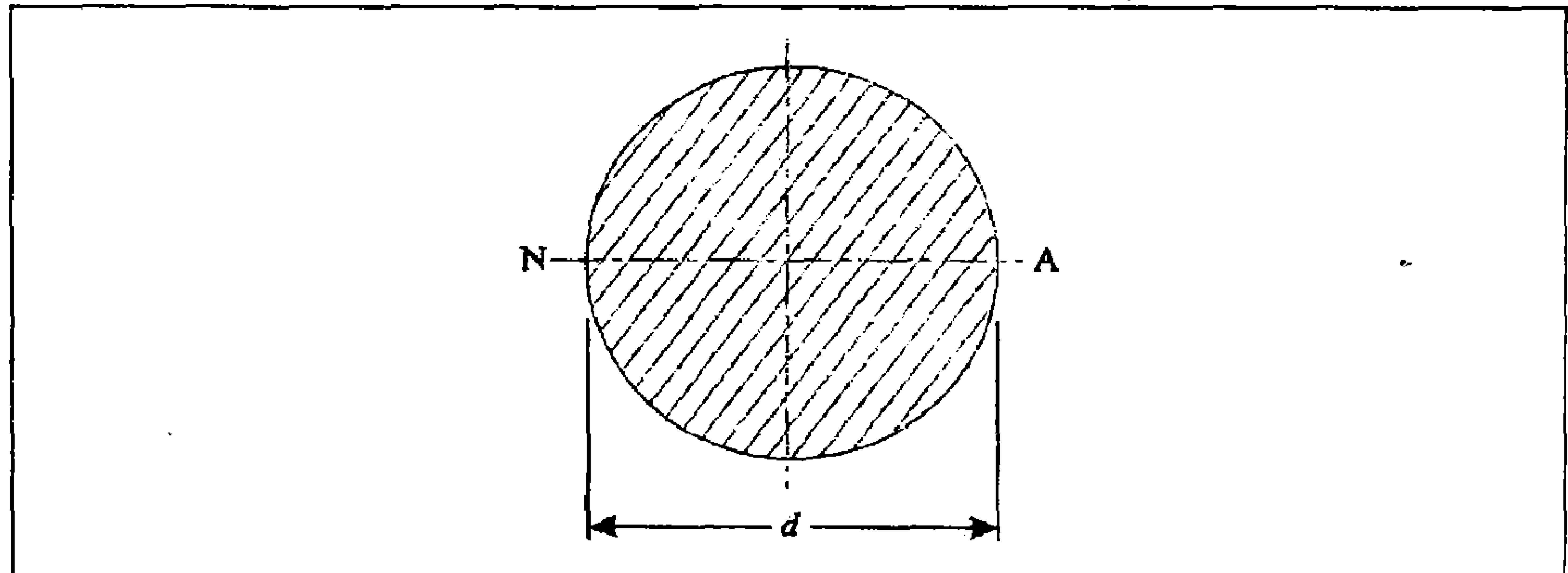
$Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{(BD^3 - bd^3)/12}{D/2} = \left(\frac{BD^3 - bd^3}{6D}\right)$	**(5-5)**

عزم المقاومة:

$$M = \sigma Z = \sigma \times \left(\frac{BD^3 - bd^3}{6D}\right)$$

(iii) المقطع الدائري:

انظر الشكل التالي:



عزم القصور الذاتي للمقطع حول المحور الطبيعي:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$y_{max} = d/2$$

معامل المقطع:

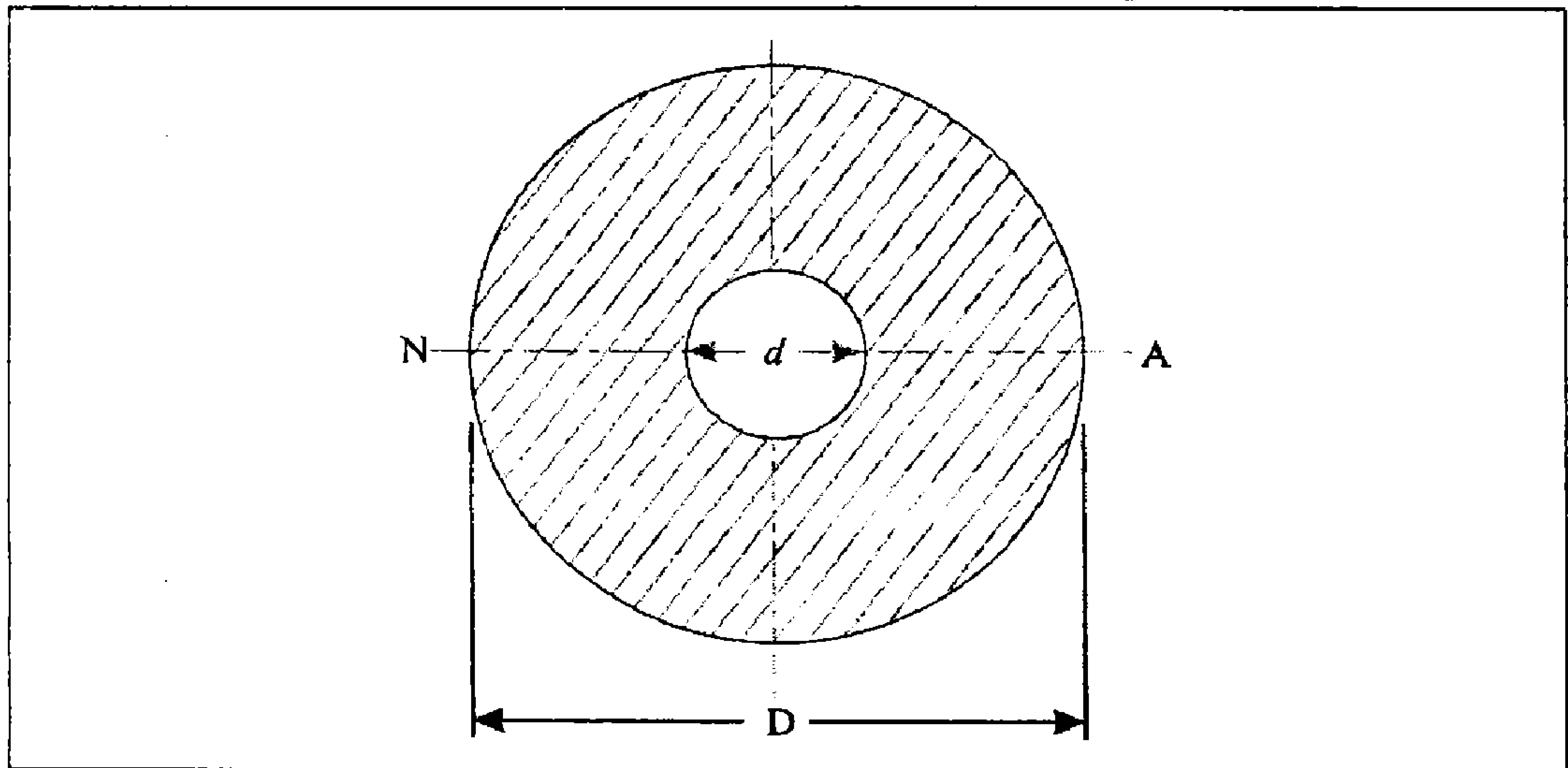
$Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$	**(5-6)**

علمًا بأن عزم المقاومة:

$$= \sigma \cdot Z = \sigma \times \frac{\pi d^3}{32}$$

<u>iv) المقطع الدائري المفرغ من الداخل:</u>

انظر الشكل التالي:



عزم القصور الذاتي للمقطع حول المحور الطبيعي:

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \text{ and } y_{max} = \frac{D}{2}$$

إذن، معامل المقطع يكون:

$Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \times \frac{2}{D} = \frac{\pi}{32}\left(\frac{D^4 - d^4}{D}\right)$	**(5-7)**

علمًا بأن عزم المقاومة:

$$M = \sigma \times Z = \sigma \times \frac{\pi}{32} \frac{(D^4 - d^4)}{D}$$

٥-٤ التطبيق العملي لمعادلة الانثناء

معادلة الانثناء ($\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y}=\frac{E}{R}$) تعتمد أساسًا على نظرية الانثناء الصافي والفرضيات المتخذة بهذا الخصوص، والتي تتطلب وجوب أن تكون الكمرة معرضة لعزوم انحناء ثابتة وغير مختلطة بقوى القص، ولكن في الممارسة العملية الفعلية نجد أن عزم الانحناء يتباين من نقطة لأخرى عبر طول الكمرة وأيضًا، عزم الانحناء يكون مصحوبًا بقوة قص. ولكن، في عدد ضخم من الحالات العملية، يصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى عندما تتغير إشارة قوة القص أي عبر خط قوة القص الصفرية. بهذه الطريقة نجد أن المتطلبات الخاصة بالانثناء البسيط تتحقق تقريبًا في النقطة التي عندها يصل عزم الانحناء إلى الحد الأقصى ومن ثم يبدو أنه الممكن تطبيق معادلة الانثناء عند تلك النقطة فقط.

٥-٥ الكمرة المصنوعة من مواد غير متجانسة (الكمرة المنشطرة بالفولاذ Flitched Beam)

من المعتاد أن يتم تسليح الكمرات لمواجهة الأحمال الأكبر من القيم المسموح بها عادة، وفي بعض الحالات يمكن استخدام مواد مختلفة لجعل التسليح متماثل حول المحور الطبيعي.

التعبيرات التالية تصلح للاستخدام في كل الحالات:

(١) عزم المقاومة الكلي عند أي مقطع يكون مجموع عزوم المقاومة الحادثة بسبب المادة المفردة المؤلفة للمقطع.

ومن ثم، لو أن (M_1) و(M_2) عبارة عن عزوم المقاومة إذن عزم المقاومة الكلي M يكون:

$M = M_1 + M_2$	**(5-8)**

(٢) بالنسبة لكل مادة، سوف يُطبق نفس نصف قطر انحناء المحور الطبيعي.

ومن ثم تصبح معادلة الانثناء بالنسبة للمادة (١) بالصورة التالية:

$$\frac{M_1}{I_1}=\frac{\sigma_1}{y_1}=\frac{E_1}{R_1}$$

وتصبح معادلة الانثناء بالنسبة للمادة (٢) بالصورة التالية:

$$\frac{M_2}{I_2}=\frac{\sigma_2}{y_2}=\frac{E_2}{R_2}$$

أو، بمساواة أنصاف أقطار الانحناء نحصل على الآتي:

$\frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2}$	**(5-9)**

ونحصل أيضًا على الآتي:

$$\frac{\sigma_1}{y_1 E_1} = \frac{\sigma_2}{y_2 E_2}$$

ومن ثم، أبعاد المقطع هي التي تتحكم في نسبة الاجهاد عند الألياف الخارجية لكل مادة، وبالتالي فهي تتحكم أيضًا في قيم عزوم المقاومة.

عن طريق استخدام تلك المعادلات، يمكن إيجاد عزم الانحناء الأقصى المسموح به.

٥-٦ الكمرات ذات القوة أو المتانة المنتظمة

إن الكمرات التي تُعرف بأنها تحمل الأحمال يكون لها في المعتاد مقطع منتظم عبر طول الكمرة. ولكن في أثناء كونها محملة فإن عزم الانحناء يتباين من مقطع لآخر عبر بحور الكمرات. والإجهادات التي تكون في الألياف الطرفية (الخارجية) بالكمرات فوق وأسفل المحور الطبيعي تتباين هي الأخرى من مقطع لآخر عبر بحور الكمرات. بهذه الطريقة نقول أن الألياف الطرفية التي يمكن أن تُحمل حتى الإجهاد الأقصى المسموح به (لنقل أنه (σ_{max})) لا تكون محملة إلى سعاتها. ومن ثم، في الكمرات التي لها مقطع منتظم يكون هناك قدر لا بأس به من المادة الضائعة. ولو أن كمرة ما مصممة بطريقة مناسبة بحيث تكون كل شريحة خارجية عبر طول الكمرة محملة حتى أقصى إجهاد مسموح به لها من خلال تباين المقطع العرضي، حينئذ يُقال أنها كمرة ذات قوة أو متانة منتظمة **beam of uniform strength**.

لو أنه عند كل مقطع يكون إجهاد الشريحة الخارجية مساوية لأقصى إجهاد مسموح به (σ_{max}) حينئذ ينبغي أن يكون معامل المقطع (**Z**) للكمرة عند أي مقطع متناسب مع عزم الانحناء عند هذا المقطع.

من أجل الحصول على كمرات لها قوة ومتانة منتظمة فمن الممكن أن تتباين مقاطع الكمرة عن طريق:

(i) جعل العرض ثابت عبر بحر الكمرة مع تغيير العمق.

(ii) جعل العمق ثابت عبر بحر الكمرة مع تغيير العرض.

(iii) عن طريق تغيير كلاهما، أي كل من العرض والعمق بطريقة مناسبة.

(الكمرات ذات المقطع الدائري والتي لها متانة وقوة منتظمة يمكن أن تُصنع عن طريق تغيير القطر بطريقة تجعل النسبة M/Z ثابتة دائمًا).

أمثلة على كمرات لها متانة وقوة منتظمة: العوارض الصندوقية **Box Girders**، العوارض اللوحية **Plate Girders**، العوارض **latticed girders**، السوست الحاملة **carriage springs**، الأقطاب الكهربائية ذات الأقطار المتغيرة، وغير ذلك...

ملاحظة	الطريقة الأكثر شيوعًا واستخدامًا لجعل الكمرة ذات قوة ومتانة منتظمة تتمثل في جعل العرض منتظم (ثابت) مع تغيير العمق.

(أ) الكابولي

الحالة (I): كابولي يحمل حمل مركز عند الطرف الحر

لندرس سويًا كابولي طوله (l)، وله مقطع عرضي مستطيل ويحمل حمل مركز عند الطرف الحر.

عزم الانحناء عند أي مقطع (عدديًا):

$$M_x = W*x$$

معامل المقطع:

$$Z = \frac{bd^2}{6}$$

وأيضًا:

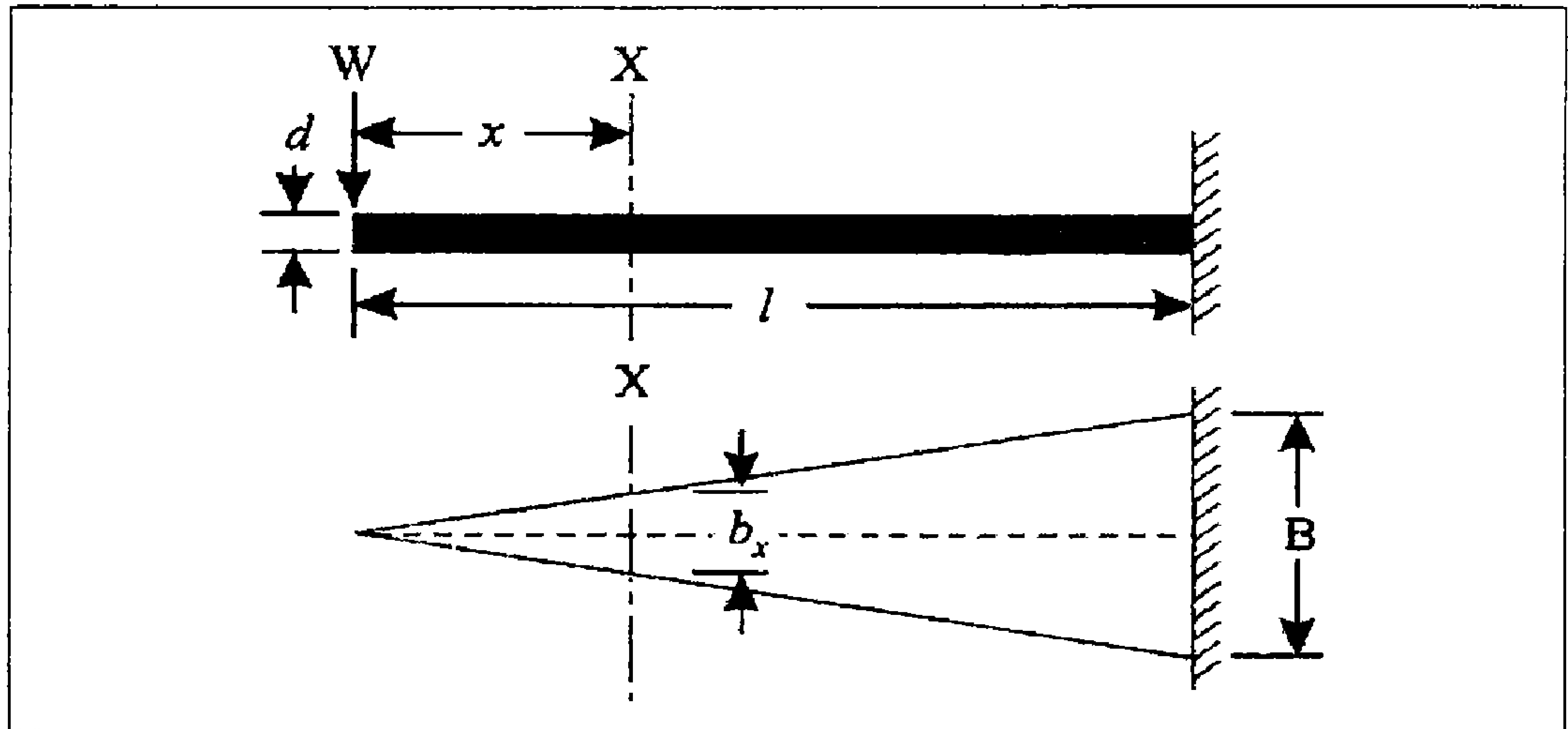
$$\frac{M}{Z} = \frac{Wx}{bd^2/6} = \frac{6Wx}{bd^2} \qquad (5\text{-}11)$$

في هذه الحالة، إما أن تكون b متغيرة وتكون d ثابتة عبر طول الكابولي أو تُجعل b ثابتة وتكون d متغيرة عبر طول الكابولي.

والآن:

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{6W}{d^2}\left(\frac{x}{b}\right)$$

- للوصول إلى القوة والمتانة المنتظمة، نجعل b تزداد بانتظام من الصفر عند الطرف الحر حتى تصل إلى الحد الأقصى عند الطرف المثبت، كما هو موضح في الشكل التالي:



حيث أن:

$$b_x = \frac{6Wx}{\sigma d^2}$$

وعرض الطرف المثبت يكون:

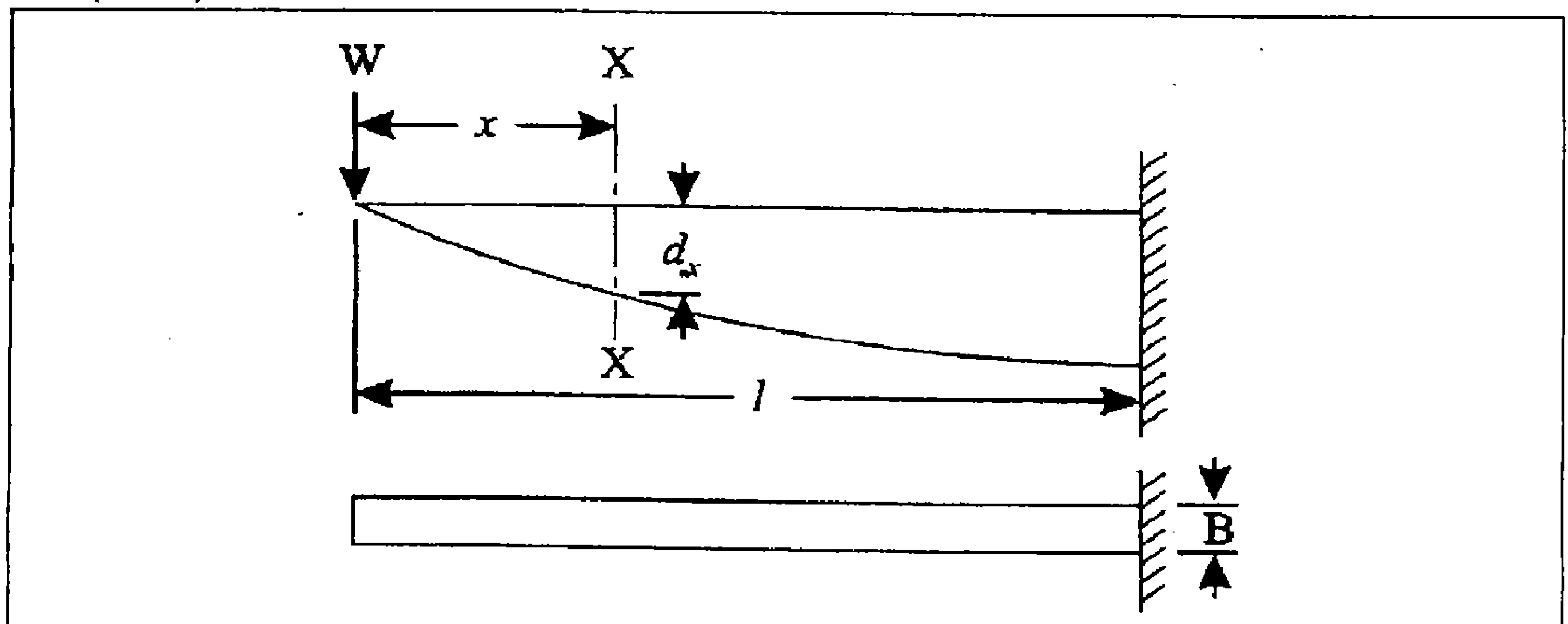
$$B = \frac{6Wl}{\sigma d^2}$$

- ثانيًا، عرض مقطع الكابولي يكون ثابتًا، لنقل أنه B، عبر الطول بأكمله في حين أن العمق يتغير، ومن ثم:

$$\sigma = \frac{6Wx}{Bd^2} \quad \text{or,} \quad d_x = \sqrt{\left(\frac{6Wx}{\sigma B}\right)}$$

وكما هو موضح في الشكل التالي، وعند الطرف المثبت، يتم حساب عمق المقطع كالآتي:

$$= \sqrt{\left(\frac{6Wl}{\sigma B}\right)}$$



الحالة (II): كابولي يحمل حمل موزع بانتظام w لكل وحدة طولية

لندرس سويًا كابولي يحمل حمل موزع بانتظام U.D.L. قيمته (w) لكلٍ وحدة طولية.

يتم حساب عزم عند أي مقطع كالآتي:

$$M_x = \frac{wx^2}{2} \text{ (numerically)}$$

- لنجعل عمق المقطع المستطيل (b) ثابتًا ونجعل العرض يتغير من أجل الحصول على متانة وقوة منتظمة (σ). ومن ثم، يتم حساب العرض عند أي مقطع (b_x) كالآتي:

$$b_x = \frac{3wx^2}{\sigma d^2}$$

ويتم حساب العرض (B) عند الطرف المثبت كالآتي:

$$B = \frac{3wl^2}{\sigma d^2}$$

- ثانيًا، سنعتبر أن العرض ثابتًا، وليكن (B)، وأن العمق يتغير، أي أن:

$$d_x^2 = \frac{3wx^2}{\sigma B}$$

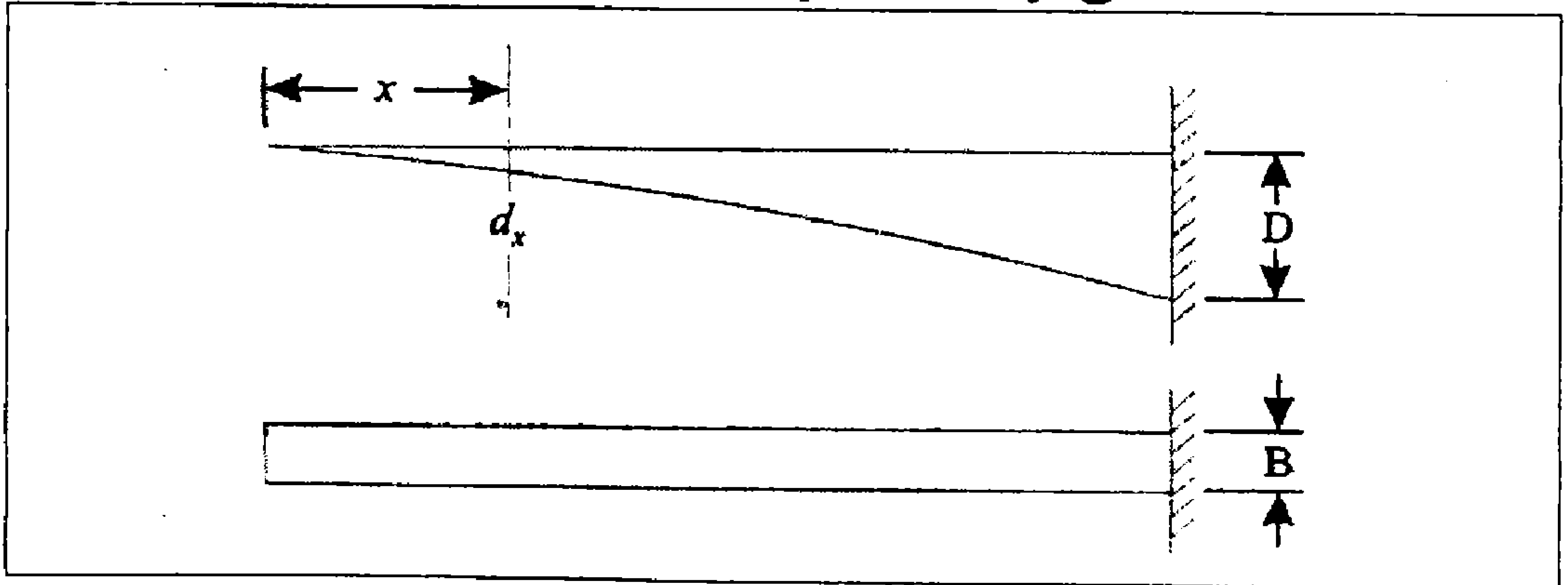
أو، العمق عند أي مقطع يكون:

$$d_x = \sqrt{\frac{3w}{\sigma B}} \cdot x$$

وعند الطرف المثبت يتم حساب العمق من خلال العلاقة التالية:

$$D = \sqrt{\frac{3w}{\sigma B}} \cdot l$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



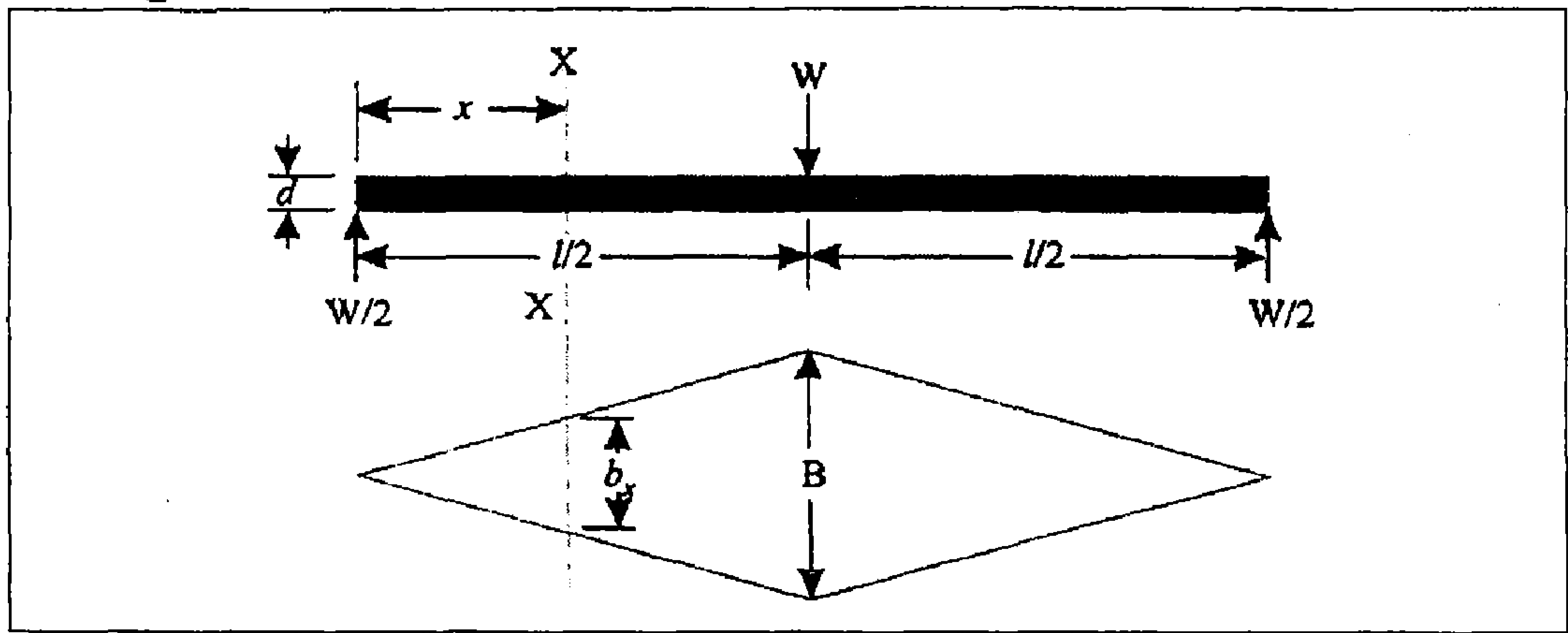
ب) الكمرة البسيطة الارتكاز

الحالة (I): كمرة بسيطة الارتكاز عند الأطراف وتحمل حمل مركز عند منتصف البحر

لندرس سويًا كمرة طولها (l)، بسيطة الارتكاز عند الأطراف وتحمل حمل مركز W عند منتصف البحر.

عزم الانحناء عند أي مقطع يكون:

$$M_x = \frac{Wx}{2}$$

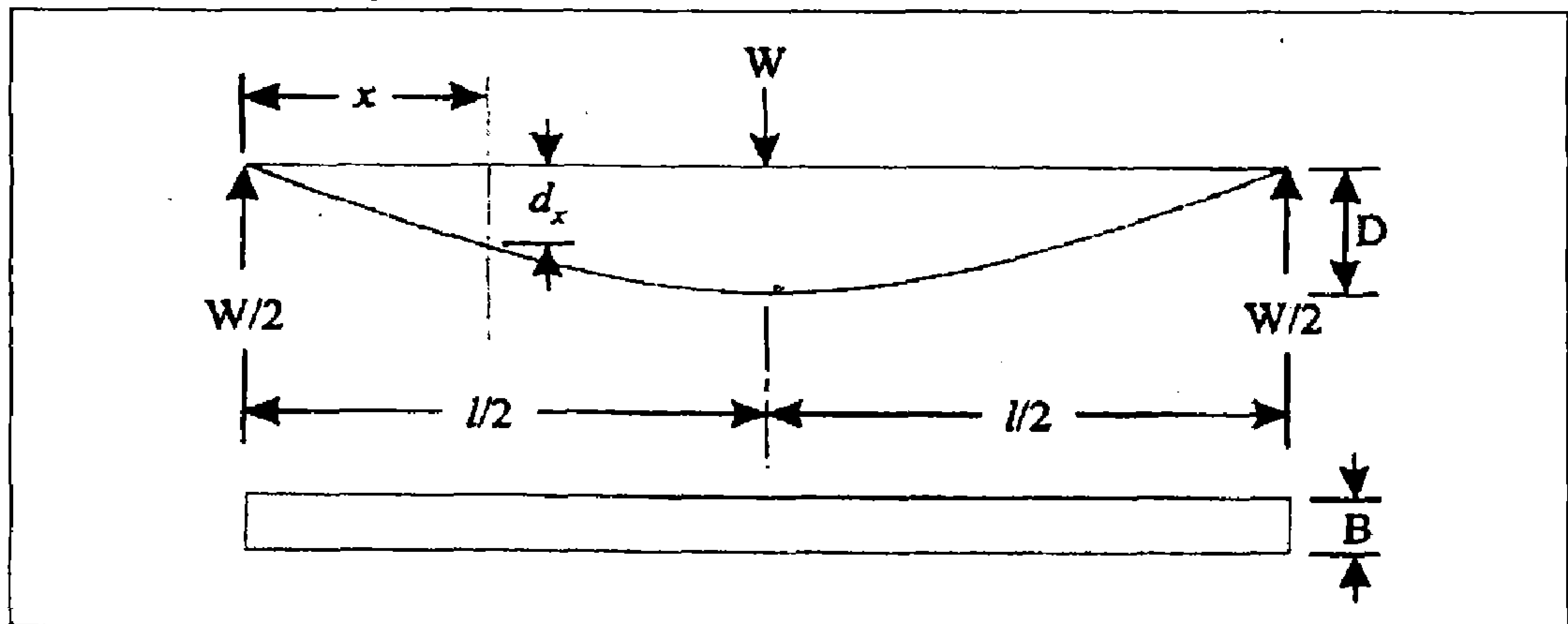


- لو أن عمق المقطع ظل ثابتًا، كما هو موضح في الشكل السابق، فإن عرض الكمرة سوف يزداد خطيًا حتى منتصف البحر ثم بعد ذلك سوف يقل تدريجيًا إلى الصفر عند الطرف الآخر. يتم حساب العرض عند أي مقطع كالآتي:

$$b_x = \frac{3Wx}{\sigma d^2}$$

كما يتم حساب العرض عند منتصف البحر كالآتي:

$$B = \frac{3W}{\sigma d^2} \times \frac{l}{2} = \frac{3Wl}{2\sigma d^2}$$



- في أثناء الإبقاء على العرض ثابتًا (كما هو موضح في هذا الشكل) ليكون (B)، فإنه يتم حساب العمق عند أي مقطع من خلال العلاقة التالية:

$$d_x = \sqrt{\frac{3Wx}{\sigma B}}$$

ويتم حساب العمق عند منتصف البحر كالآتي:

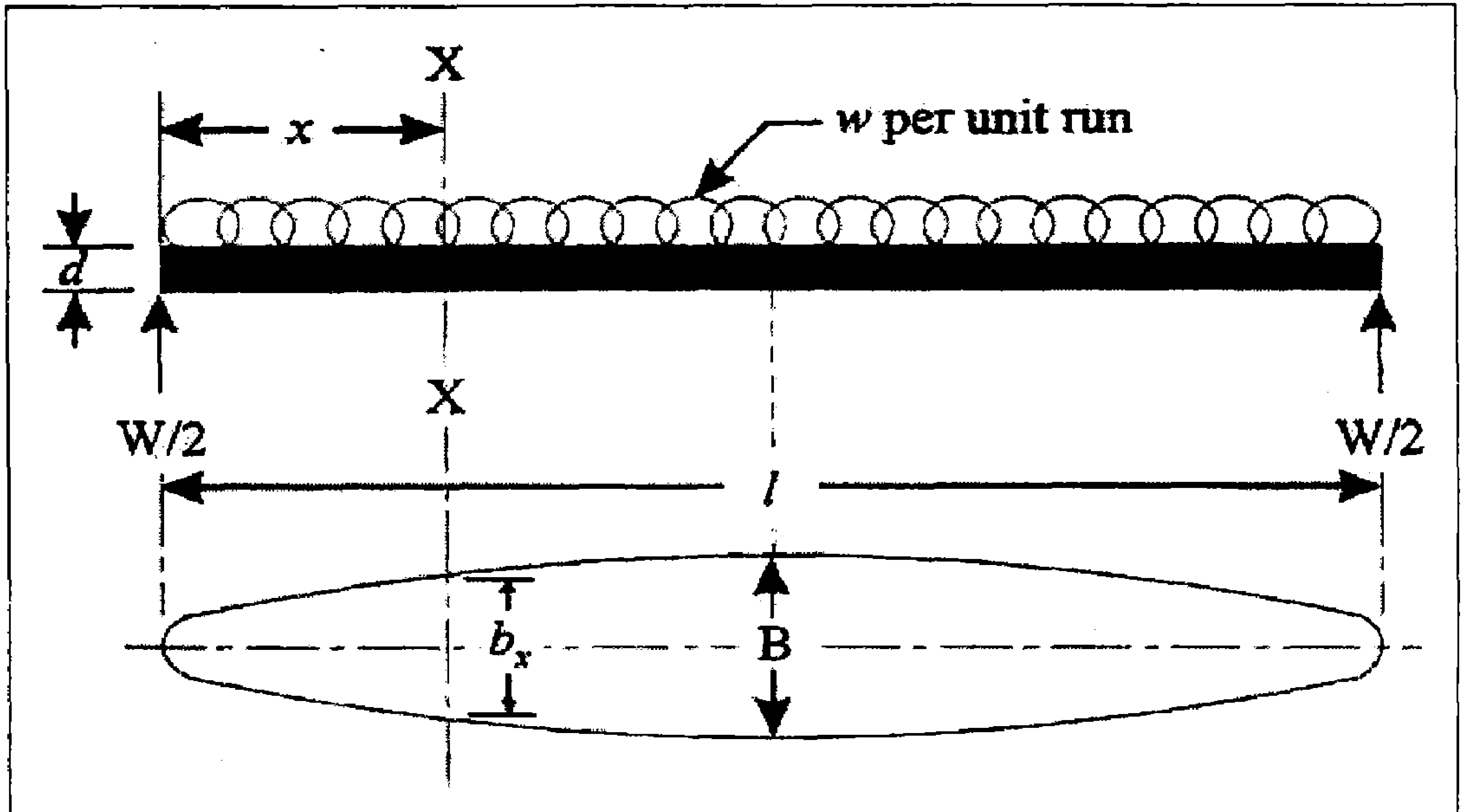
$$D = \sqrt{\frac{3Wl}{2\sigma B}}$$

الحالة (**II**): كمرة بسيطة الارتكاز عند الأطراف وتحمل حمل موزع بانتظام **U.D.L.**

لندرس كمرة طولها (l)، بسيطة الارتكاز عند الأطراف وتحمل حمل موزع بانتظام U.D.L. قدره (w) لكل وحدة طولية.

يتم حساب عزم الانحناء عند أي مقطع من خلال العلاقة التالية:

$$M_x = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{w}{2}(lx - x^2)$$

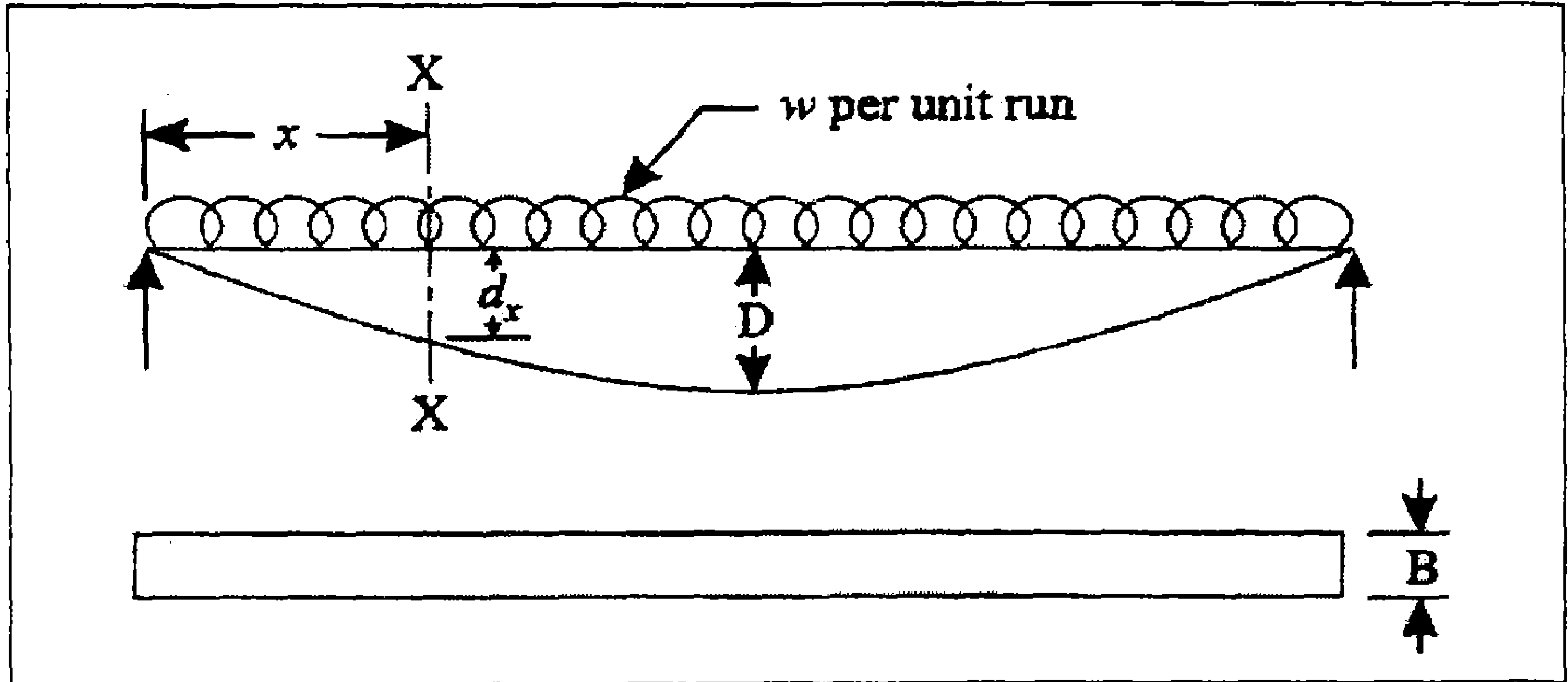


- بجعل العمق ثابت، كما هو موضح في هذا الشكل، فإنه يتم حساب العرض عند أي مقطع كالآتي:

$$b_x = \frac{3w}{\sigma d^2}(lx - x^2)$$

ويتم حساب العرض عند منتصف البحر كالآتي:

$$B = \frac{3wl^2}{4\sigma d^2}$$



- بجعل العرض ثابتًا، كما هو موضح في هذا الشكل، فإنه يتم حساب العمق عند أي مقطع من خلال العلاقة التالية:

$$d_x = \sqrt{\frac{3w(lx - x^2)}{\sigma B}}$$

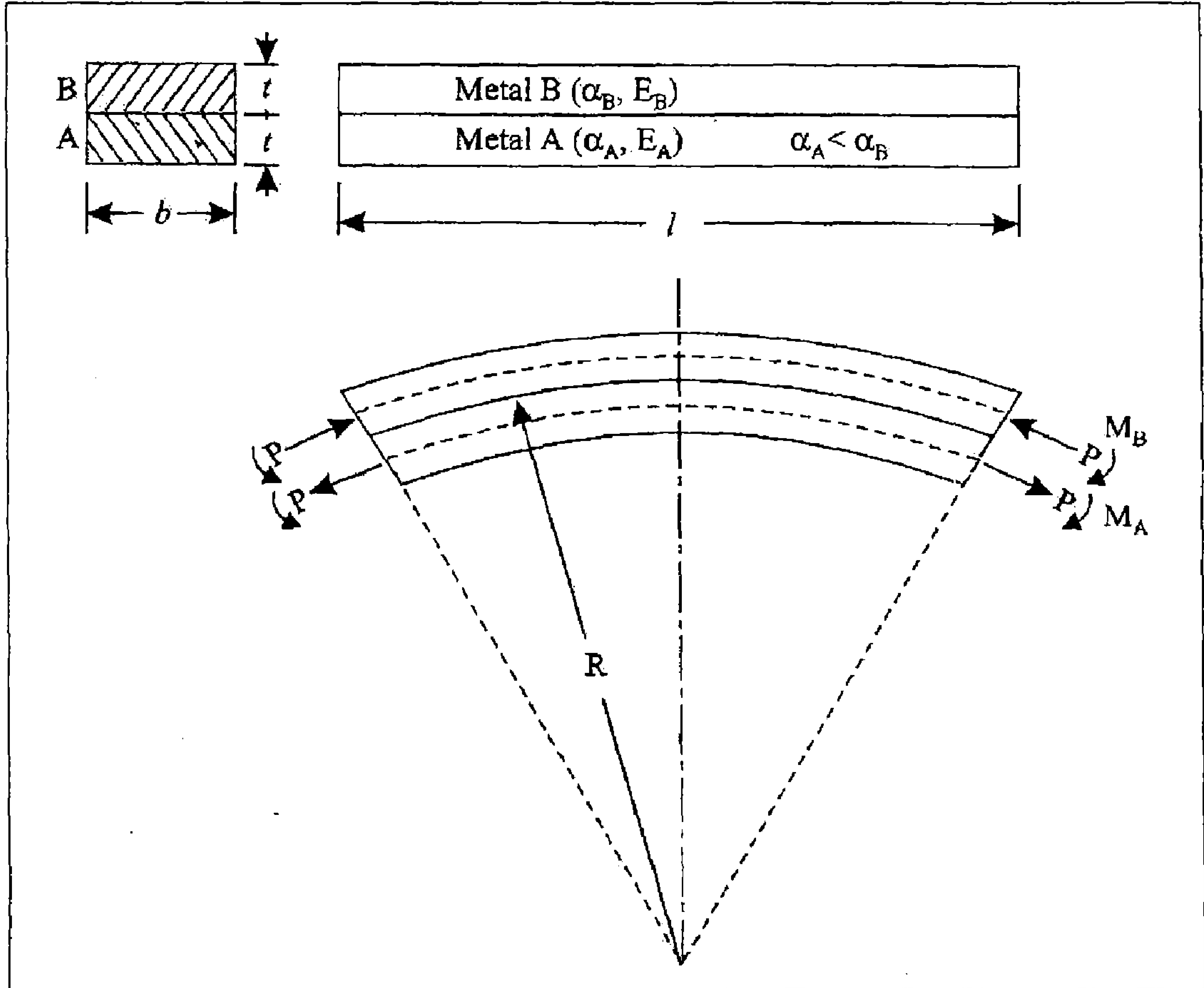
ويتم حساب العمق عند منتصف البحر من خلال العلاقة التالية:

$$D = \sqrt{\frac{3w}{\sigma B}} \cdot \frac{l}{2}$$

٧-٥ الشريحة المكونة من معدنين Bimetallic Strip

لو أن شريحتين معدنيتين، لهما معاملات مختلفة للتمدد الحراري وملحومتين معًا بالنحاس تم تسخينهما، فإن التجميعة سوف تنثني نتيجة للتغير في درجة الحرارة.

في الشكل التالي، نشاهد قضيب مركب من شرائح مستطيلة مصنوعة من معدنين A, B ومتصلة ببعضها البعض اتصالاً دائمًا:



لنفترض الآتي:

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
α_A	معامل التمدد الخطي للمادة **A**.
E_A	معامل يانج لمرونة المادة **A**.
α_B	معامل التمدد الخطي للمادة **B**.
E_B	معامل يانج لمرونة المادة **B**.
T^o	مقدار الارتفاع في درجة الحرارة.

كما أن $\alpha_A < \alpha_B$ (or $\alpha_B > \alpha_A$).

عندما يتم تسخين القضيب المركب لترتفع درجة حرارته بمقدار (T^o) حينئذ سوف ينثني لأن (α_B) أكبر من (α_A) وكلا الشريحتان سوف تتشوه معًا مما يؤدي إلى إنتاج إجهاد انضغاط في المعدن B وإجهاد شد في المعدن A. وبسبب أن (α_A) أصغر من (α_B)، فإن

المعدن A سوف يمارس من قوة انضغاط على المعدن B ومنطقة الالتقاء سوف يقلل تمدده الحر بمقدار [T*l*(α_B)] كما أن المعدن B سوف يمارس قوة شد على المعدن A مما يؤدي إلى زيادة في تمدده الحر بمقدار [T*l*(α_A)].

والآن، من أجل اتزان القضيب المركب، ينبغي أن تكون قوة الضغط الواقعة على شريحة المعدن B مساوية لقوة الشد الواقعة على شريحة المعدن A.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
b	عرض كل شريحة.
t	سمك كل شريحة.
σ_A	إجهاد الشد في الشريحة **A**.
σ_B	إجهاد الضغط في الشريحة **B**.

ومن ثم:

$$\sigma_A \cdot b \cdot t = \sigma_B \cdot b \cdot t$$

وأيضًا، عزم الانحناء الواقع على القضيب:

M = P * t

ولكن:

$$M = M_A + M_B$$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
M_A	عزم الانحناء الذي تقاومه الشريحة **A**.
M_B	عزم الانحناء الذي تقاومه الشريحة **B**.

$$P \times t = \frac{bt^3}{12R} \times E_A + \frac{bt^3}{12R} E_B$$

$P \times t = \frac{bt^3}{12R}(E_A + E_B)$	(i)

علمًا بأن:

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

$$M = \frac{I}{R} E$$

وهنا:

$$I = \frac{bt^3}{12}$$

لنفترض أن القضيب المركب قد انثني وأصبح على شكل قوس من دائرة مع كون نصف قطر الانحناء حتى الـ interface عبارة عن R (لا تتغير قيمة R بالنسبة للشريحتين لكون R كبيرة جدًا مقارنة بـ t).

والآن، وبما إن:

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \text{ or } \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{R} \text{ or } e = \frac{y}{R} = \frac{t}{2R}$$

(حيث أن (y=t/2) هنا)، إذن يمكن حساب الانفعال المحصلة في الشريحة B من خلال العلاقة التالية:

$$e_B = \frac{t}{2R}$$

أما الانفعال المحصلة في الشريحة A، فعبارة عن:

$$e_A = -t/2R$$

وبما إن:

$$e = \frac{\sigma}{E} = \frac{P/A}{E} = \frac{P}{btE}$$

إذن، يتم حساب محصلة الانفعال في الشريحة B كالآتي:

$$e_B = -\frac{P}{btE_B} + \alpha_B T$$

كما يتم حساب محصلة الانفعال في الشريحة A كالآتي:

$$e_A = +\frac{P}{bt\,E_A} + \alpha_A T$$

الفرق في الانفعالات بين الشريحتين:

$$e_B - e_A = \left[\frac{t}{2R} - \left(-\frac{t}{2R}\right)\right] = \left(-\frac{P}{btE_B} + \alpha_B T\right) - \left(\frac{P}{bt\,E_A} + \alpha_A T\right)$$

أو:

$$\frac{t}{R} = (\alpha_B - \alpha_A)T - \frac{P}{bt}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$$

أو:

$(\alpha_B - \alpha_A)T = \frac{t}{R} + \frac{P}{bt}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$	**(ii)**

وبالتعويض بقيمة P من المعادلة (i) في المعادلة (ii)، نحصل على الآتي:

$$(\alpha_B - \alpha_A)T = \frac{t}{R} + \frac{bt^2}{12R}(E_A + E_B) \times \frac{1}{bt}\left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B}\right)$$

$$= \frac{t}{R} + \frac{t}{12R}\frac{(E_A + E_B)^2}{E_A E_B} = \frac{t}{R}\left\{1 + \frac{E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B}{12E_A E_B}\right\}$$

$$= \frac{t}{12R E_A E_B}\left(E_A^2 + E_B^2 + 14E_A E_B\right)$$

إذن، يتم حساب نصف قطر الانحناء من خلال العلاقة التالية:

$R = \frac{E_A^2 + E_B^2 + 14E_A E_B}{12E_A E_B(\alpha_B - \alpha_A)} \times \frac{t}{T}$	**(5-12)**

٥-٨ الخرسانة الأسمنتية المسلحة R.C.C.

حيث أن الخرسانة تعتبر غاية في الضعف في مناطق الشد (على الرغم أنها قوية في مناطق الانضغاط) لذلك ينبغي تسليحها في مناطق تعرضها لإجهاد شد. ومادة التسليح للخرسانة ينبغي أن تتميز بالصفات والخصائص التالية:

(١) ينبغي أن تكون لها قوة شد عالية، ومعامل مرونة عالي.

(٢) ينبغي أن يكون لها معامل تمدد حراري ومعامل انكماش حراري مثل الخرسانة بحيث لا يتم تكوين أي إجهادات حرارية.

(٣) ينبغي أن تكون رخيصة ومن السهل الحصول عليها.

كل هذه المتطلبات السالفة الذكر تتحقق في الصلب steel وم ثم يُعد الصلب الأكثر استخدامًا كمادة للتسليح. إن الحديد (الصلب) الموظف من أجل التسليح يمكن أن يكون mild steel، أو حديد متوسط الشد، أو حديد شد tensile steel، أو hard drawn steel، أو حديد عالي الشد وغير ذلك، وتلك الأنواع لها تركيبات كيميائية مختلفة وبناءات جزيئية مختلفة أيضًا. النوع الشائع الاستخدام هو الأسياخ المدورة، ولكن يمكن أيضًا استخدام مقاطع أخرى. إن التصاق الخرسانة مع الحديد المسطح أو زوايا الحديد يكون أقل من التصاقها مع الأسياخ الدائرية أو المربعة. الأسياخ المسطحة تكون أكثر فائدة في حالة الخزانات والخوازيق وخلافه.

الخرسانة والحديد يؤلفان معًا تركيبة جيدة جدًا بسبب أن الخرسانة الأسمنتية تنكمش في أثناء الشك و**firmly grips** حديد التسليح. الخلطات الشائعة الاستخدام للخرسانة تكون 1:2:4 (أي جزء راحد من الأسمنت، وجزءان من الرمل، وأربعة أجزاء من الركاب

بالحجم). الإجهادات المتكونة في الخرسانة الأسمنتية المسلحة R.C.C. بسبب التغيرات في درجة الحرارة يمكن تجاهلها حيث أن معاملات التمدد الحراري للحديد والخرسانة قريبة جدًا من بعضهما.

الفرضيات التالية تُتخذ في الخرسانة الأسمنتية المسلحة R.C.C. من أجل أغراض التصميم:

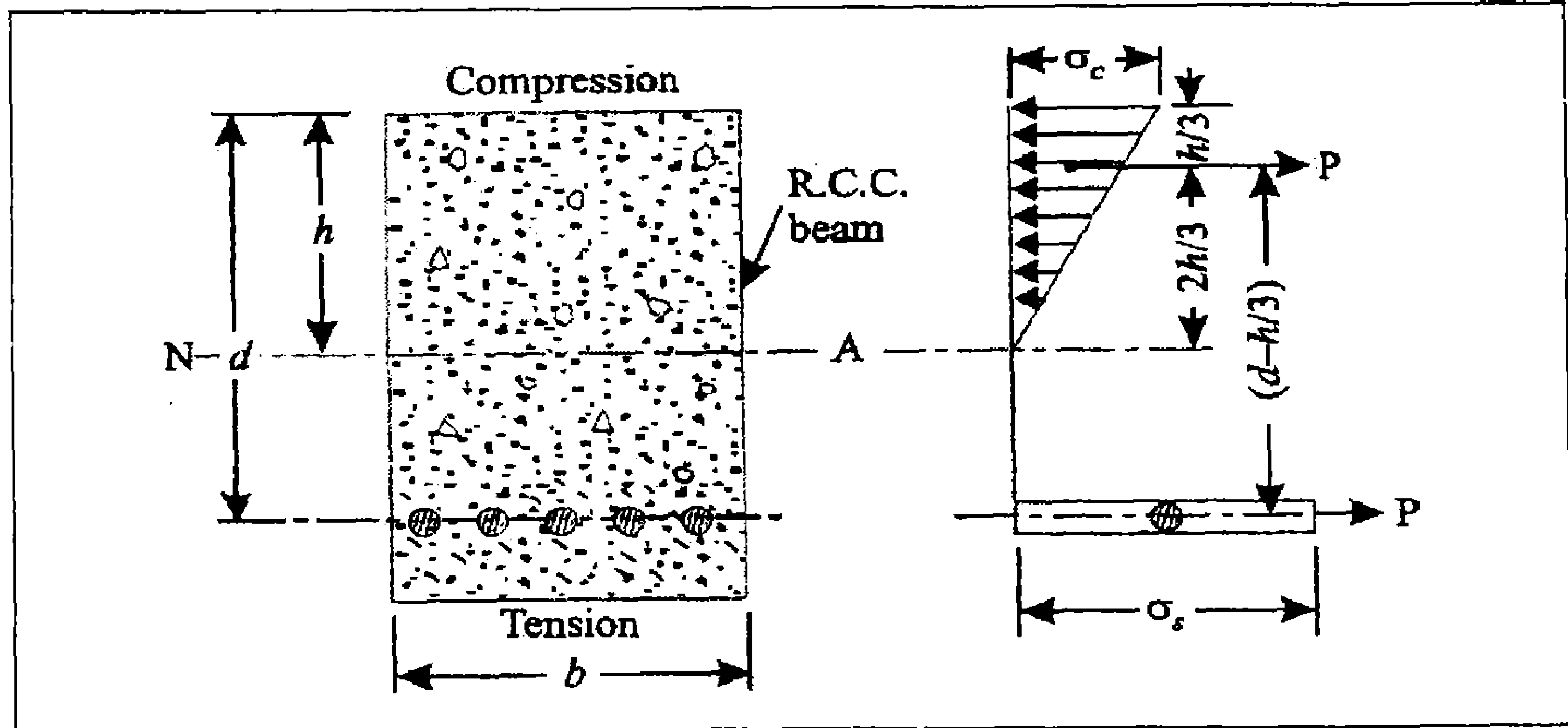
(١) أي مقطع في الاتجاه العرضي يكون مستويًا قبل الانثناء ويظل مستويًا بعد الانثناء.

(٢) كل إجهادات الشد يتحملها حديد التسليح فقط حيث أن مقاومة الخرسانة معدومة.

(٣) الخرسانة تكون متجانسة ومرنة بالإضافة إلى كونها ذات جودة ومتانة منتظمة. ومن ثم، يكون الإجهاد متناسب مع الانفعال. كما أن ذلك سيؤدي أيضًا إلى جعل ديجرام الإجهاد على جانب الانضغاط مثلث الشكل، مع كون محصلة إجهاد الانضغاط تؤثر عند مركز المثلث.

الكمرات الخرسانية المسلحة ذات المقاطع المستطيلة

انظر الشكل التالي:



لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
b	عرض المقطع.
d	عمق التسليح.

h	مسافة المحور الطبيعي من الوجه المنضغط.
σ_s	إجهاد الشد الأقصى المتكون في الصلب.
σ_c	إجهاد الانضغاط الأقصى المتكون في الخرسانة.
e_t	انفعال الشد (المتكون في الحديد).
e_c	انفعال الانضغاط (المتكون في الخرسانة).

حيث أن الانفعال في أي طبقة يكون متناسبًا مع مسافتها من المحور الطبيعي، فمن ثم، يتناسب (e_c) طرديًا مع (h) كما أن (e_t) يتناسب طرديًا مع (d-h).

$$\frac{e_c}{e_t} = \frac{h}{d-h}$$

$$\frac{\sigma_c}{E_c} \times \frac{E_s}{\sigma_s} = \frac{h}{d-h}$$

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{E_s}{E_c} \times \frac{d-h}{h} = m_r \times \frac{d-h}{h}$$

إذن:

(i)	$\frac{\sigma_s}{\sigma_c} = m_r\left(\frac{d-h}{h}\right)$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
E_s	معامل يانج للحديد.
E_c	معامل يانج للخرسانة.
m_r	نسبة المعاملة E_s/E_c = modular ratio

عندما تكون الكمرة واقعة تحت تأثير انثناء فقط (صافي)، إذن القوة المحصلة P في الحديد تكون مثل القوة المحصلة P في الخرسانة.

$$P = \frac{\sigma_c A_c}{2} = \sigma_s A_s$$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
A_c	مساحة الخرسانة في المقطع العرضي = b * h.
A_s	مساحة المقطع العرضي لحديد التسليح.

حيث أن الإجهاد في الخرسانة يتغير خطيًا عبر العمق h، فمن ثم، يُؤخذ الإجهاد المتوسط بالخرسانة على إنه ($\sigma_c/2$)، إذن:

$\frac{\sigma_c}{2}(b \cdot h) = \sigma_s \cdot A_s$	(ii)

قوة الانضغاط المحصلة (P) في الخرسانة وقوة الشد (P) في الحديد يعملان على تكوين ازدوج يقاوم عزم الانحناء المطبق بحيث أن:

$$M = P(d - h/3) = \frac{\sigma_c}{2}(b \cdot h)(d - h/3)$$

$M = \sigma_s \cdot A_s (d - h/3)$	(iii)

- في حالة معرفة الإجهادات المسموح بها (القصوى) بالحديد، حينئذ نستطيع إيجاد النسبة (σ_s/σ_c) ومن ثم يتم تحديد قيمة h من أجل الأبعاد المعطاة لكمرة ما عن طريق استخدام المعادلة (i).
- بعد ذلك، وباستخدام المعادلة (ii)، يتم تحديد مساحة حديد التسليح.
- في النهاية، يمكن العثور على عزم المقاومة عن طريق استخدام المعادلة (iii). هذا يسمى "<u>المقطع الإقتصاي</u> **Economic section**" والذي فيه تظهر القيم المسموح بها للإجهادات في الحديد والخرسانة.
- عندما تكون أبعاد الكمرة (أي b وd) ومساحة حديد التسليح (A_s) معلومة حينئذ يمكن من خلال المعادلتين (i) و(ii) الحصول على قيمة h كالآتي:

$\frac{\sigma_s}{\sigma_c} = m_r \left(\frac{d - h}{h} \right)$	(i)

أو:

$\frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{bh}{2 A_s}$	(ii)

أو:

$\frac{m_r (d - h)}{h} = \frac{bh}{2 A_s}$	(iii)

أو:

$$(m_r d - m_r h) \times 2 A_s = bh^2$$

أو:

$bh^2 + 2 m_r A_s h - 2 m_r A_s d = 0$	(iv)

٥-٩ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

احسب قوة الانثناء لثلاثة كمرات إحداها لها مقطع عرضي مربع، والثانية لها مقطع عرضي مستطيل (حيث العمق ضعف العرض) والثالثة لها مقطع عرضي دائري، علمًا بأن كل الكمرات الثلاثة لها نفس الوزن ولها نفس المساحة للمقطع العرضي وهي ١٠٠٠ مم٢.

الحل

نحن نعلم أن قوة الانثناء أو الانحناء لأي كمرة تتناسب طرديًا مع معامل مقطعها العرضي section modulus. ومن ثم، ينبغي علينا أولاً تحديد معامل المقطع العرضي في كل حالة من الحالات الثالثة، وهي حالة المقطع العرضي المربع، وحالة المقطع العرضي المستطيل (مع كون العمق ضعف العرض)، وحالة المقطع العرضي الدائري، ثم بعد ذلك نقارن بين هذه المعاملات.

معلوم لدينا من منطوق المسألة أن كل الكمرات الثلاثة لها نفس الوزن ونفس مساحة المقطع العرضي وهي ١٠٠٠ مم٢.

(i) المقطع العرضي المربع (١):

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
l	طول ضلع مقطع الكمرة المربع.

ومن ثم:

$A_1 = l^2 = 1000$
$l = 1000^{0.5} = 31.623\ mm$

يتم حساب معامل المقطع العرضي المربع كالآتي:

$$Z_1 = \frac{I}{y} = \frac{l \times (l^3/12)}{(l/2)} = \frac{l^4}{12} \times \frac{2}{l} = \frac{l^3}{6}$$

$Z_1 = \dfrac{(31.623)^3}{6} = 5270.6\ mm^3$	(i)

(ii) المقطع العرضي المستطيل (٢):

لنفترض الآتي:

المعنى والاستخدام	المعامل
عرض المقطع العرضي.	b

ومن ثم العمق يكون:

d = 2*b (given)

ويتم حساب المساحة كالآتي:

$$A_2 = 2*b*b = 2*b^2 = 1000$$

ومن ثم يتم حساب العرض b كالآتي:

$$b = (1000/2)^{0.5} = 22.36 \text{ mm}$$

وبالتالي يتم حساب العمق كالآتي:

d = 2*b = 2*22.36 = 44.72 mm

والآن يمكن حساب معامل المقطع العرضي المستطيل كالآتي:

$$Z_2 = \frac{I}{y} = \frac{[b \times (2b)^3/12]}{(2b/2]} = \frac{b \times 8b^3}{12 \times b} = \frac{2b^3}{3}$$

$Z_2 = \frac{2 \times (22.36)^3}{3} = 7453 \text{ mm}^3$	(ii)

(iii) المقطع العرضي الدائري (٣):

لنجعل (d) عبارة عن قطر المقطع العرضي.

مساحة المقطع العرضي الدائري:

$$A_3 = \frac{\pi}{4}d^2 = 1000$$

ومن ثم يمكن حساب القطر d كالآتي:

$$d = \left(\frac{1000 \times 4}{\pi}\right)^{1/2} = 35.68 \text{ mm}$$

والآن يمكن حساب معامل المقطع الدائري كالآتي:

$Z_3 = \frac{I}{y} = \frac{\frac{\pi}{64}d^4}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{32}d^3 = \frac{\pi}{32} \times (35.68)^3 = 4459.4 \text{ mm}^3$	(iii)

بمقارنة قيم Z في المعادلات (i)، (ii)، (iii) نجد أن أكبر قيمة لـ Z عبارة عن ٧٤٥٣ مم٣، في حالة المقطع العرضي المستطيل.

المقارنة:

ومن ثم نحن نستنتج أنه بالنسبة لنفس الوزن ونفس مساحة المقطع العرضي، فإن الكمرة التي مقطعها العرضي مستطيل يكون لها أكبر مقاومة للانثناء حيث أن:

$Z = Z1 = 7453\ mm^3$ (أكبر قيمة)

الكمرة التي تأتي في المرتبة الثانية في مقاومة الإنثناء هي تلك الكمرة التي مقطعها دائري حيث أن:

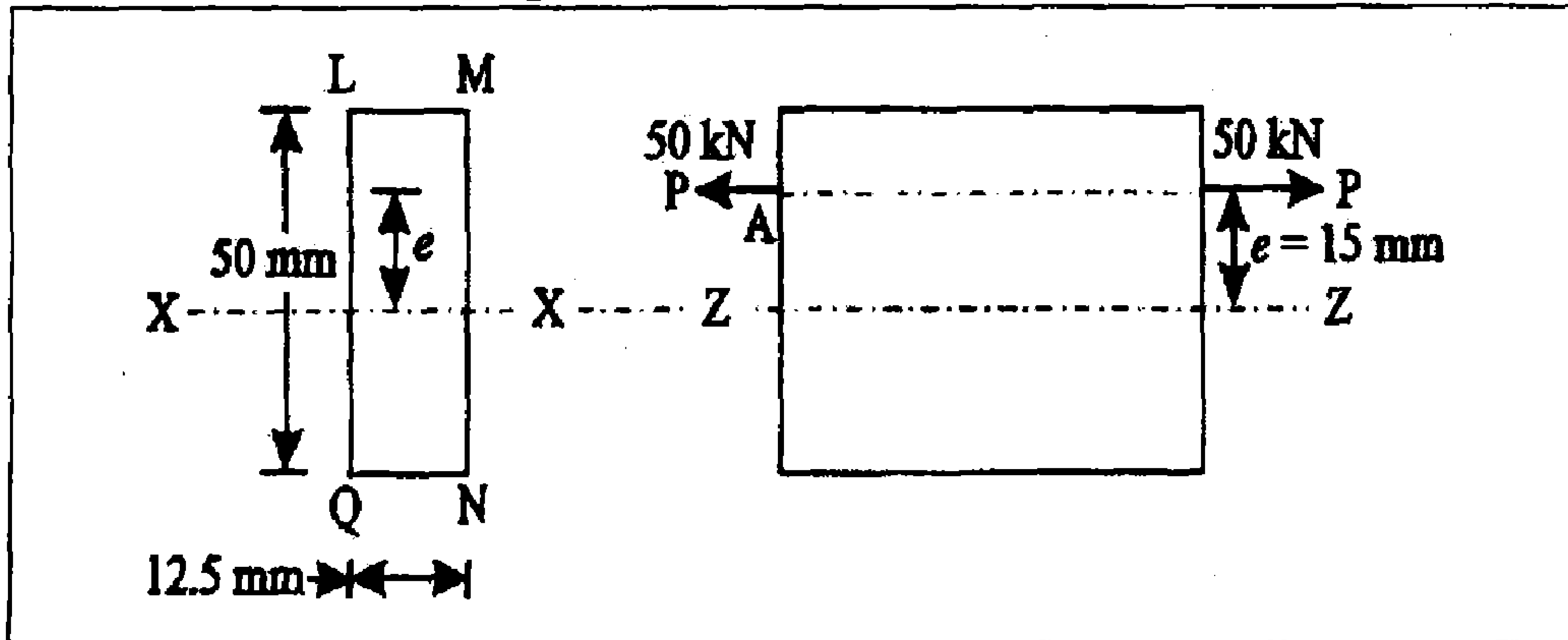
$Z = Z_2 = 5270.6\ mm^3$

الكمرة التي تأتي في المرتبة الأخيرة بخصوص مقاومة الانثناء هي تلك الكمرة التي مقطعها العرضي مربع حيث أن:

$Z = Z_3 = 4459.4\ mm^3$

المثال رقم (٢)

قضيب منبسط من الصلب أبعاده ٥٠ مم × ١٢.٥ مم تم وضعه في ماكينة اختبار وتعرض لحمل قدره ٥٠ كيلونيوتن يؤثر كما هو موضح في الشكل التالي:



تم وضع **extensometer** على خط واحد مع الحمل المسجل على امتداد قدره ٠.١٧ مم على **gauge length** قدره ٢١٠ مم.

المطلوب

حساب الإجهادات القصوى والدنيا، وكذلك قيمة معامل يانج للمرونة.

الحل

اللامركزية (e) حول XX = ١٥ مم

الحمل (P) = ٥٠ كيلونيوتن.

العزم حول XX:

$$= P \times e = 50 \times 10^3 \times 15 = 75 \times 10^4\ N\ mm$$

الإجهاد المباشر:

$$\sigma_d = \frac{50 \times 1000}{50 \times 12.5} = 80\ N/mm^2,\ \text{or},\ 80\ MN/m^2\ (\text{tensile})$$

إجهاد الانثناء عند A:

$$= (\sigma_b)_A = \frac{M}{I_{XX}} \times y_A = \frac{75 \times 10^4 \times 15}{(12.5 \times 50^3)/12} = \frac{75 \times 10^4 \times 15 \times 12}{12.5 \times 50^3}$$

$= 86.4\ N/mm^2$ or $86.4\ MN/m^2$ (tensile)

ومن ثم، الإجهاد المحصلة عبر خط تأثير الحمل يكون:

$\sigma_r = 80 + 86.4\ N/mm^2$ or $166.4\ MN/m^2$.

ومن ثم، الانفعال عبر خط تأثير الحمل يكون:

$$= \frac{\sigma_r}{E} = \frac{166.4}{E}$$

وبالمساواة مع القيمة المعطاة، يصبح لدينا الآتي:

$$\frac{166.4}{E} = \frac{0.17}{210}$$

$$E = \frac{166.4 \times 210}{0.17} = 205553\ MN/m^2 = \mathbf{205.533\ GN/m^2}\ \textbf{(Ans.)}$$

إجهادات الانثناء عند LM وQN ستكون متساوية في المقدار ويتم حسابها كالآتي:

$$(\sigma_b)_{LM} = (\sigma_b)_{QN} = \frac{M}{I_{xx}} \times y$$

$$(\sigma_b)_{LM} = \frac{75 \times 10^4 \times (50/2)}{(12.5 \times 50^3)/12} = \frac{75 \times 10^4 \times 25 \times 12}{12.5 \times 50^3}$$

$(\sigma_b)_{LM} = 144\ N/mm^2$ or $144\ MN/m^2$.

ومن ثم، أقصى إجهاد شد عند LM سيكون:

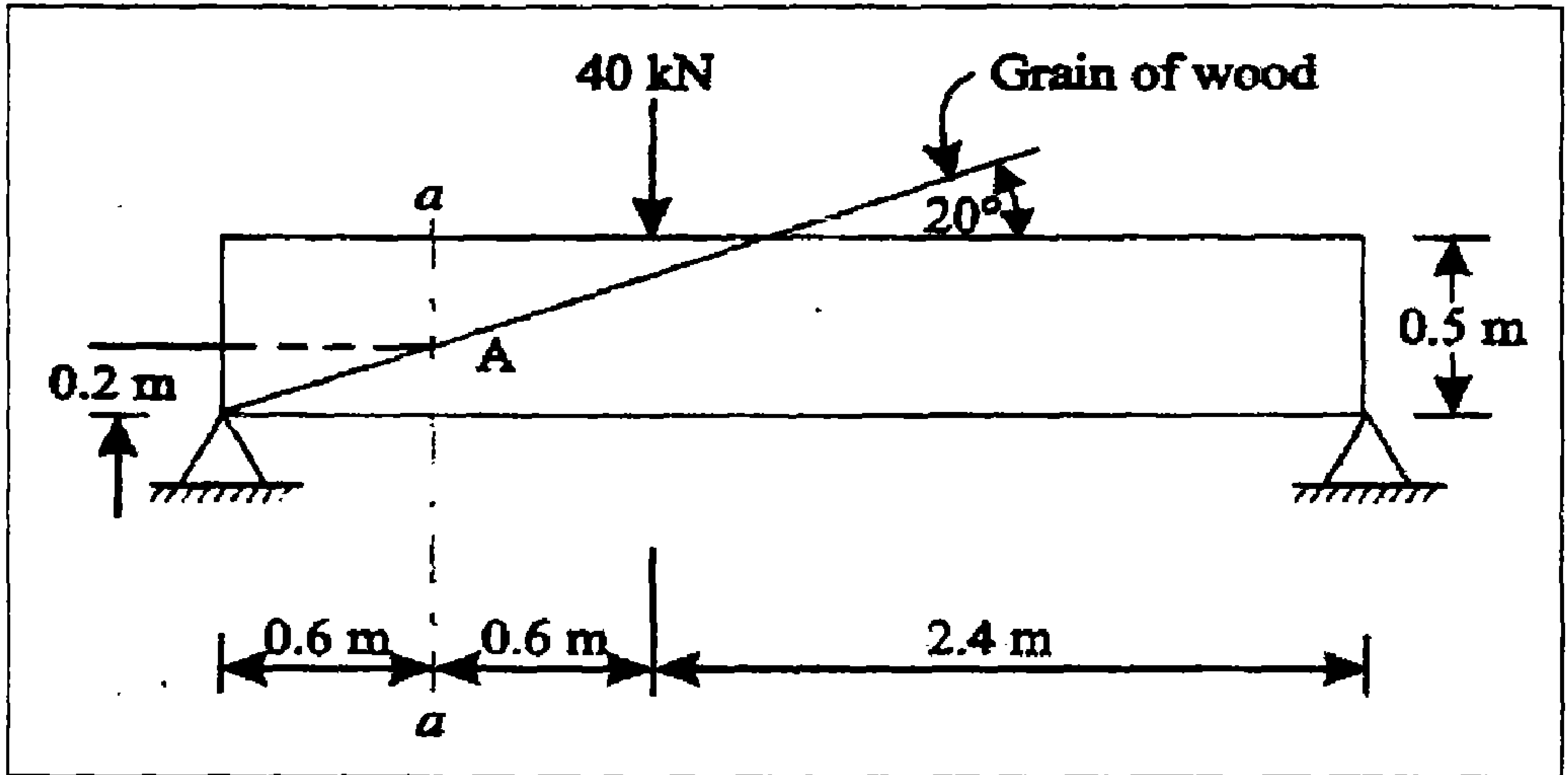
$= 80 + 144 =$ **$224\ N/mm^2$ or $224\ MN/m^2$ (*tensile*) (Ans.)**

وأقل إجهاد عند QN سيكون:

$= 144 - 80 =$ **$64\ N/mm^2$ or $64\ MN/m^2$** (*compressive*) **(Ans.)**

المثال رقم (٣)

كمرة خشبية مقطعها العرضي عبارة عن ١٠٠ مم × ٥٠٠ مم ويقع عليها حمل قدره ٤٠ كيلونيوتن، كما هو موضح في الشكل التالي:



عند مقطع a-a، نجد أن grain الخشب تصنع زاوية قدرها ٢٠ درجة مع محور الكمرة.

المطلوب

إيجاد إجهاد القص عبر grain الخشب عند النقطة A الحادث بسبب تطبيق الحمل المركز في نقطة.

الحل

في الشكل الوارد في منطوق المسألة نشاهد الترتيب المعطى.

في الجزء (a) بالشكل التوضيحي القادم نشاهد ردود الأفعال عند الدعامة اليسرى (R_1) وعند الدعامة اليمنى (R_2)؛ وأيضًا تم رسم مشهد طرفي موضحًا المقطع العرضي للكمرة مع المحور الطبيعي .N.A.

لنقم أولاً بتحديد ردود الأفعال (R_1) و(R_2).

بأخذ العزوم حول الدعامة اليسرى، نحصل على الآتي:

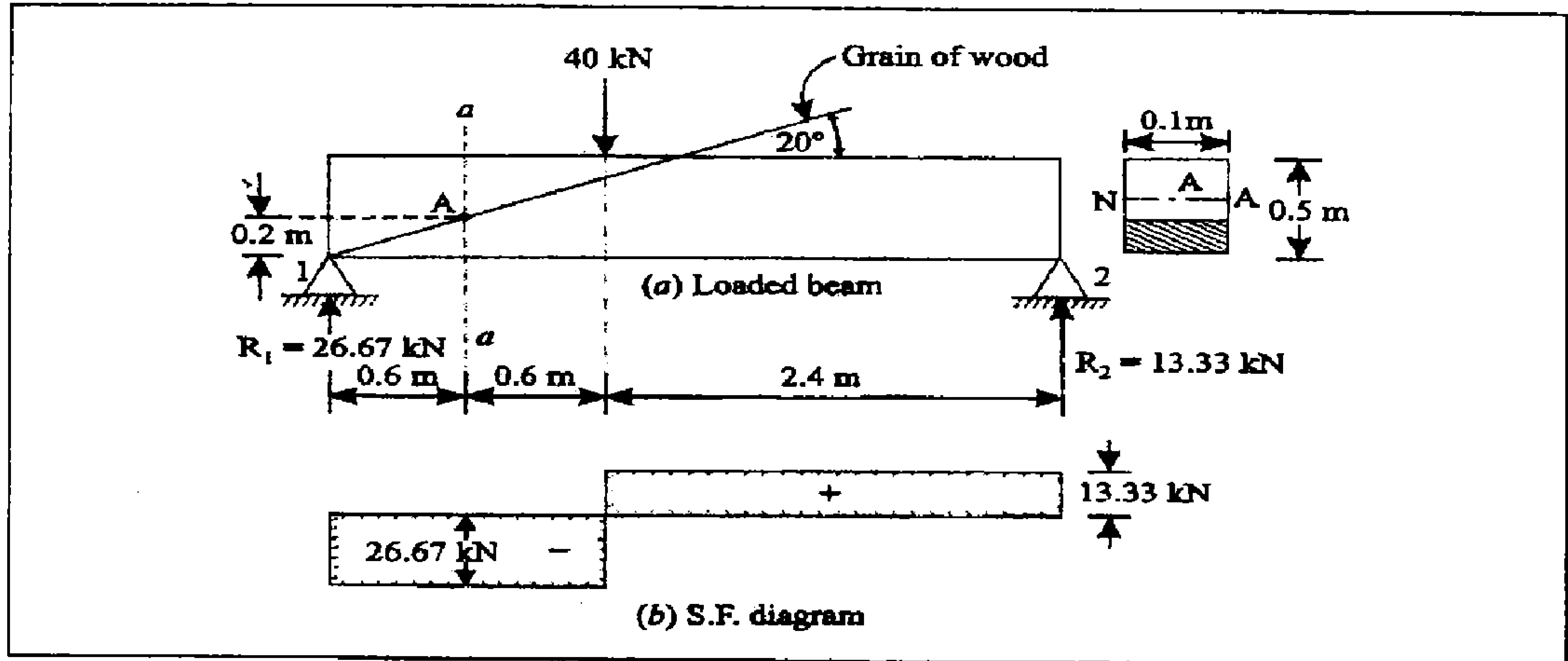
$R_2 * 3.6 = 40 * 1.2 \qquad R_2 = 13.33$ kN

وأيضًا:

$R_1 + R_2 = 40$

إذن:

$R_1 = 40 - R_2 = 40 - 13.33 = 26.67$ kN



من الجزء (b) بهذا الشكل نجد أن قوة القص (S) عند المقطع a-a = ٢٦.٦٧ كيلونيوتن.

باستخدام العلاقة التالية:

$\tau = \dfrac{SA\bar{y}}{Ib}$	(i)

في هذه الحالة:

$$A\bar{y} = (0.2 \times 0.1)\ (0.25 - \frac{0.2}{2}) = 0.003\text{m}^3$$

$$S = 26.67\ \text{kN}$$

$$I = \frac{0.1 \times 0.5^3}{12} = 0.00104\ \text{m}^4;\ b = 0.1\ \text{m}$$

بالتعويض بالقيم في المعادلة (i)، نحصل على الآتي:

$$\tau = \frac{26.67 \times 0.003}{0.00104 \times 0.1} = 769.3\ \text{kN/m}^2$$

إجهاد القص عبر grain الخشب عند النقطة A:

$$= \tau \sin 20° = 769.3 \times \sin 20° = \mathbf{263.1\ kN/m^2}\quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٤)

كمرة خشبية لها مقطع عرضي مستطيل الشكل عرضه ١٠ سم وعمقه ١٥ سم وتحمل حمل موزع بانتظام عبر بحر قدره ٢ متر. لو أن الإجهادات المسموح بها عبارة عن ٢٨ نيوتن/مم٢ طوليًا و٢ نيوتن/مم٢ في القص العرضي، إذن احسب أقصى حمل لكل متر طولي يمكن للكمرة أن تتحمله بأمان.

الحل

في هذا المثال لدينا الآتي:

كمرة خشبية لها مقطع عرضي مستطيل الشكل أبعاده عبارة عن:

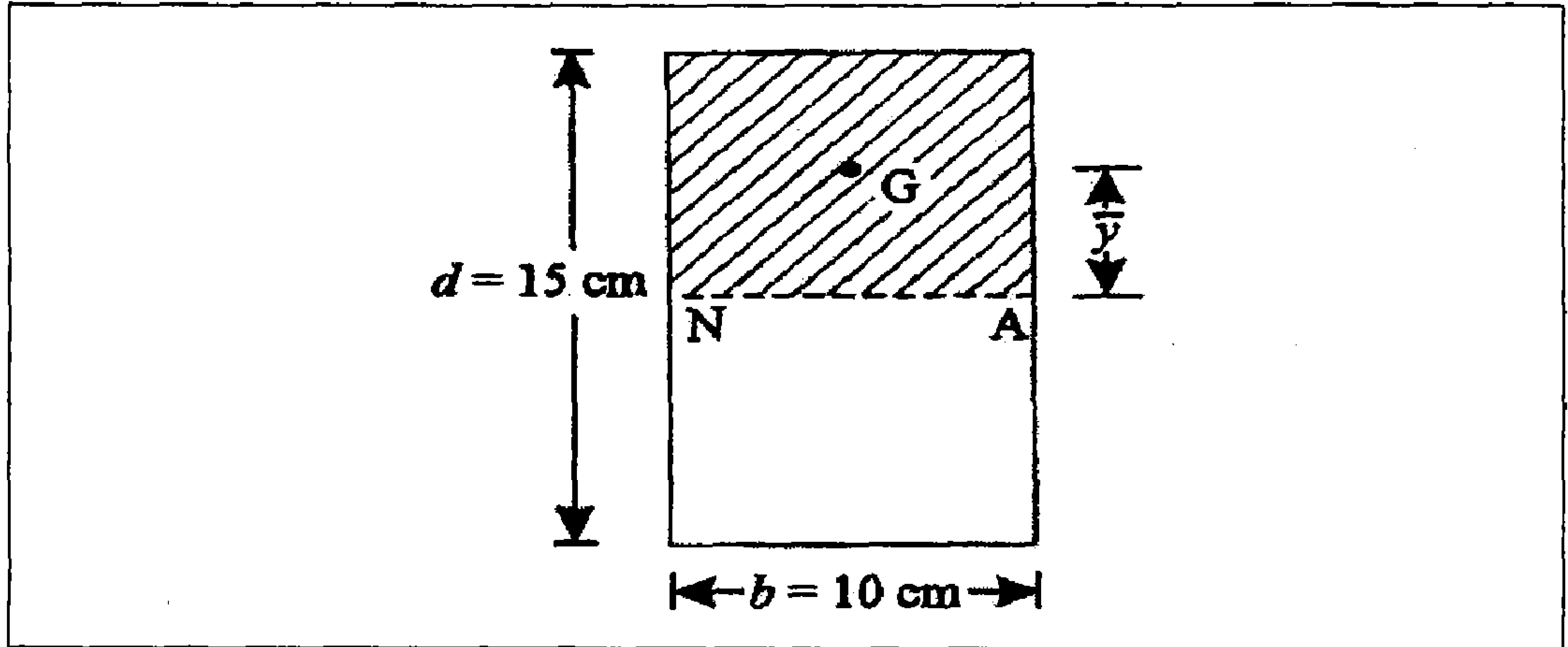
b = 10 cm = 0.1 m
d = 15 cm = 0.15 m

طول البحر (l) = ٢ متر

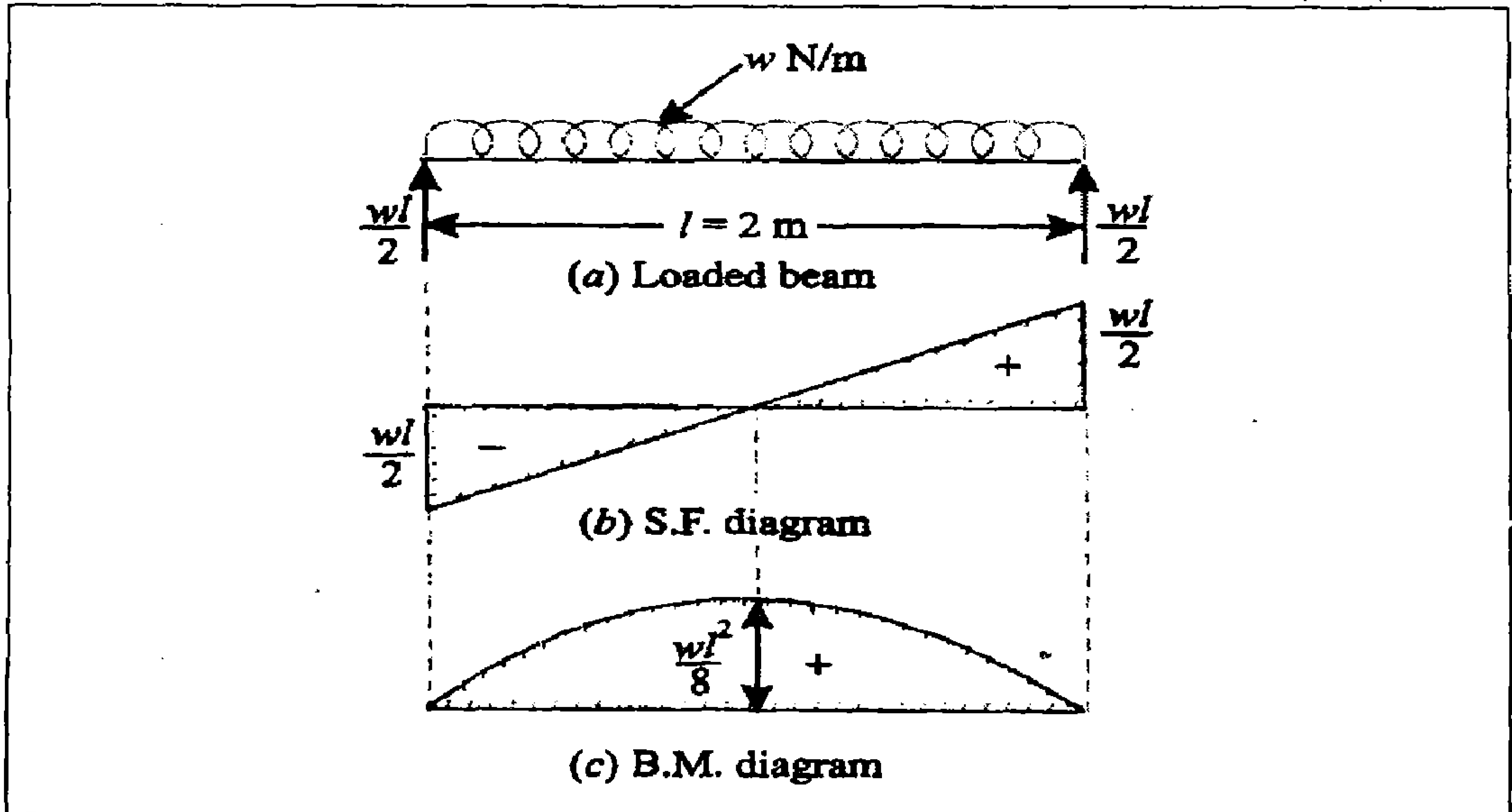
$\sigma = 28\ N/mm^2$
$\tau = 2\ N/mm^2$

<u>أقصى حمل آمن لكل متر طولي (w):</u>

في الشكل التالي نشاهد المقطع العرضي المستطيل محل الدراسة في هذا المثال:



أما في الشكل التالي فنشاهد الكمرة المحملة مع كل من ديجرام قوة القص S.F.D. وديجرام عزم الانحناء B.M.D.



<u>(i) توزيع إجهاد الانحناء:</u>

لنجعل w (نيوتن/متر) عبارة عن الحمل الموزع بانتظام عبر البحر بأكمله.

من الجزء (c) بالشكل التوضيحي السابق نجد عزم الانحناء الأقصى على الكمرة:

$$M = \frac{wl^2}{8} = \frac{w \times 2^2}{8}\ \text{Nm} \ \text{ or } \ \frac{w}{2}\ \text{Nm} \qquad (\because l = 2\text{m})$$

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{0.1 \times 0.15^3}{12} = 2.8125 \times 10^{-5}\ \text{m}^4.$$

باستخدام معادلة الانحناء:

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

فإننا نحصل على الآتي:

$$\frac{\frac{w}{2}}{2.8125 \times 10^{-5}} = \frac{28 \times 10^6}{\left(\frac{0.15}{2}\right)}$$

أو:

$$\frac{w}{2 \times 2.8125 \times 10^{-5}} = \frac{28 \times 10^6 \times 2}{0.15}$$

إذن:

$$w = \frac{28 \times 10^6 \times 2 \times 2 \times 2.8125 \times 10^{-5}}{0.15} = 21000\ \text{N/m (or 21 kN/m)}$$

(ii) توزيع إجهاد القص:

بعد ذلك، لندرس سويًا تأثير إجهاد القص العرضي على الكمرة.

بالنسبة لكمرة بسيطة الارتكاز محملة بحمل موزع بانتظام (w) (نيوتن/متر)، يكون ديجرام قوة القص كما هو موضح في الجزء (b) بالشكل السابق.

إجهاد القص عند المحور الطبيعي:

$$\tau = \frac{SA\bar{y}}{Ib}$$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
A	مساحة المقطع العرضي فوق المحور الطبيعي ويتم حسابها كالآتي: $= \frac{0.15}{2} \times 0.1 = 0.0075\ \text{m}^2$
$\bar{y}$	مركز ثقل المساحة المظللة (الشكل السابق) فوق المحور الطبيعي ويتم حسابه كالآتي: $= \frac{0.075}{2} = 0.0375\ \text{m}$

$A\bar{y}$	عزم المساحة فوق المحور الطبيعي حول المحور الطبيعي ويتم حسابه كالآتي: $= 0.0075 \times 0.0375 = 0.00028125\ m^2$

بالتعويض بالقيمة في المعادلة السابقة، نحصل على الآتي:

$$\tau = \frac{wA\bar{y}}{Ib}$$

$$2 \times 10^6 = \frac{w \times 0.00028125}{2.8125 \times 10^{-5} \times 0.1}$$

إذن:

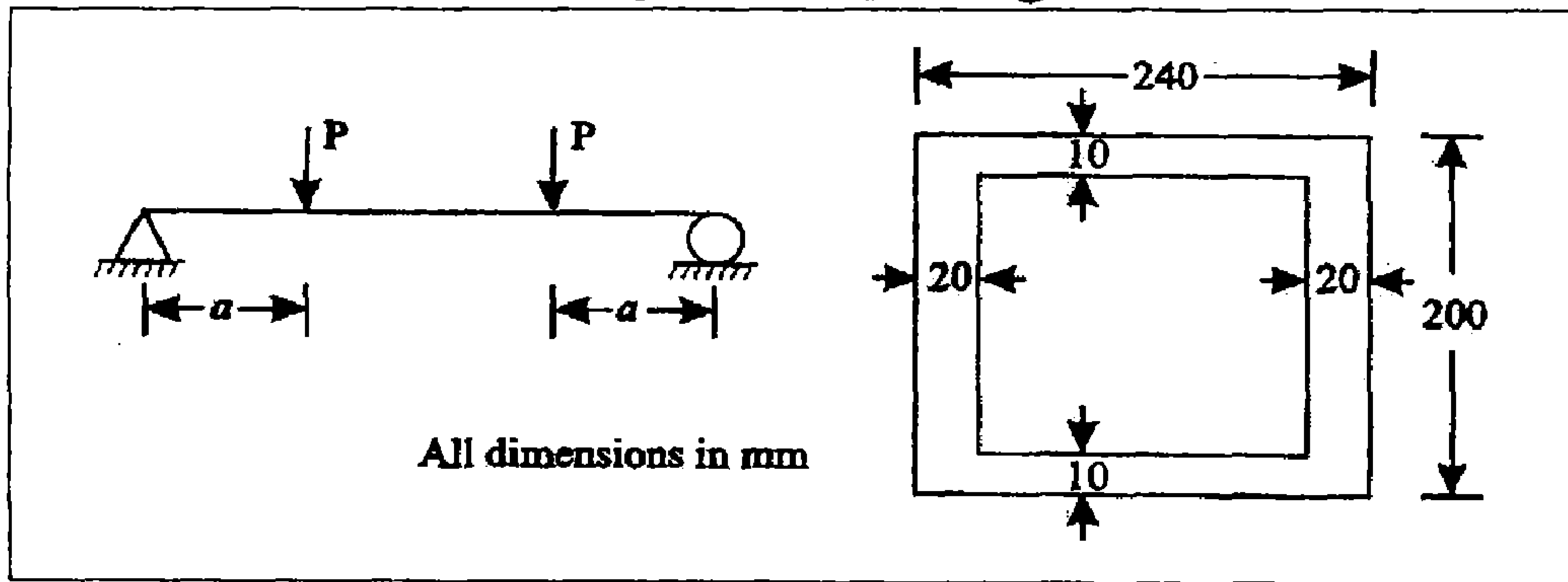
$$w = \frac{2 \times 10^6 \times 2.8125 \times 10^{-5} \times 0.1}{0.00028125} = 20000\ \text{N/m or 20 kN/m}$$

ومن ثم:

$w = 20$ **kN/m** (*smaller of the two values*) **(Ans.).**

المثال رقم (٥)

كمرة معدنية لها مقطع عرضي مفرغ على شكل مستطيل وبحرها (l) = ٤ متر وبسيطة الارتكاز ومحملة بقوتين متساويتين P مطبقتين على مسافات متساوية (a) = ٠.٥ متر من الدعامات. أبعاد المقطع العرضي نشاهدها في الشكل التالي:



المطلوب

أوجد مقادير القوى P من شرط التقييد المعتمد على الإجهادات العمودية لو أن (σallowable) عبارة عن ١٦٠ نيوتن/مم٢. وقع بيانيًا تباين إجهادات القص عبر عمق الكمرة.

الحل

عزم القصور الذاتي لمقطع الكمرة حول المحور الطبيعي .N.A:

$$I_{NA} = \frac{1}{12}\left[240 \times 200^3 - 200 \times 180^3\right] = 62800000 \text{ mm}^4$$

والآن، وكما هو موضح في الشكل السابق يتم حساب عزم الانحناء كالآتي:

$$M = P \times a = P \times 0.5 \times 1000 = 500\, P \text{ Nmm}$$

وباستخدام العلاقة التالية:

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

وبما إن:

$$y = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$$

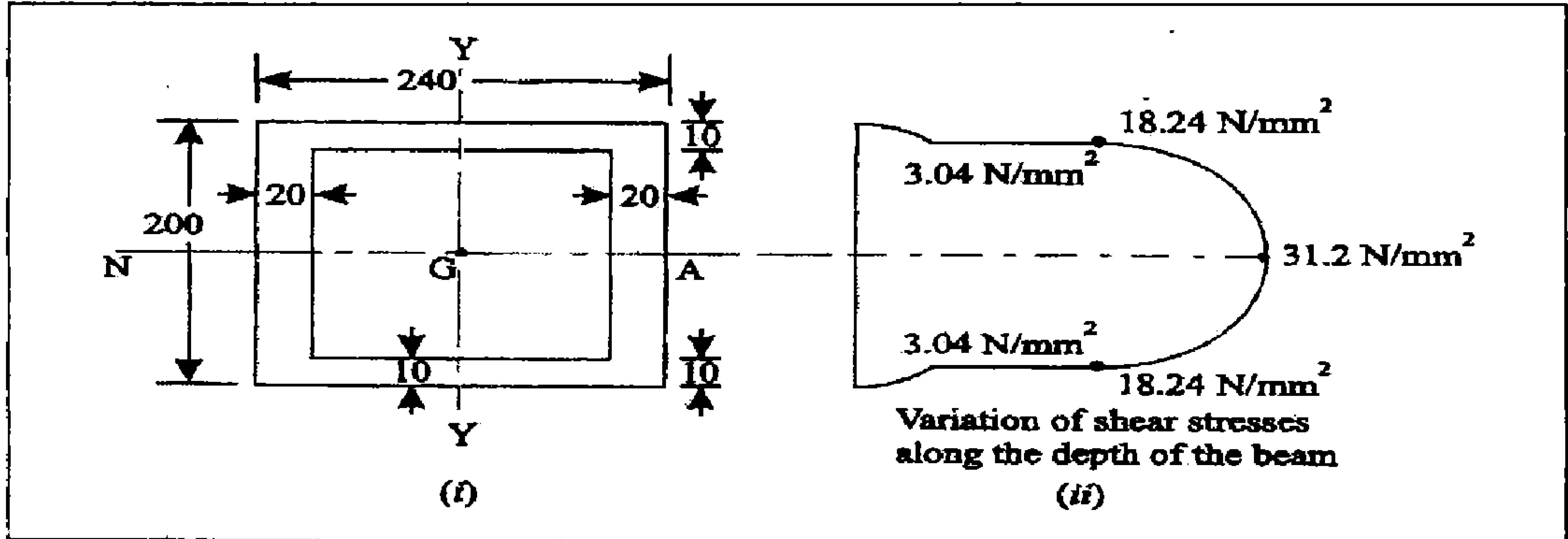
نحصل على الآتي:

$$\frac{500\,P}{62800000} = \frac{160}{100}$$

إذن:

$$P = \frac{160 \times 62800000}{500 \times 100} = \mathbf{200960\ N\ (Ans.)}$$

<u>تباين إجهادات القص عبر عمق الكمرة:</u>



إجهاد القص عند ١٠٠ مم من المحور الطبيعي = صفر.

إجهاد القص في الشفة عند ٩٠ مم من المحور الطبيعي:

$$= \frac{SA\bar{y}}{Ib} = \frac{200960 \times (240 \times 10) \times 95}{62800000 \times 240} = \mathbf{3.04\ N/mm^2\ (Ans.)}$$

إجهاد القص في العصب عند ٩٠ مم من المحور الطبيعي:

$$= 3.04 \times \frac{240}{40} = \mathbf{18.24\ N/mm^2\ (Ans.)}$$

إجهاد القص عند المحور الطبيعي:

$$\tau_{NA} = \frac{SA\bar{y}}{Ib} = \frac{200960 \times [240 \times 10 \times 95 + 2 \times 20 \times 90 \times 45]}{62800000 \times 2 \times 20} = \mathbf{31.2\ N/mm^2\ (Ans.)}$$

الفصل السادس

الإجهادات المباشرة
وإجهادات الإنثناء المدمجة

في هذا الفصل

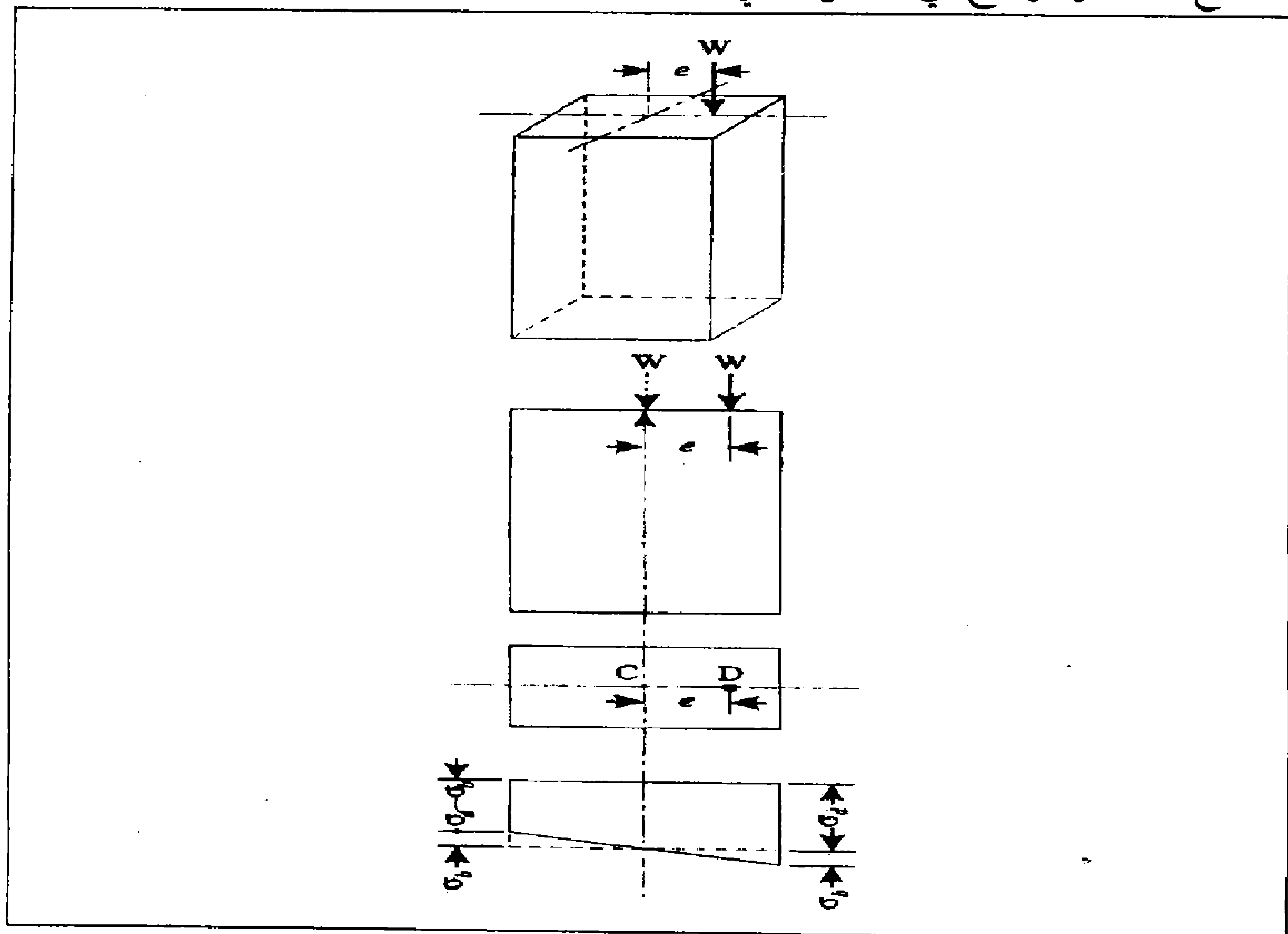
- مقدمة عامة.
- الحمل المؤثر بعيدًا على محور واحد.
- حالة عدم وجود شد في المقطع.
- ضغط الرياح على الـ chimneys.
- ضغط التربة على الحوائط الساندة.

٦-١ مقدمة عامة

دائمًا وأبدًا تواجهنا حالات يكون فيها عنصر ما لا يكون متعرضًا لعزم الانحناء فقط ولكنه يكون معرضًا أيضًا لحمل مباشر، مثل المدخنة الطويلة التي تكون معرضة لضغط رياح أو لصدمات زلزالية، أو حائط سند retaining wall يقاوم ضغط التربة أو خزان يقاوم ضغط المياه، وخلافه. في هذه الحالات يكون العنصر واقعًا تحت تأثير إجهادين (i) إجهاد بسبب عزم الانحناء و(ii) إجهاد بسبب الحمل المباشر. ونحن في هذا الفصل سوف ندرس كيفية الأخذ في الاعتبار الإجهادين وكيف أنهما يتغيران عبر المقطع العرضي.

٦-٢ الحمل الذي يؤثر بعيداً عن محور واحد

لندرس سويًا عمود قصير معرض لحمل مباشر (W) عبر خط يوازي محور العمود ويقطع محور التماثل (أي المحور الهندسي) على مسافة قدرها e (اللامركزية) من مركز ثقل المقطع، كما هو موضح في الشكل التالي:



نفترض أنه تم تطبيق حملين متساوين في المقدار W ومختلفين في الاتجاه عند مركز ثقل المقطع C. إن تطبيق حملين متساوين في المقدار ومختلفين في الاتجاه عند C لا يؤثر في نموذج تحميل العمود حيث أن أحد هذين الحملين المفترضين يلغي الآخر.

التأثير المركب (المدمج) للحمل المعطي (W) عند D والحمل المفترض W المتجه لأعلى عند C يكون ازدواج في نفس اتجاه عقارب الساعة (M = W * e)، تاركًا حمل محوري W ليتسبب في حدوث إجهادات بشكل مباشر.

ومن ثم، أي حمل لا مركزي W يكافئ حمل محور W وعزم يساوي (W*e).

والآن، لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
A	مساحة المقطع العرضي للعمود.
σ_d	الإجهاد المباشر الناتج عن الحمل المطبق **W** محوريًا.
σ_b	إجهاد الانثناء على مسافة **y** من المحور الطبيعي **.N.A**
σ	محصلة الإجهادات المباشرة وإجهادات الانثناء.

ومن ثم:

$$\sigma_b = \frac{M \times y}{I} = \frac{(W \times e)\ y}{I}$$

إجهاد الانثناء يكون شد لو أن y تُقاس على يسار المحور الطبيعي .N.A (ناحية الوجه بعيدًا عن الحمل) ويكون ضغط لو أن y تُقاس على يمين المحور الطبيعي .N.A (ناحية الوجه قريبًا من الحمل).

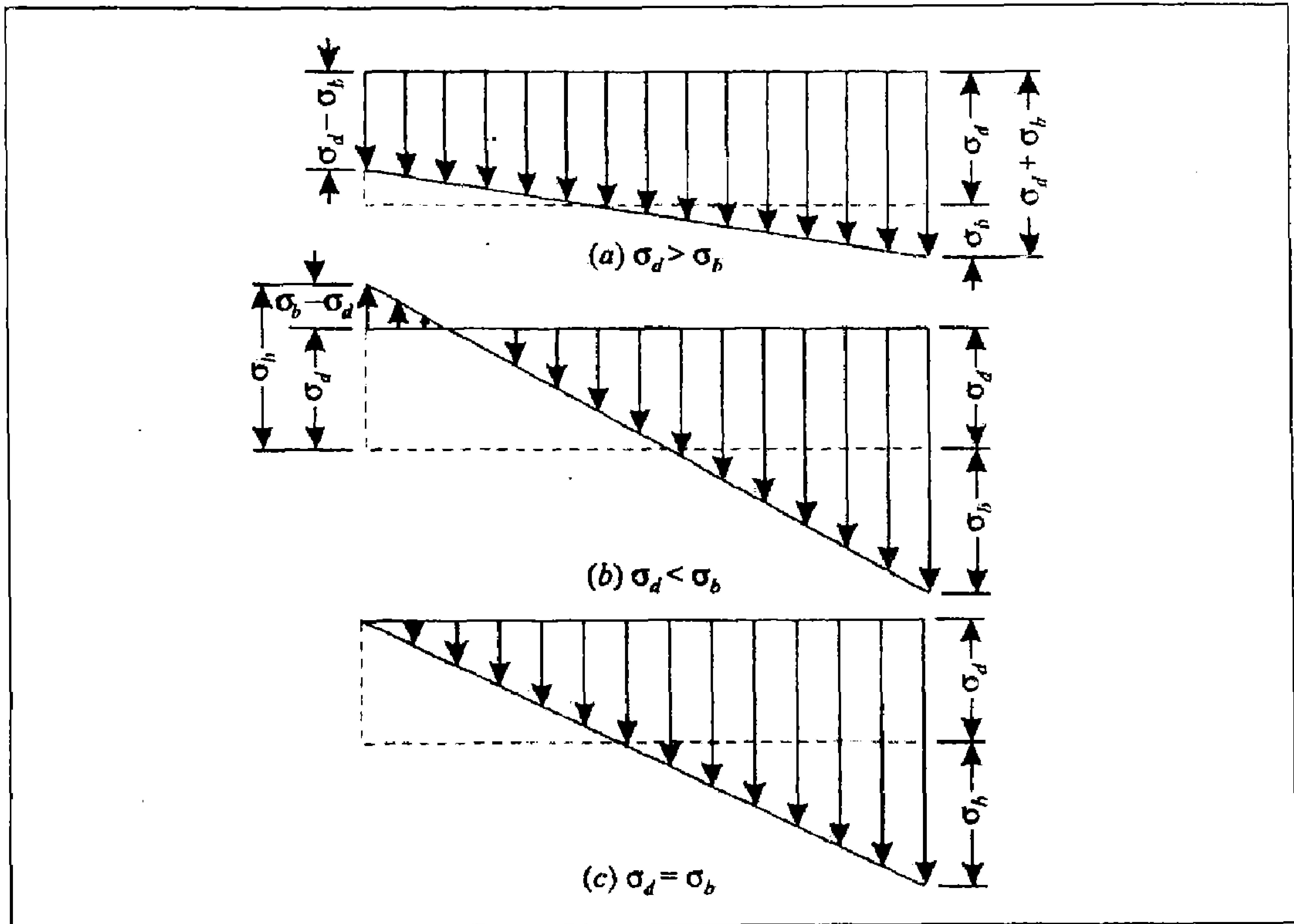
يتم حساب محصلة الإجهاد عندما يكون إجهاد الانثناء (σ_b) عبارة عن إجهاد ضغط من خلال العلاقة التالية:

$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = \frac{W}{A} + \frac{(W \times e)\ y}{I}$	**(6-1a)**

يتم حساب محصلة الإجهاد عندما يكون إجهاد الانثناء (σ_b) عبارة عن إجهاد شد من خلال العلاقة التالية:

$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b = \frac{W}{A} - \frac{(W \times e)\ y}{I}$	**(6-1b)**

لو أن (σ_d) أكبر من (σ_b)، حينئذ سيكون الإجهاد في كل المقطع بنفس الإشارة. ولكن، لو أن (σ_d) أصغر من (σ_b)، في هذه الحالة ستتغير إشارة الإجهاد، ليكون شد جزئيًا وضغط جزئيًا عبر المقطع. ومن ثم ستكون هناك ثلاثة توزيعات محتملة للإجهاد وهي عندما ($\sigma_d = \sigma_b$, $\sigma_{max} = 2\ \sigma_d$, and $\sigma_{min} = 0.$) كما هو موضح في الشكل التالي:



٦-٣ الشرط الخاص بعدم وجود شد في المقطع

الجزء (b) بالشكل السابق يدل على أن (σ_d) أصغر من (σ_b)، ومن ثم، تتغير إشارة الإجهاد، ليكون جزء من شد والجزء الآخر ضغط وذلك عبر المقطع. وحيث أن الطوب أو الحجارة masonry غير قادرة على تحمل الشد، لذلك يتحتم علينا التأكد من أن لا يوجد وجه لأي بناء بالطوب أو الحجارة ينتج أي شد وذلك لتفادي الانهيار بسبب التشريخ cracking. هذا يضع قيدًا على قيمة e بحيث لا تزيد عن قيمة معينة وهي التي سوف نبحث عنها من أجل العديد من المقاطع المختلفة.

من أجل *منع الإجهاد المنقلب*:

$$\sigma_d \geq \sigma_b \geq \frac{M}{Z}$$

$$\frac{W}{A} \geq \frac{W \times e \times d}{2I} \geq \frac{W \times e \times d}{2Ak^2}$$

(بالنسبة للمقطع المتماثل، $y = y_t = y_c = d/2$).

$e \leq \dfrac{2k^2}{d}$	(6-2)

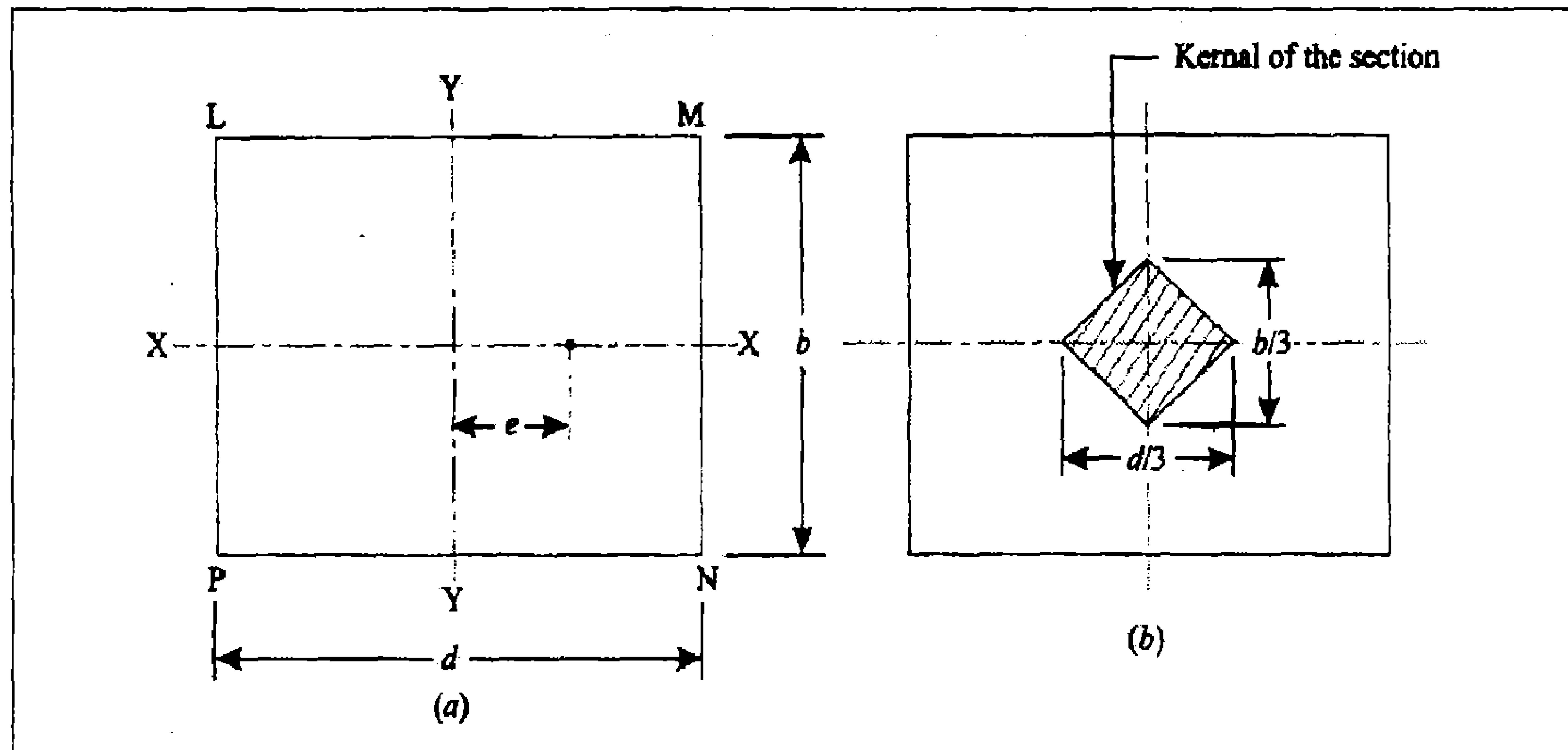
حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
d	عمق المقطع.
k	نصف قطر التدويم.

ومن ثم، من أجل عدم وجود شد في المقطع، يجب ألا تزيد قيمة e عن ($2*k^2/d$).

الحالة (I): المقطع المستطيل

لنجعل مقطع مستطيل LMNP (الموضح في الجزء (a) بالشكل التالي) محملاً عند نقطة تقع على المحور XX وتبعد عن محور YY مسافة e كما هو موضح في الشكل التالي. حول المحور YY سيحدث الانحناء.



(a)
(b)

بالنسبة لمقطع مستطيل عرضه b وعمقه d:

$$I_{YY} = \frac{bd^3}{12}, \text{ and } A = bd$$

ولكن:

$$I_{YY} = Ak_{YY}^2$$

إذن:

$$k_{YY}^2 = \frac{I_{YY}}{A} = \frac{bd^3}{12 \times bd} = \frac{d^2}{12}$$

بالتعويض في المعادلة رقم (٦-٢)، نحصل على الآتي:

$e \le \dfrac{2d^2}{d \times 12} \le \dfrac{d}{6}$	(6-3)

ومن ثم، لنرى أنه لا يحدث إجهاد منقلب reverse stress، فإن لا ينبغي أن يكون الحمل موضوعًا على مسافة أكبر من (d/6) على أي من جانبي مركز الثقل على محور XX.

ومن ثم، القيمة المقيدة لـ (e) تكون:

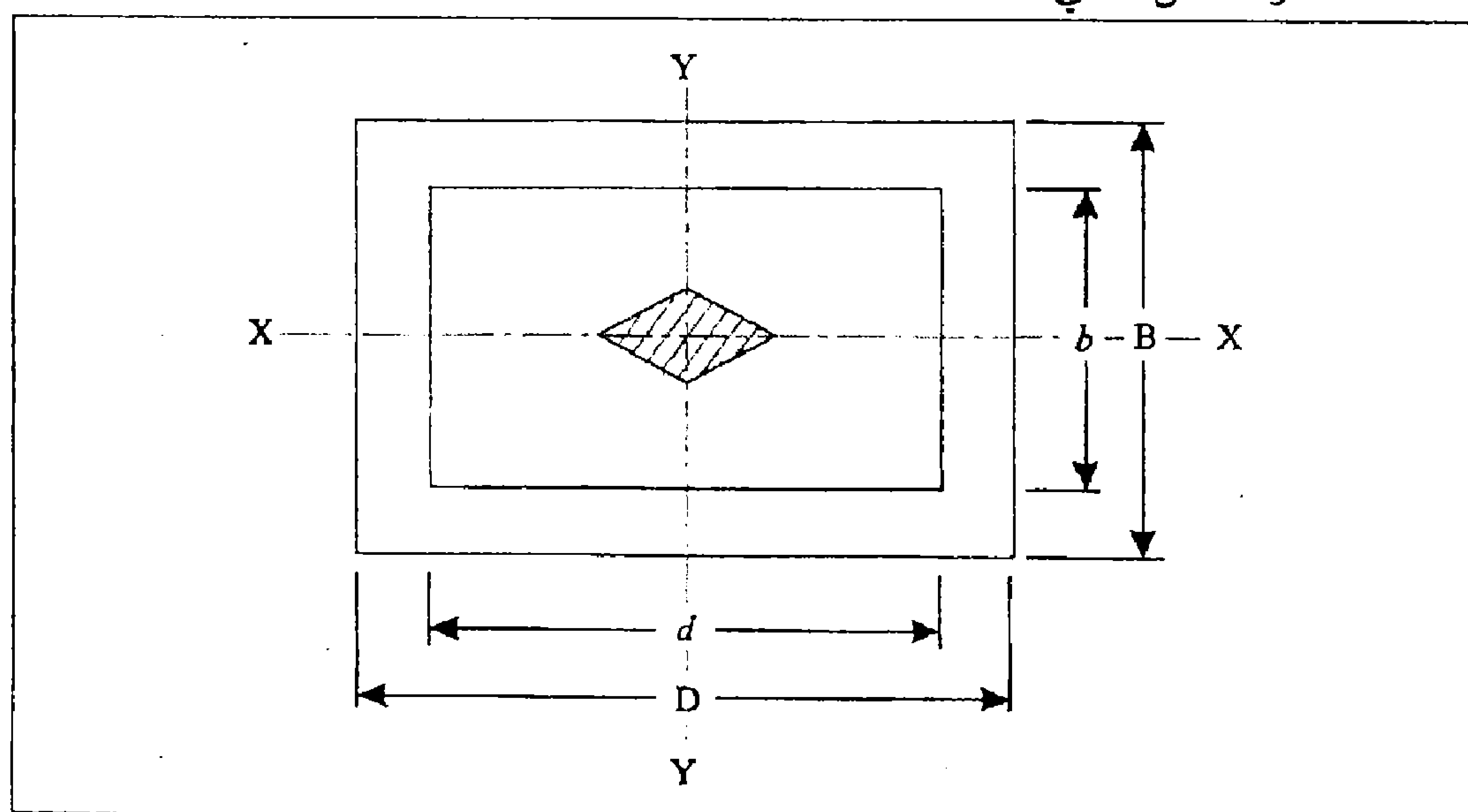
$= d/6 + d/6 = d/3$

ومن ثم، سيكون الإجهاد بنفس إشارة في كل المقطع لو أن خط تأثير الحمل واقعًا في الثلث الأوسط من المقطع.

بالمثل، لو أن الحمل موضوعًا على المحور YY، ويبعد عن محور XX مسافة، حينئذ تكون منطقة الأمان في الثلث الأوسط على محور YY (أي b/3). ولو أنه تم توصيل النقط الأربعة الموجودة على أركان منطقة الأمان (التي أبعادها الثلث الأوسط على محور XX والثلث الأوسط على محور YY)، حينئذ يتم الحصول على شكل معين كما هو موضح في الجزء (b) بالشكل السابق والذي يُسمى قلب core أو نواة kernel المقطع. ولو أن الحمل موضوع في أي مكان داخل المعين، حينئذ لن يحدث أي انقلاب للإجهاد في أي جزء من المقطع المستطيل بأكمله.

الحالة (II): المقطع المستطيل المفرغ من الداخل Hollow rectangular

انظر الشكل التالي:



عزم القصور الذاتي حول محور YY:

$$I_{YY} = \frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12} = \frac{BD^3 - bd^3}{12}$$

ولكن:

$$I_{YY} = A.k^2_{YY},$$

وبما إن $\text{Area } A = (BD - bd)$، إذن:

$$k^2_{YY} = \frac{I_{YY}}{A} = \frac{(BD^3 - bd^3)}{12\,(BD - bd)}$$

يتم حساب القطر الأفقي للمعين (أي 2*e) من خلال العلاقة التالية:

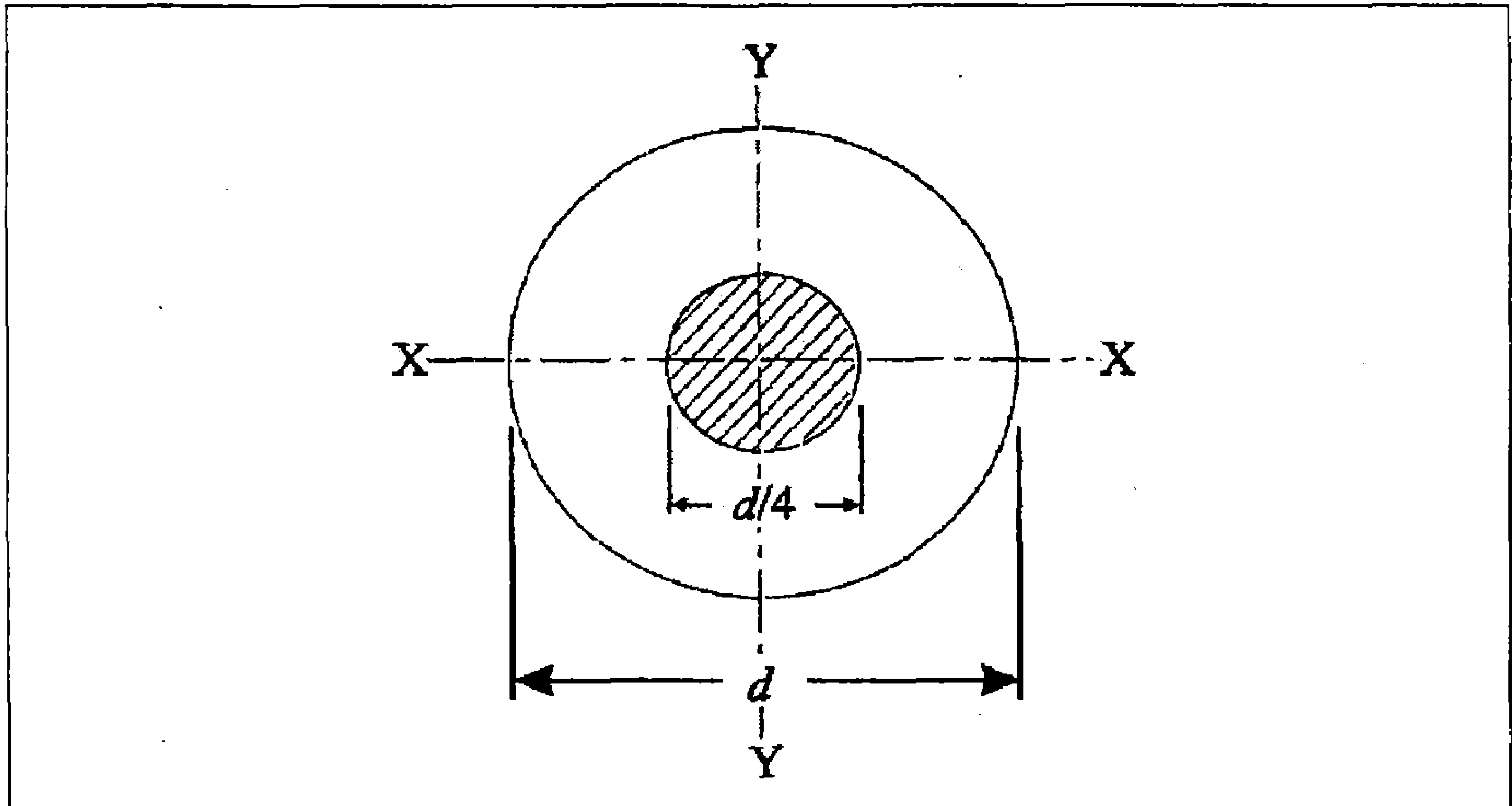
$= \dfrac{2 \times 2\,(BD^3 - bd^3)}{D \times 12\,(BD - bd)} = \dfrac{BD^3 - bd^3}{3D\,(BD - bd)}$	**(6-4)**

وبالمثل، يتم حساب القطر الرأسي للمعين من خلال العلاقة التالية:

$= \dfrac{DB^3 - db^3}{3B(DB - db)}$	**(6-4a)**

الحالة (III): المقطع الدائري

انظر الشكل التالي:



في هذه الحالة:

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{\pi d^4}{64} = Ak^2$$

ومن ذلك وبما إن $A = \dfrac{\pi}{4}\, d^2$، نحصل على الآتي:

$$k^2 = \frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4} = \frac{d^2}{16}$$

لقد رأينا أنه لكي لا يحدث شد في المقطع فإن:

$$e \leq \frac{2\,k^2}{d}$$

إذن:

$$e \leq \frac{2 \times d^2}{d \times 16}$$

أو:

$$e \leq d/8 = d/8$$

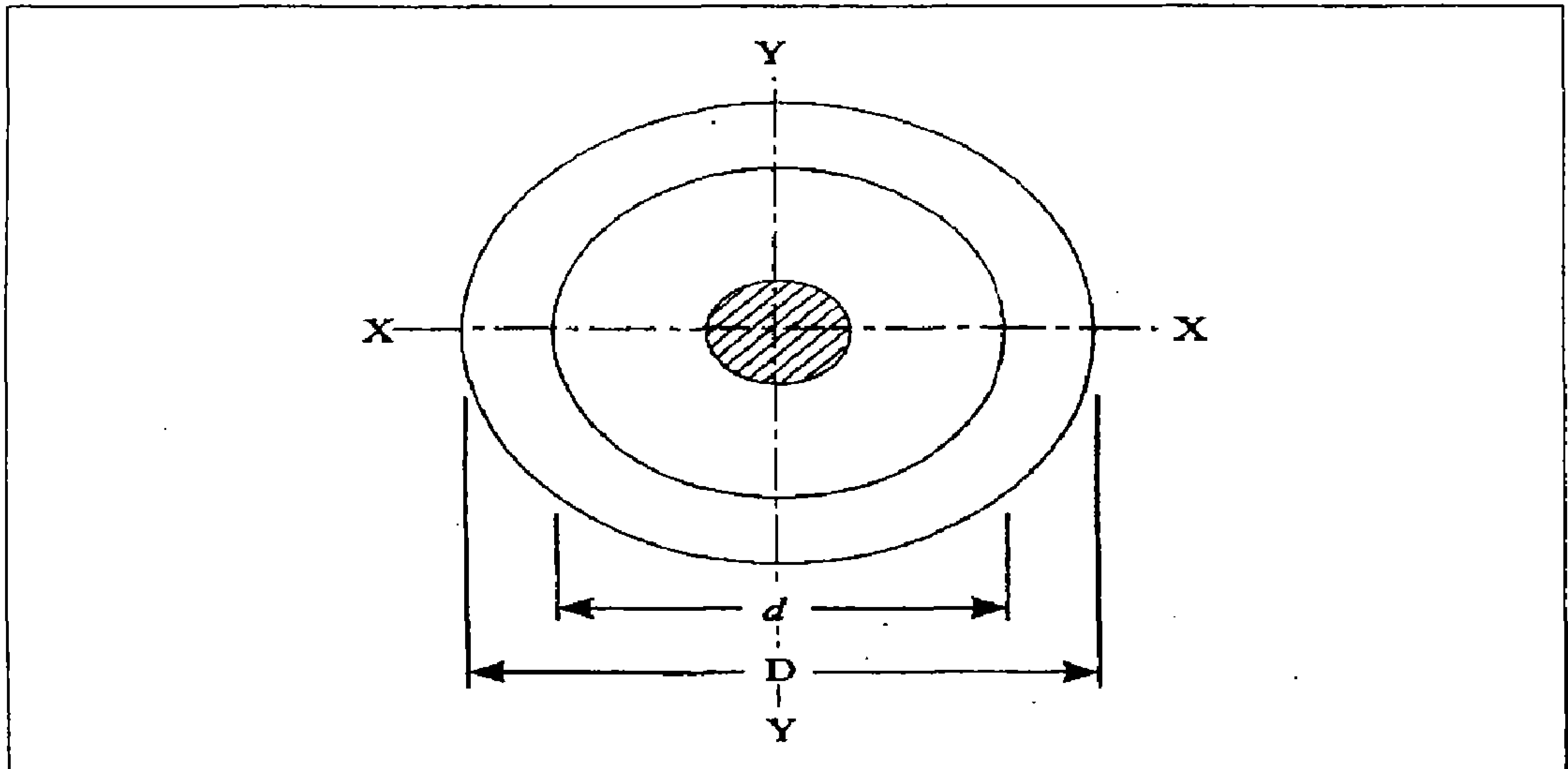
ومن ثم، يمكن حساب قطر النواة كالآتي:

$= 2\,e = 2 \times d/8 = d/4$	(6-5)

وبالتالي، من أجل ألا يتم تكوين أي شد بالمقطع، ينبغي أن يكون الحمل واقعًا داخل الربع الأوسط من المقطع.

الحالة (VI): المقطع الدائري المفرغ من الداخل

انظر الشكل التالي:



$$I_{xx} = I_{YY} = \pi/64\ (D^4 - d^4) = Ak^2$$

ومن ذلك، وبما إن $A = \frac{\pi}{4}\ (D^2 - d^2)$، نحصل على الآتي:

$$k^2 = \frac{\pi/64\ (D^4 - d^4)}{\pi/4\ (D^2 - d^2)} = \frac{D^2 + d^2}{16}$$

ومن أجل منع حدوث أي شد بالمقطع:

$$e \le \frac{2\,k^2}{d}$$

$$e \le \frac{2}{D}\left(\frac{D^2+d^2}{16}\right) \le \frac{D^2+d^2}{8\,D}$$

إذن، يمكن حساب قطر النواة من خلال العلاقة التالية:

$= 2e = \dfrac{D^2+d^2}{4\,D}$	**(6-6)**

٦-٤ ضغط الرياح على المداخن

المداخن عبارة عن منشآت عالية tall structures تتعرض لضغط رياح في الاتجاه الأفقي. وبسبب قوة الرياح الأفقية فإن قاعدة عمود المدخنة تتعرض لعزم انحناء. ومن ثم، عند قواعد مثل هذه المداخن العالية، سيكون هناك عزم انحناء بسبب قوة الريح كما سيكون هناك أيضًا إجهاد مباشر (أو المحوري) بسبب الوزن الذاتي.

الإجهاد المباشر (σ_d) = W/A، حيث أن (W) عبارة عن وزن المدخنة و(A) عبارة عن مساحة المقطع العرضي. وإجهاد الانثناء (σ_b) = M/Z، حيث أن (M) عبارة عن عزم الانحناء الناتج عن الضغط المحوري الأفقي و(Z) عبارة عن معامل المقطع.

الضغط الناتج عن الرياح عادة ما يُوصف بأنه قوة أفقية تقع على وحدة مساحة في المستوى الرأسي، حيث أنها تؤثر عمودية عليه. ولكن، شكل الجسم المعرض للرياح سوف يؤثر في مقدار القوة التي تبذلها الريح عليه. فلو أن المساحة المعرضة لضغط الريح منحنية (كما في حالة عمود المدخنة الدائرية) فإن مقدار القوة سيكون أقل مما لو كان السطح مستوية أو مسطحة. معامل التقليل (K)، بناءًا على شكل المنطقة المعرضة للرياح، يسمى معامل مقاومة الريح **co-efficient of wind resistance**. وقيمة هذا المعامل تتراوح من ٠.٥ إلى ٠.٧٥ . وبالنسبة للمداخن الاسطوانية، فإن قيمة هذا المعامل ستكون ٢/٣، ما لم ينص كود الأحمال على خلاف ذلك.

المقطع العرضي للمداخن قد يكون مربع ومفرغ من الداخل، أو يكون دائري ومفرغ من الداخل. وقد يكون المقطع العرضي منتظمًا عبر الطول الكلي للمدخنة أو قد يكون مستدقًا ناحية القمة.

قوة الريح الأفقية الكلية يتم حسابها عن طريق استخدام العلاقة التالية:

$P = K * p * A_p$	**(6-7)**

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
P	قوة الرياح الأفقية الكلية.
K	معامل مقاومة الريح.
p	الكثافة الأفقية لضغط الريح.
A_p	المساحة المسقطة للسطح المعرض للريح.

المداخن ذات المقاطع المستطيلة والمربعة المنتظمة (الثابتة)

قيمة K تُؤخذ على إنها الوحدة أي أن (K=1).

المساحة المسقطة:

$A_p = b * h$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
b	عرض المنطقة المعرضة للريح.
h	ارتفاع المدخنة.

سوف تؤثر P عند (h/2).

المداخن ذات المقاطع الدائرية المنتظمة (الثابتة)

قيمة K قد تُؤخذ على إنها (2/3) ما لم ينص كود الأحمال على خلاف ذلك.

المساحة المسقطة (A) = h × D.

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
D	القطر الخارجي لعمود المدخنة.
h	ارتفاع المدخنة.

٦-٥ ضغط التربة على الحوائط الحاملة Retaining Walls

٦-٥-١ زاوية الاستقرار Angle of Repose

زاوية الاستقرار **Angle of Repose** عبارة عن الميل الطبيعي للمواد التي تميل لأن ترتفع لأعلى لو أنه لا توجد قوة خارجية تؤثر عليها. والجدول التالي يعطي صفات

وخصائص أكثر المواد احتياجًا للسند:

المادة		الوزن (كيلونيوتن/م٣) من	إلى	زاوية الاستقرار (ϕ)
الرمل	جاف	١٤.٤	١٦	٣٠°
	رطب	١٥	١٧.٦	٣٥°
	مبلل	١٧.٦	٢٠	٢٥°
الطين	جاف	١٩.٢	٢٢.٤	٣٠°
	رطب	١٢.٢	٢٥.٦	٤٥°
	مبلل	١٩.٢	٢٥.٦	١٥°
الزلط والرمل		١٦	١٧.٦	من ٢٥° إلى ٣٠°
الزلط		١٤.٤		٤٠°
الرماد		٦.٤		٤٠°
الحمأ Mud		١٦.٨	٢٥.٦	صفر

٢-٥-٦ ضغط التربة

الحوائط الساندة في حالة بناء وتشييد الطرق في مناطق تكثر فيها التلال والهضاب تقوم بسند التربة خلفها. في هذه الحالة، كثافة أو شدة الضغط تتغير خطيًا من الصفر عند القمة إلى $(K_a * w_e * h)$ عند القاع، حيث أن:

المعامل	المعنى والاستخدام
K_a	معامل الضغط الفعال.
w_e	كثافة التربة.
h	ارتفاع التربة المسندة.

قيمة (K_a) يتم تحديدها عن طريق العلاقة التالية:

$$K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}$$

حيث إن:

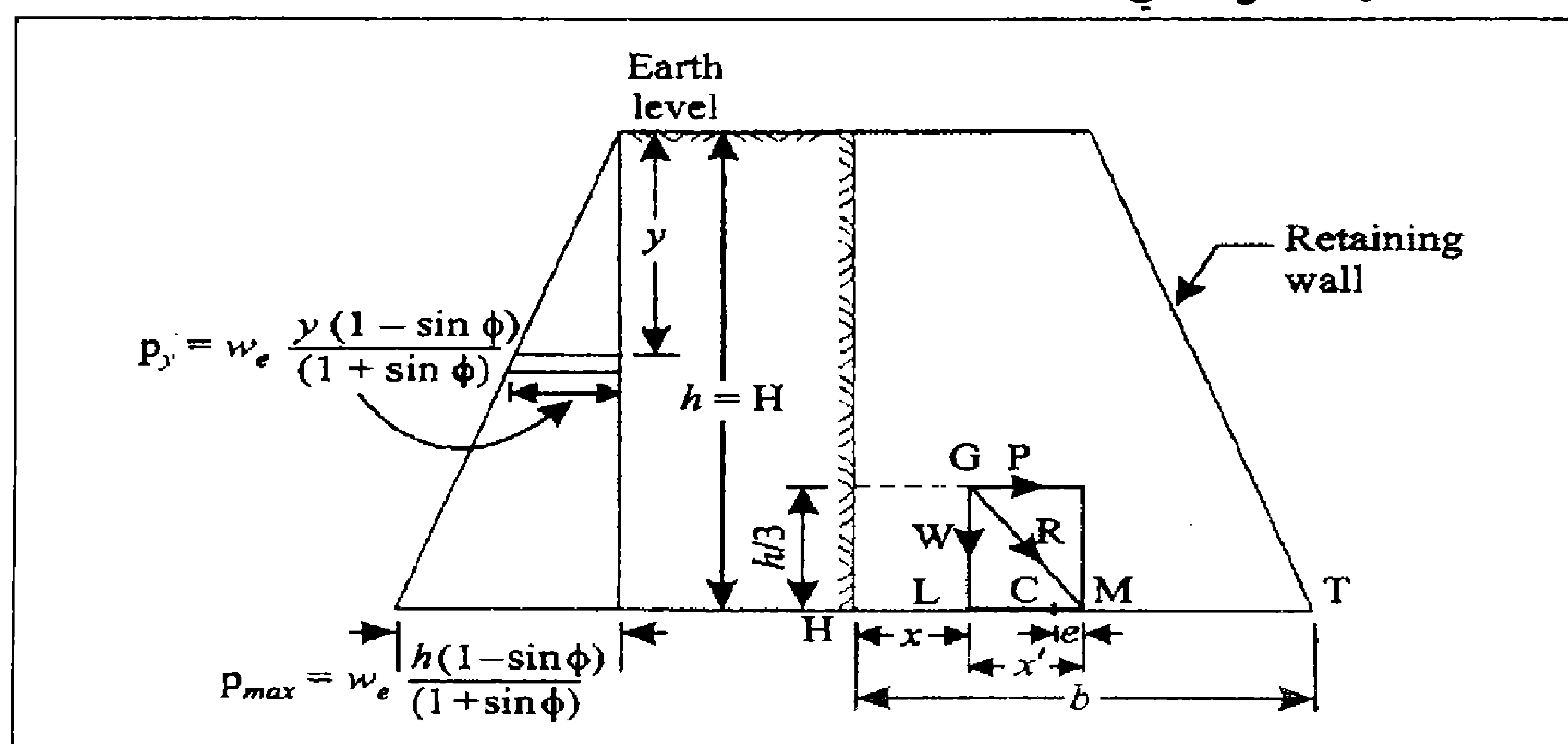
المعامل	المعنى والاستخدام
ϕ	زاوية استقرار التربة.

إذن، من أجل ١ متر من طول الحائط الساند، فإن:

(6-8)	$P = \frac{w_e h^2}{2}\left(\frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}\right)$

هذه الصيغة الرياضية الخاصة بإيجاد قيمة P تسمى صيغة Rankine. أما تفاصيل هذه الصيغة الرياضية فيمكن عرضها فيما يلي.

انظر الشكل التالي:



لندرس سويًا مقطع عرضي على شكل شبة منحرف (وهو الأكثر شهرة في هذا الخصوص) بحائط ساند طوله ١ متر، وتربة مستندة على جانبه الرأسي (قمة سطح الأرض أفقية).

ضغط التربة العرضي الأقصى عند أي عمق (y) أسفل القمة الأفقية يتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$$p_y = w_e y\left(\frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}\right)$$

وحيث أن (ϕ)، زاوية الاستقرار، بالنسبة لأي نوع من التربة تكون ثابتة، لذلك يظل معامل الضرب $\frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}$ ثابتًا أيضًا عند كل الأعماق. إن ضغط التربة الجانبي يتناسب طرديًا مع كل من كثافة التربة والعمق ومن ثم سيكون ديجرام ضغط التربة مثلث الشكل كما

هو موضح في الشكل السابق. إن ضغط التربة الأقصى يحدث عند قاع حائط السند وتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$$w_e h \left(\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \right)$$

مركز الثقل لديجرام ضغط التربة (المثلث) يقع على مسافة (h/3) من القاع ومن ثم فإن الضغط الكلي الأفقي أو العرضي يؤثر عند هذه النقطة.

متوسط الضغط الواقع على حائط السند يكون:

$$= \frac{w_e h}{2} \left(\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \right)$$

٦-٦ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

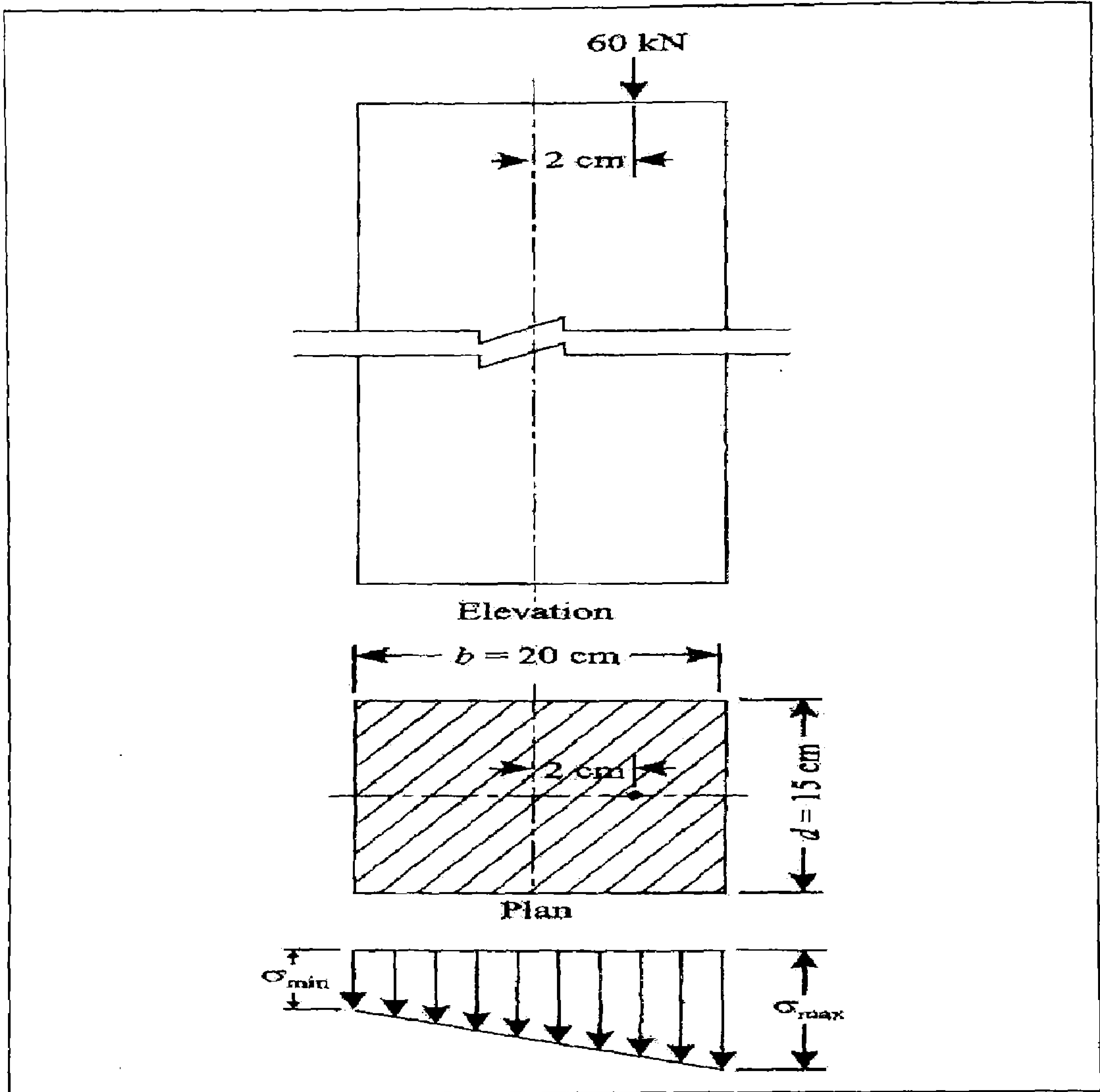
strut مستطيل عرضه ٢٠ سم وسمكه ١٥ سم. وهو يحمل حملاً قدره ٦٠ كيلونيوتن بلامركزية قدرها ٢ سم في المسقط الأفقي ومنصفًا للسمك.

المطلوب

أوجد كل من الكثافة القصوى والكثافة الدنيا للإجهاد في المقطع العرضي.

الحل

انظر الشكل التالي:



- عرض المقطع العرضي (b) = ٢٠ سم = ٠.٢ متر.
- عمق المقطع العرضي (d) = ١٥ سم = ٠.١٥ متر.
- اللامركزية (e) = ٢ سم = ٠.٠٢ متر.
- الحمل (W) = ٦٠ كيلونيوتن.

الكثافة القصوى (σ_{max}) والكثافة الدنيا (σ_{min}) للإجهاد:

الإجهاد المباشر:

$$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{60}{0.2 \times 0.15} = 2000 \text{ kN/m}^2 \text{ or } 2 \text{ MN/m}^2$$

إجهاد الانثناء:

$$\sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{W \times e}{Z}$$

والآن:

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{d\,b^3/12}{b/2} = \frac{d\,b^2}{6}$$

$$Z = \frac{0.15 \times (0.2)^2}{6} = 0.001\ \text{m}^3$$

إذن:

$$\sigma_b = \frac{60 \times 0.02}{0.001} = 1200\ \text{kN/m}^2\ \text{ or } 1.2\ \text{MN/m}^2$$

ومن ثم الإجهاد الأقصى يكون:

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 2 + 1.2 = \mathbf{3.2\ MN/m^2}\ (\textit{compressive}) \quad \textbf{(Ans.)}$$

والإجهاد الأدنى يكون:

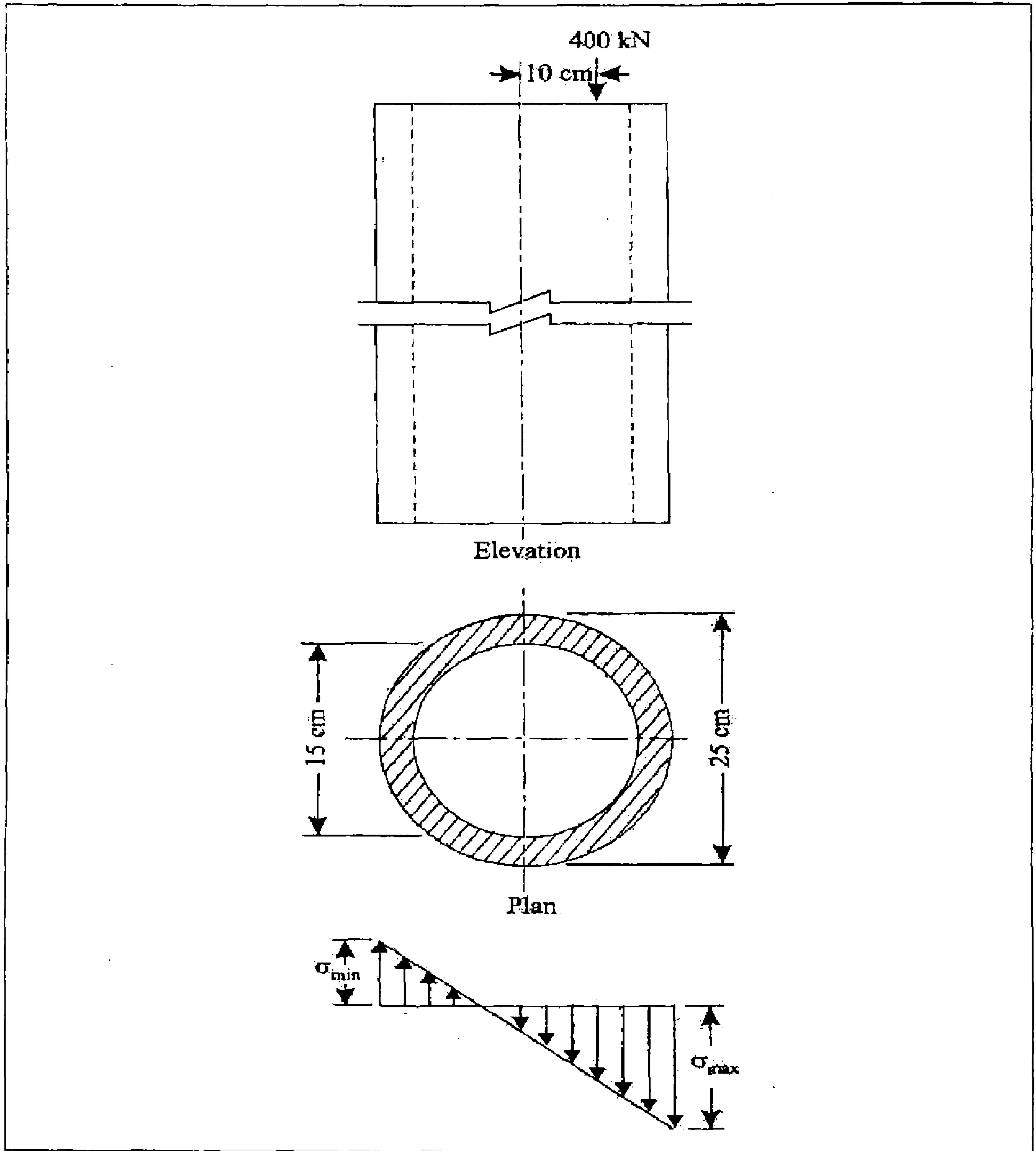
$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b = 2 - 1.2 = \mathbf{0.8\ MN/m^2}\ (\textit{compressive}) \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٢)

عمود قصير له مقطع عرضي دائري مفرغ من الداخل وقطره الخارجي عبارة عن ٢٥ سم وقطره الداخلي عبارة عن ١٥ سم ويحمل حمل رأسي قدره ٤٠٠ كيلونيوتن عبر واحد من القطر مستويات تبعد عن محور العمود مسافة ١٠ سم. أوجد الكثافات المتطرفة (القصوى والدنيا) للإجهادات مع ذكر حالاتهم.

الحل

انظر الشكل التالي:



القطر الخارجي (D) = ٢٥ سم.

القطر الداخلي (d) = ١٥ سم.

إذن يتم حساب المساحة كالآتي:

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}\ (25^2 - 15^2)$$

$$A = 314.2\ cm^2 = 314.2 \times 10^{-4}\ m^2$$

الحمل (W) = ٤٠٠ كيلونيوتن.

اللامركزية (e) = ١٠ سم = ٠.١ متر.

الإجهادات القصوى (σ_{max}) والدنيا (σ_{min}):

الإجهاد المباشر:

$$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{400}{314.2 \times 10^{-4}} \times 10^{-3}\ \text{MN/m}^2 = 12.73\ \text{MN/m}^2$$

إجهاد الإنثناء:

$$\sigma_d = \frac{W \times e}{Z}$$

والآن:

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{(\pi/64)\ (25^4 - 15^4)}{25/2} = 1335\ \text{cm}^3 = 1335 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

إذن:

$$\sigma_b = \frac{400 \times 0.1}{1335 \times 10^{-6}} \times 10^{-3}\ \text{MN/m}^2 = 29.96\ \text{MN/m}^2$$

الإجهاد الأقصى:

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 12.73 + 29.96 = \mathbf{42.69\ MN/m^2}\ (\textit{compressive}) \quad \textbf{(Ans.)}$$

الإجهاد الأدنى:

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b = 12.73 - 29.96 = -17.23\ \text{MN/m}^2 = \mathbf{17.23\ MN/m^2}\ (\textit{tensile}) \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٣)

حمل قدره ٧٥ كيلونيوتن محمول بعمود مصنوع من الحديد الصلب **cast-iron**. الأقطار الخارجية والداخلية عبارة عن ٢٠٠ مم و١٨٠ مم على الترتيب. لو أن لامركزية الحمل عبارة عن ٣٥ مم، إذن أوجد الآتي:

(i) الإجهادات القصوى والدنيا.

(ii) أقصى قيمة للامركزية بحيث لا يوجد أي إجهاد شد في العمود.

الحل

القطر الخارجي (D) = ٢٠٠ مم = ٠.٢ متر.

القطر الداخلي (d) = ١٨٠ مم = ٠.١٨ متر.

اللامركزية (e) = ٣٥ مم = ٠.٠٣٥ متر.

الحمل (W) = ٧٥ كيلونيوتن.

(i) الإجهادات القصوى (σ_{max}) والدنيا (σ_{min}):

الإجهاد المباشر:

$$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{75}{(\pi/4)(0.2^2 - 0.18^2)} \times 10^{-3}\ \text{MN/m}^2 = 12.56\ \text{MN/m}^2$$

إجهاد الإنثناء:

$$\sigma_b = \frac{W \times e}{Z}$$

ولكن:

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{(\pi/64)\,(D^4 - d^4)}{D/2}$$

$$Z = \frac{\pi}{64}\left[\frac{0.2^4 - 0.18^4}{0.2/2}\right] = 2.7 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

إذن:

$$\sigma_b = \frac{75 \times 0.035}{2.7 \times 10^{-4}} \times 10^{-3}\ \text{MN/m}^2 = 9.72\ \text{MN/m}^2$$

إذن:

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 12.56 + 9.72 = \mathbf{22.28\ MN/m^2}\ (comp.) \quad \text{(Ans.)}$$

وأيضًا:

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b = 12.56 - 9.72 = \mathbf{2.84\ MN/m^2}\ (comp.) \quad \text{(Ans.)}$$

(ii) قيمة اللامركزية اللازمة لعدم تكوين إجهاد شد (e):

لكي لا يكون هناك إجهاد شد، إذن:

$$\frac{W \times e}{Z} = \frac{W}{A}$$

أو:

$$e = \frac{Z}{A} = \frac{2.7 \times 10^{-4}}{(\pi/4)\,(0.2^2 - 0.18^2)} = 0.0452\ \text{m} = \mathbf{45.2\ mm} \quad \text{(Ans.)}$$

المثال رقم (٤)

عمود قصير قطره الخارجي ٢٠ سم وقطره الداخلي ١٥ سم، عندما تعرض لحمل ما فإن قياسات الإجهاد دلت على أن الإجهاد يتباين من ١٥٠ ميجانيوتن/م٢ (انضغاط) على أحد الطرفين إلى ٢٥ ميجانيوتن/م٢ (شد) على الطرف الآخر. قم بتقدير الحمل ومسافة خط تأثير الحمل من محور العمود.

الحل

لدينا البيانات التالية:

- القطر الخارجي (D) = ٢٠ سم.
- القطر الداخلي (d) = ١٥ سم.

ومن ثم يمكن حساب مساحة مقطع العمود كالآتي:

$$A = \frac{\pi}{4}\ (20^2 - 15^2) = 137.5\ \text{cm}^2 = 137.5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$\sigma_{max} = 150\ \text{MN/m}^2\ (\text{comp.})$$

$$\sigma_{min} = 25\ \text{MN/m}^2\ (\text{tensile})$$

حساب الحمل (W) ومسافة اللامركزية (e):

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{(\pi/64)\ (D^4 - d^4)}{D/2} = \frac{(\pi/64)\ (20^4 - 15^4)}{20/2} = 536.9\ \text{cm}^3 = 536.9 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

نحن نعلم الآتي:

الإجهاد الأقصى:

σ_{max} (comp.), $\quad 150 = \dfrac{W}{A} + \dfrac{W \times e}{Z}$	**(i)**

الإجهاد الأدنى:

σ_{min} (tensile), $\quad 25 = \dfrac{W \times e}{Z} - \dfrac{W}{A}$	**(ii)**

وبطرح المعادلة (ii) من المعادلة (i)، نحصل على الآتي:

125 = 2*W/A

ومنها:

$$W = \frac{125\,A}{2} = \frac{125 \times 137.5 \times 10^{-4}}{2} = 0.859\ \text{MN or } \mathbf{859\ kN} \quad \textbf{(Ans.)}$$

والآن، بإضافة المعادلة (i) إلى المعادلة (ii) نحصل على العلاقة التالية:

$$175 = \frac{2W \times e}{Z}$$

ومنها:

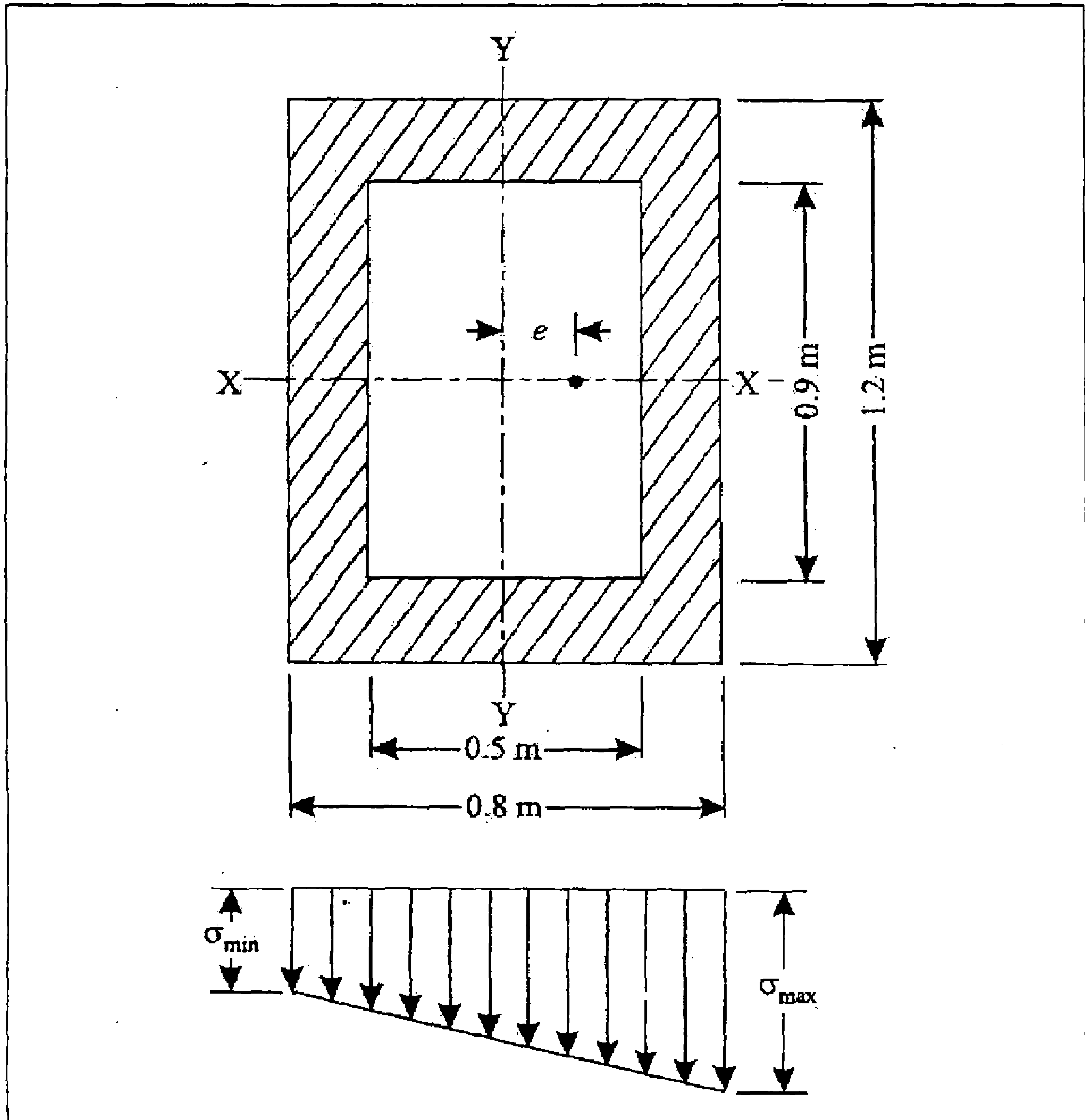
$$e = \frac{175\,Z}{2W} = \frac{175 \times 536.9 \times 10^{-6}}{2 \times 0.859}\ \text{m} = 0.05469\ \text{m} = \mathbf{54.69\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٥)

ركيزة مبنية من الطوب لها مقطع عرضي مستطيل مفرغ من الداخل أبعاده الكلية ١.٢ متر × ٠.٨ متر، مع كون سمك الحائط عبارة عن ٠.١٥ متر. حمل رأسي قدره ١٠٠ كيلونيوتن يتم نقله في المستوى الرأسي الذي يمر عبر منتصف الجانب الذي طوله ١.٢ متر على مسافة قدرها ٠.١ متر من المحور الهندسي للمقطع العرضي للركيزة. احسب كل من الإجهاد الأقصى والإجهاد الأدنى في المقطع.

الحل

انظر الشكل التالي:



في هذا المثال لدينا الآتي:

الأبعاد الخارجية للمقطع = ١.٢ متر × ٠.٨ متر.

التخانة = ٠.١٥ متر.

الأبعاد الداخلية للمقطع = (١.٢ - ٢×٠.١٥) × (٠.٨ - ٢×٠.١٥)

= ٠.٩ متر × ٠.٥ متر

مساحة المقطع العرضي = (١.٢ × ٠.٨) - (٠.٩ × ٠.٥) = ٠.٥١ م٢.

اللامركزية (e) = ٠.١ متر.

الحمل (W) = ١٠٠ كيلونيوتن.

الإجهاد الأقصى (σ_{max}) والإجهاد الأدنى (σ_{min}):

الإجهاد المباشر:

$$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{100}{0.51} = 196 \text{ kN/m}^2$$

إجهاد الإنثناء:

$$\sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{W \times e}{Z}$$

$$I = \frac{1.20 \times 0.8^3}{12} - \frac{0.9 \times 0.5^3}{12} = 0.041825 \text{ m}^4$$

$$y = \frac{0.8}{2} = 0.4 \text{ m}$$

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{0.041825}{0.4} = 0.10456 \text{ m}^3$$

ومن ثم:

$$\sigma_b = \frac{100 \times 0.1}{0.10456} = 95.6 \text{ kN/m}^2$$

إذن، يتم حساب الإجهاد الأقصى كالآتي:

$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 196 + 95.6 =$ **291.6 kN/m²** (*comp.*) **(Ans.)**

وكذلك يتم حساب الإجهاد الأدنى كالآتي:

$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b = 196 - 95.6 =$ **100.4 kN/m²** (*comp.*) **(Ans.)**

الفصل السابع

إجهادات القص Shearing Stresses في الكمرات

في هذا الفصل

- مقدمة عامة.
- تباين إجهاد القص.
- تبـاين إجهـاد القـص فـي مقطـع العرضـي للكمـرة: المقطـع المستطيل، والمقطع الدائري، والـ **I-section** المتماثل.
- توزيع إجهاد القص بالنسبة للمقاطع التقليدية.
- الأمثلة العملية.

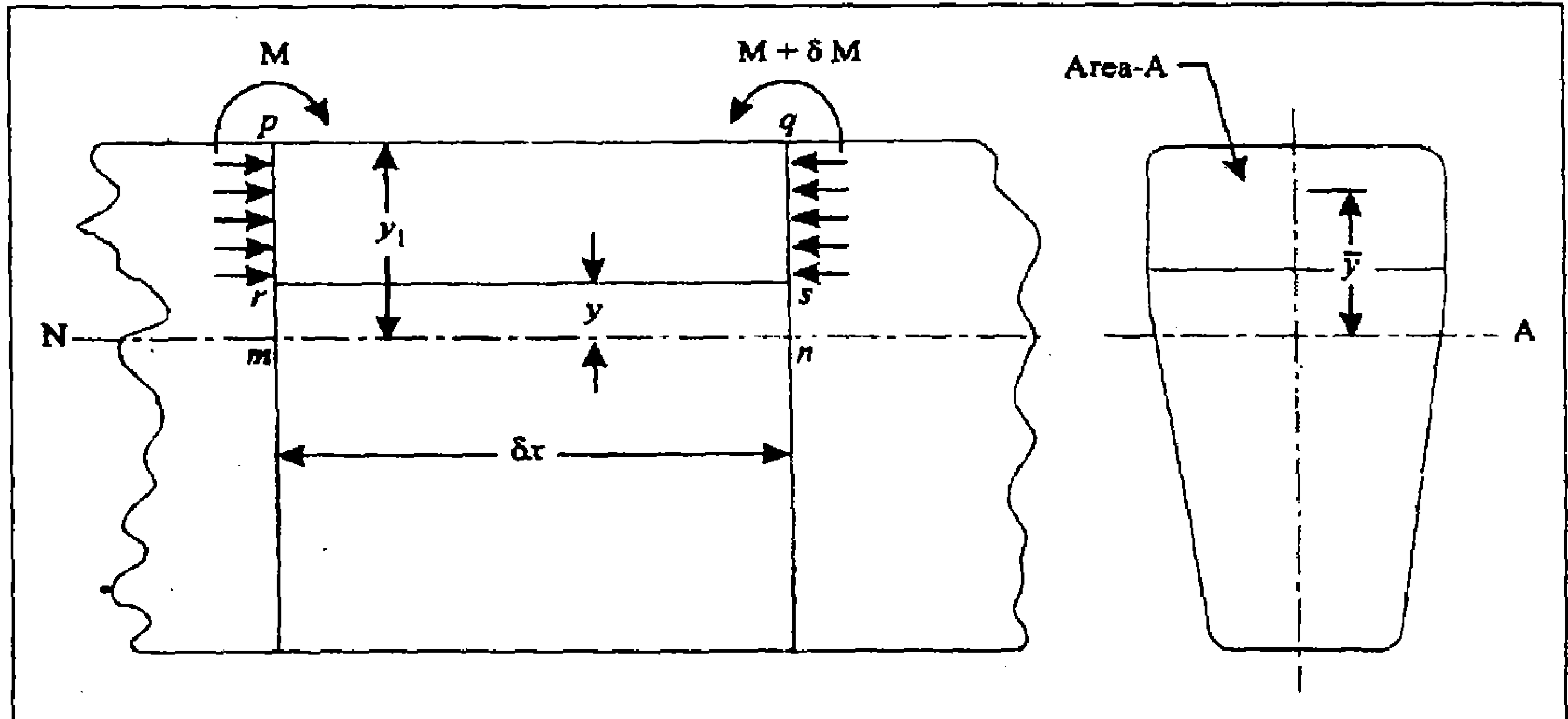
٧-١ مقدمة عامة

لقد درسنا فيما سبق (الفصل الخامس) تباين إجهاد الانثناء من نقطة لأخرى في أي كمرة ولقد تجاهلنا تأثير قوى القص. والآن وحيث أنه عند كل نقطة يُفترض أن جزيئات المواد في وضع اتزان، لذلك ينبغي الأخذ في الاعتبار تأثير كل من قوى القص وعزوم الانحناء.

هنا، سوف نتعامل مع معاملين. الأول هو أن قوة القص المطبقة سيتم توزيعها على إنها إجهاد قص عبر المقاطع العرضية للكمرة. ولكن عند كل نقطة على أي مقطع سيقوم القص العرضي بإنتاج إجهاد قص "أفقي" مكمل؛ أي ستكون هناك إجهادات قص تؤثر بين الطبقات الطولية المتتابعة بالكمرة، مما يؤدي إلى مقاومة الانزلاق بين تلك الطبقات. إجهادات القص الطولية هذه سوف توازن تباين إجهادات الانثناء بطول الكمرة. هذا، وينبغي ملاحظة أنه لو كان عزم الانحناء متسقًا؛ إذن لن تكون هناك قوة قص، ومن ثم لا يتم تكوين إجهاد قص. هذا هو الاتساق، حيث أنه بدون اختلاف إجهاد الانحناء بين القطاعات العرضية المتتابعة حينئذ يمكن ألا توجد إجهادات قص طولية.

٧-٢ تباين إجهاد القص

لندرس سويًا شريحة قصيرة من كمرة (الشكل التالي) طولها (أي الشريحة) (δx)، مع تباين عزم الانحناء عبر طولها من M إلى (M + δM).



خذ طبقة rs تقع على مسافة y من المحور الطبيعي؛ واجعل عرض هذه الطبقة عبارة عن b ومن ثم فمساحتها تكون (δx * b). وبين الأوجه المتتابعة للشريحة ستكون هناك قوة

زائدة، حيث أن الإجهاد عند الوجه pr سيكون أقل من الإجهاد عند الوجه qs. هذه القوة الزائدة سيتم موازنتها بإجهاد قص يؤثر عبر الطبقة rs.

إذن، القوة الكلية الواقعة على الوجه pr تكون:

$$= \sum_{y}^{y_1} \frac{My}{I} (\delta y \times b) = \int_{y}^{y_1} \frac{M}{I} (yb)\, dy$$

والقوة الكلية على الوجه sq تكون:

$$= \int_{y}^{y_1} \frac{(M + \delta M)}{I} (y \,.\, b)\, dy$$

أو، القوة الزائدة بين الوجه sq والوجه rp تكون:

$$= \int_{y}^{y_1} \frac{\delta M}{I} (y \,.\, b)\, dy = \frac{\delta M}{I} \int_{y}^{y_1} (y \,.\, b)\, dy$$

ولكن، $\int_{y}^{y_1} y.b\, dy$ عبارة عن عزم المساحة للوجه pr حول المحور الطبيعي، أو:

$$\int_{y}^{y_1} y.b\, dy = A\bar{y}$$

هذه القوة الزائدة يتم موازنتها بقوة قص (τ) تؤثر عبر الوجه rs. والقوة الناتجة عن هذا الإجهاد تكون $\tau \times (b \,.\, \delta x)$. إذن:

$$\tau \times (b.\delta x) = \frac{\delta M}{I} A\bar{y} \quad \text{or} \quad \tau = \frac{\delta M}{\delta x} \times \frac{1}{Ib} \times A\bar{y}$$

في الحد ($\delta x \to 0$) فإن $\frac{\delta M}{\delta x} = S$ ، ومن ثم يتم حساب إجهاد القص كالآتي:

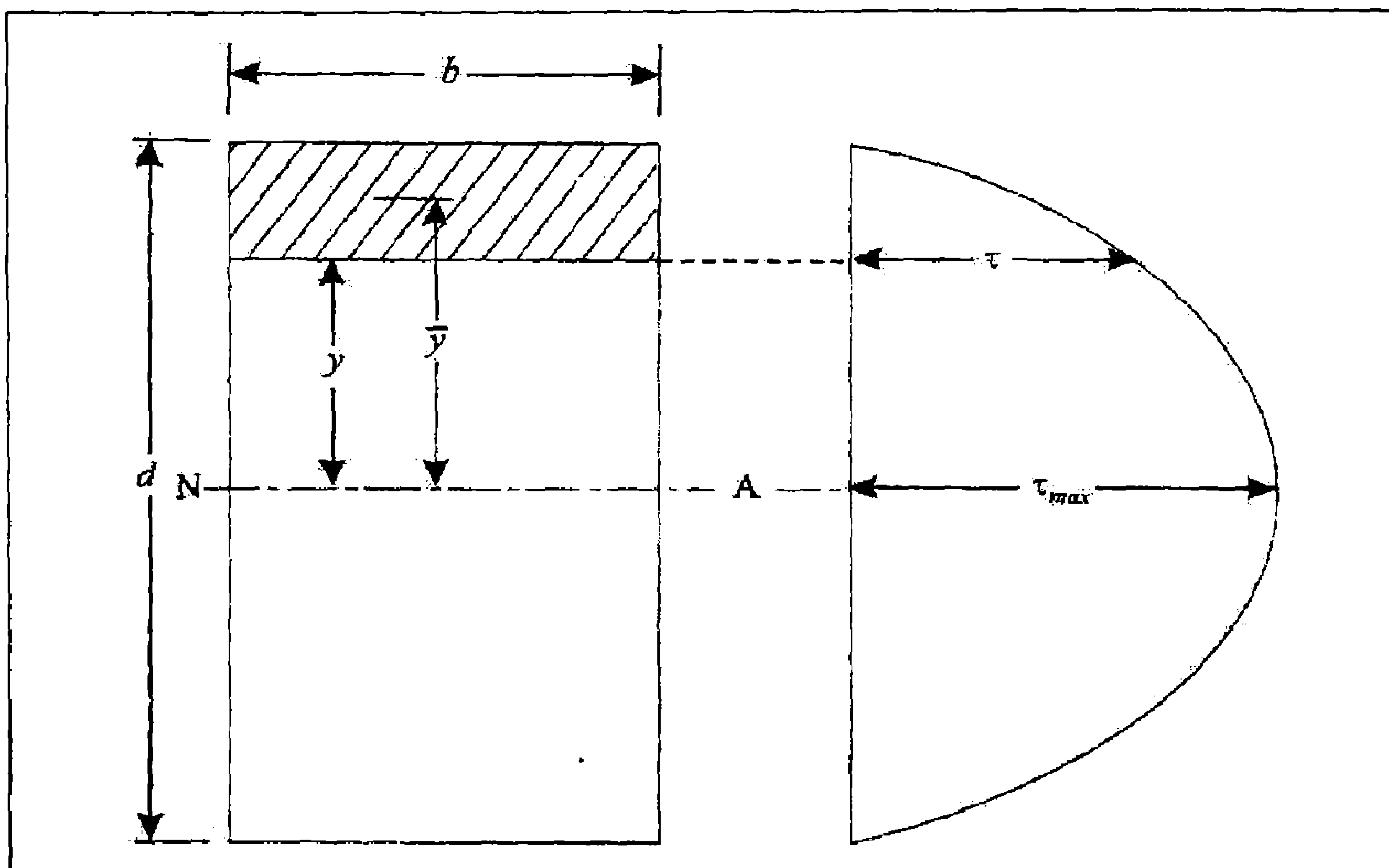
$\tau = \dfrac{S A \bar{y}}{I b}$	**(7-1)**

حيث أن b عبارة عن عرض الكمرة عند النقطة التي عندها يتم دراسة قوة القص، و $A\bar{y}$ عبارة عن عزم المساحة المقطعية فوق تلك النقطة حول المحور الطبيعي.

٧-٣ تباين إجهاد القص في المقطع العرضي للكمرة

(١) المقطع العرضي المستطيل

لنجعل b عبارة عن عرض المقطع المستطيل ونجعل d عمق المقطع المستطيل، كما هو موضح في الشكل التالي:



لنجعل (τ) عبارة عن إجهاد القص في طبقة توجد على مسافة y من المحور الطبيعي N.A. حيث يكون المقطع محل الدراسة معرضًا لقوة قص S.

المنطقة المظللة بالشكل السابق:

$$A = b\left(\frac{d}{2} - y\right), \quad \bar{y} = \frac{1}{2}(d/2 + y), \quad I = \frac{b\,d^3}{12}$$

إذن:

$$A\bar{y} = \frac{b}{2}\left(\frac{d}{2} - y\right)\left(\frac{d}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

والآن:

$$\tau = \frac{S\ A\ \bar{y}}{I.b} = \frac{S \times \frac{b}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)}{\frac{bd^3}{12} \times b}$$

أي أن:

$\tau = \dfrac{12S \times b}{b \times bd^3 \times 2}\left(\dfrac{d^2}{4} - y^2\right)$	**(7-2)**

القيمة القصوى لـ (τ) تكون عند المحور الطبيعي عندما تكون (y=0)، أو:

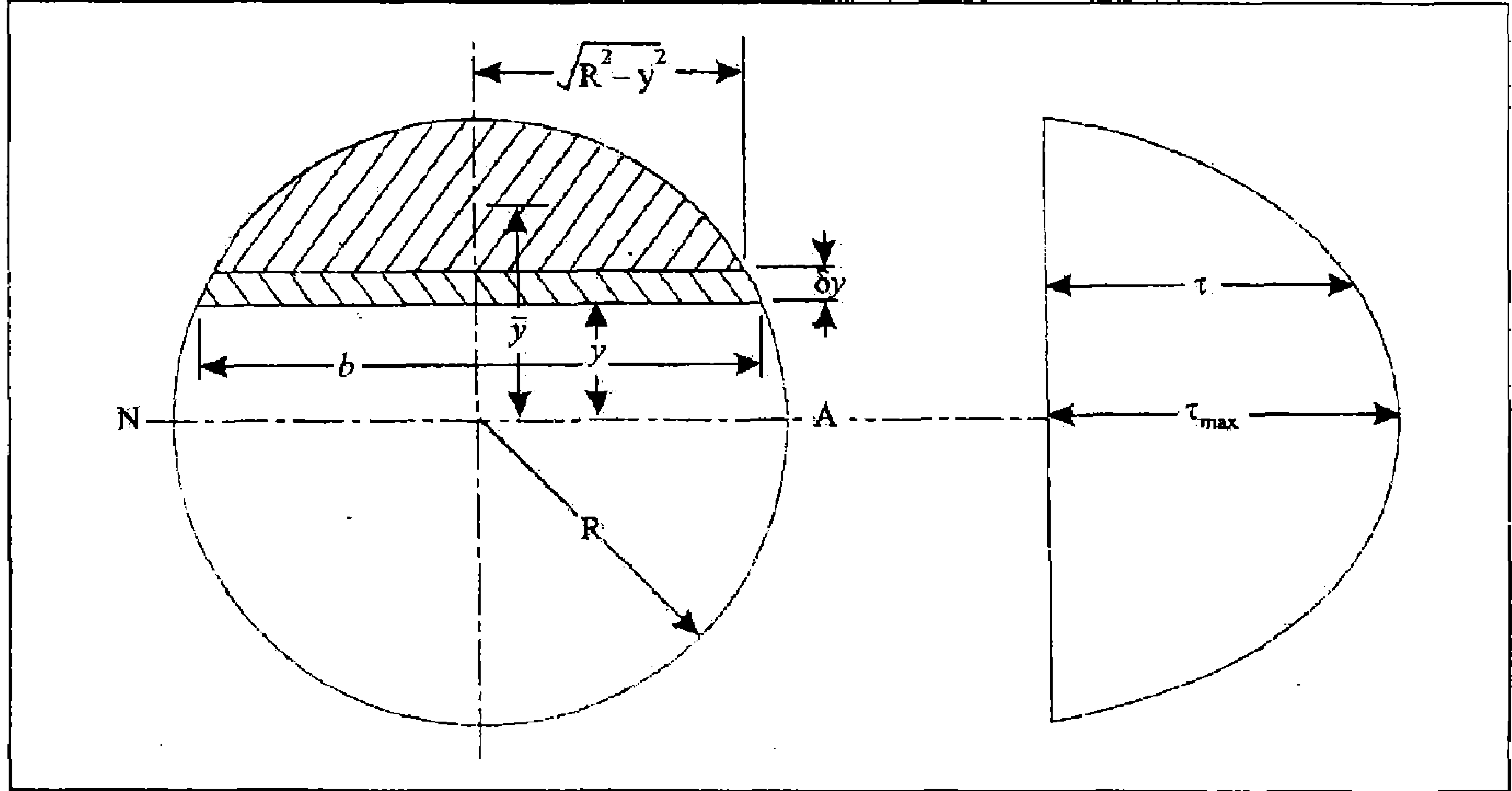
$$\tau_{max} = \frac{12S}{bd^3} \times \frac{d^2}{8} = \frac{3}{2} \times \frac{S}{bd}$$

ولكن ((S/(b*d) عبارة عن إجهاد القص المتوسط (τ_{mean}) عند المقطع العرضي محل الدراسة. ومن ثم:

$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\tau_{mean}$	(7-2a)

(٢) المقطع الدائري المصمت

في الشكل التالي، نشاهد مقطع دائري مصمت نصف قطره R:



لندرس شريحة عنصرية سمكها (δy) توجد على مسافة y من المحور الطبيعي.

ولنجعل عرض الشريحة عبارة عن b، ومن ثم:

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

مساحة الشريحة العنصرية:

$$\delta a = b \times \delta y = 2\sqrt{R^2 - y^2} \times \delta y$$

عزم المساحة العنصرية حول المحور الطبيعي:

$$= \delta a \times y = 2\sqrt{\left(R^2 - y^2\right)} \times y\ \delta y$$

بالنسبة للمنطقة المظللة، يتم حساب العزم الكلي كالآتي:

$$= \int_y^R 2y\sqrt{(R^2 - y^2)}\ dy = \int_y^R b \cdot y \cdot dy$$

والآن:

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

إذن:

$$b^2 = 4\ (R^2 - y^2)$$

وبعمل تفاضل لكلا الجانبين، نحصل على الآتي:

$$2b\ .\ db = -4 \times 2y\ dy \qquad \text{or} \qquad y\ dy = -\frac{bdb}{4}$$

عندما (y=y) إذن (b=b). وعندما (y=R)، إذن (b=0). ومن ثم:

$$\int_y^R b.y\ .\ dy = \int_b^0 -b \times \frac{b.db}{4} = \int_0^b \frac{b^2.db}{4} = \left[\frac{b^3}{12}\right]_0^b = \frac{b^3}{12}$$

والآن:

$$\tau = \frac{S}{Ib} \times \text{moment of shaded area } (A\bar{y})$$

أو:

$$\tau = \frac{S}{Ib} \times \frac{b^3}{12}$$

أو:

$$\tau = \frac{S}{12\ I}\ b^2 = \frac{S}{12 \times \frac{\pi R^4}{4}} \left[4\ (R^2 - y^2)\right] = \frac{4}{3}\ \frac{S}{\pi R^4}\ (R^2 - y^2)$$

أي أن:

$\tau = \frac{4}{3}\ \frac{S}{\pi R^4}\ (R^2 - y^2)$	**(7-3)**

عند (y=R) فإن (τ=0)، وعند (y=0) ستصل (τ) إلى الحد الأقصى. ومن ثم:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\ \frac{S}{\pi R^2}$$

وحيث أن:

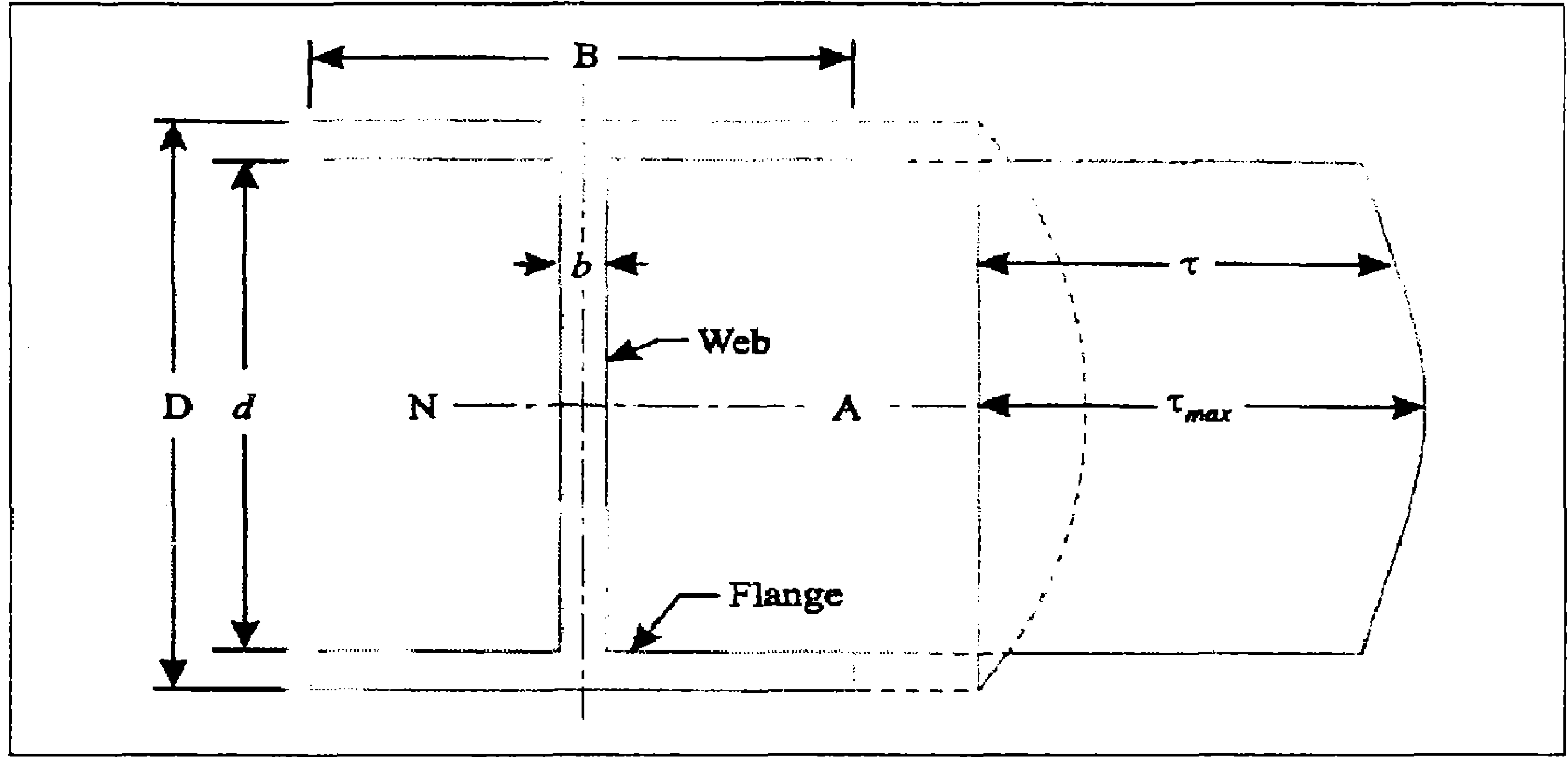
$$\tau_{mean} = \frac{S}{\pi R^2}$$

إذن:

$\tau_{max} = \frac{4}{3}\ \tau_{mean}$	**(7-3a)**

(٣) الـ I-section المتماثل

في الشكل التالي، نشاهد I-section متماثل:



إجهاد القص في الشفتين العلوية والسفلية:

$$\tau = \frac{S}{IB} \times A\bar{y}$$

$$A\bar{y} = B\left(\frac{D}{2} - y\right) \times \frac{1}{2} \times (D/2 + y) = \frac{B}{2}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)$$

إذن:

$\tau = \frac{S}{IB} \times \frac{B}{2}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) = \frac{S}{2\,I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)$	(7-4)

إجهاد القص في العصب:

$$\tau = \frac{S}{I\,b} A\bar{y}$$

$$A\bar{y} = B.\frac{(D-d)}{2} \times \left(\frac{D+d}{4}\right) + \left(\frac{d}{2} - y\right) b \times \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

إذن:

$\tau = \frac{S}{8\,Ib}\left[B\,(D^2 - d^2) + b\,(d^2 - 4y^2)\right]$	(7-5)

في الشكل السابق، نشاهد توزيع إجهاد القص الحادث بسبب تلك التأثيرات المنفصلة. إن قيمة (τ) ستصل إلى الحد الأقصى عند (y=0)، إذن:

$\tau_{max} \doteq \frac{S}{8\,Ib}\left[B\,(D^2 - d^2) + bd^2\right]$	(7-6)

من الممكن ملاحظة أنه عند السطح الداخلي للشفة، وبمعرفة التغير في عرض المقطع، فإن القيمة العددية لإجهاد القص تتغير كالآتي:

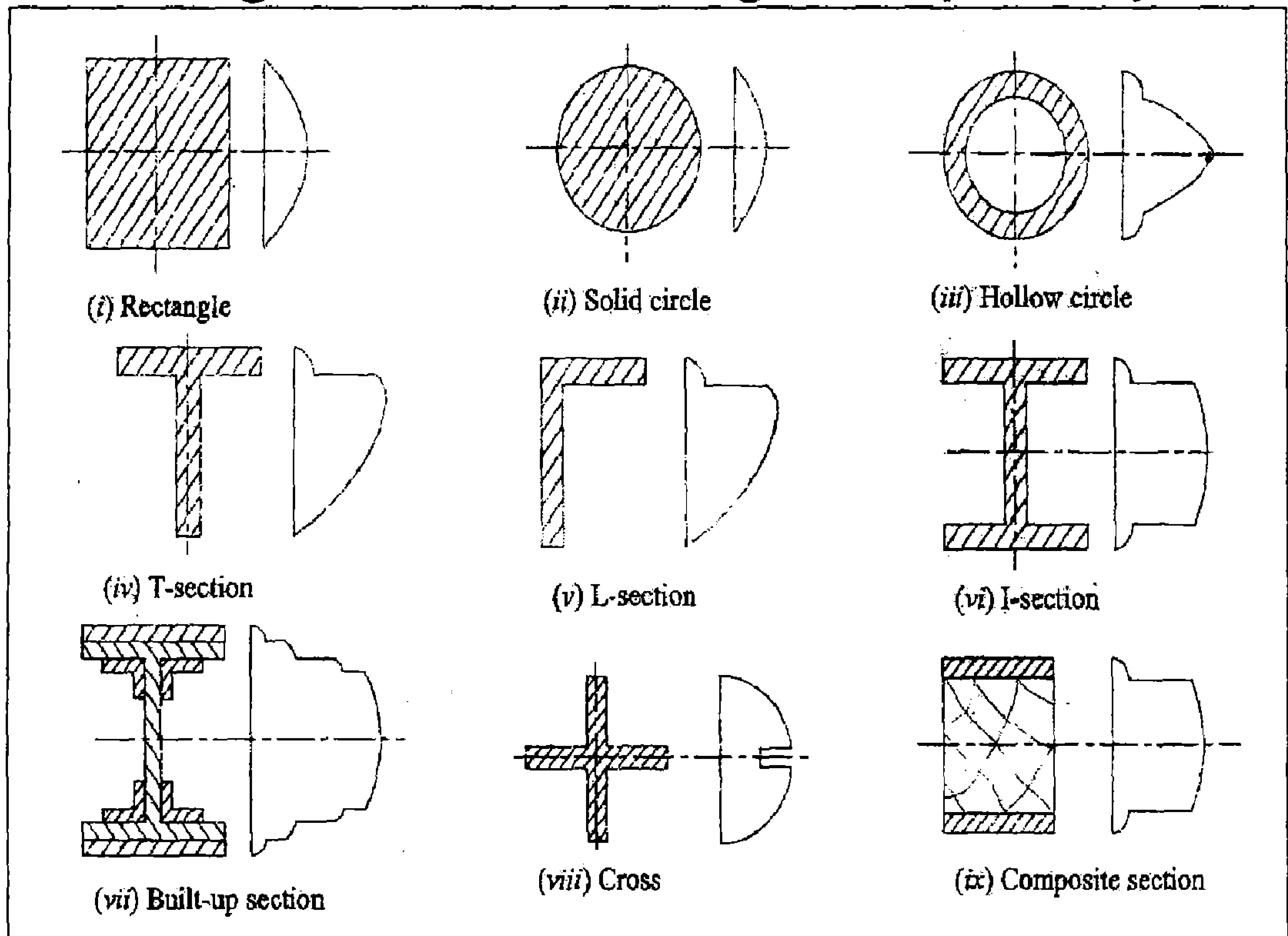
$$\frac{S}{8\,I}(D^2 - d^2) \text{ to } \frac{S}{8\,I} \times \frac{B}{b} \times (D^2 - d^2)$$

ملاحظة

إن فكرة إجهاد القص الأفقي تصبح غاية في الأهمية في تلك المسائل حيث تكون الكمرات مركبة من أجزاء لا حصر لها مبرشمة مع بعضها البعض. وحيث أنه يتم برشمة التسليحات الخارجية بشفف الكمرات، فمن الضروري جدًا أن يتم حساب قوة القص المؤثرة عند منطقة الالتقاء، ومن ثم يتم تقدير العدد المطلوب من البراشيم.

٤-٧ توزيع إجهاد القص بالنسبة للمقاطع التقليدية

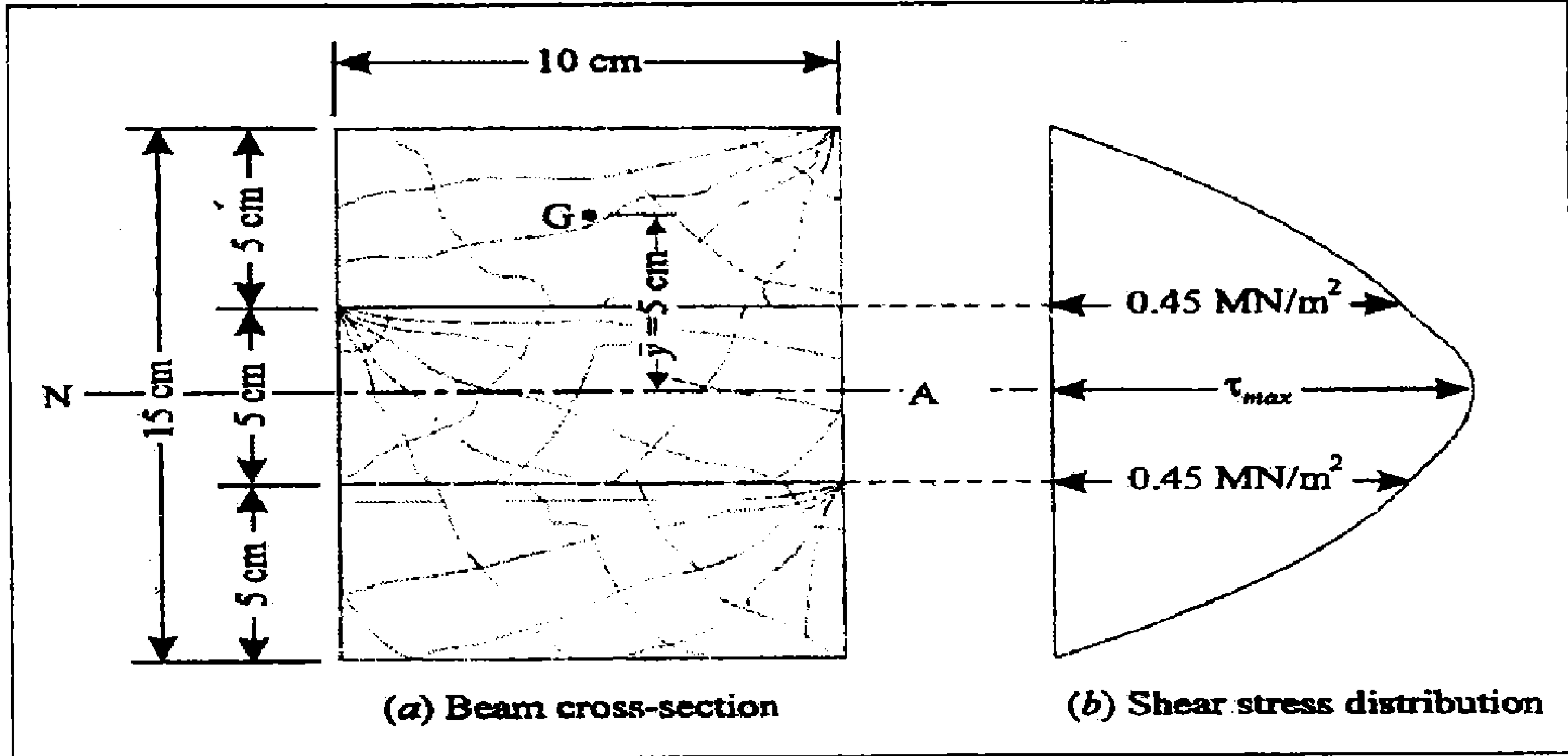
في الشكل التالي، نشاهد توزيع إجهاد القص بالنسبة لبعض المقاطع التقليدية.



٥-٧ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

كمرة خشبية عرض مقطعها عبارة عن ١٠ سم وعمقه عبارة عن ١٥ سم ومكونة من ثلاثة طبقات ملتصقة ببعضها بالغراء وسمك كل منها ٥ سم وعرضها ١٠ سم (كما هو موضح في الشكل التالي) لكي تقاوم القص الطولي. الكمرة بسيط الارتكاز عبر بحر قدره ٢ متر.



(a) Beam cross-section (b) Shear stress distribution

لـو أن إجهـاد القـص المـسموح بـه فـي الوصـلات الـصمغية عبـارة عـن ٠.٤٥ ميجانيوتن/م٢، إذن أوجد الحمل الآمن المركز في نقطة والذي تستطيع الكمرة تحمله عند مركزها.

الحل

لنجعل (W) عبارة عن الحمل المركز الأقصى الآمن الواقع على الكمرة.

ومن ثم، قوة القص القصوى للكمرة = W/2.

ويتم حساب عزم القصور الذاتي للكمرة كالآتي:

$$I = \frac{10 \times 15^3}{12} = 2812.5 \text{ cm}^4 = 2812.5 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

وحيث أنه لابد من التحقق من إجهاد القص عند الوصلة الصمغية، إذن:

$$A\bar{y} = (5 \times 10) \times (5/2 + 5/2) = 250 \text{ cm}^3 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

وبالنسبة للوصلة الصمغية نجد أن:

$$\tau_{max} = 0.45 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{SA\bar{y}}{Ib} = \frac{W/2 \times 250 \times 10^{-6}}{2812.5 \times 10^{-8} \times 0.1}$$

ومن هذه العلاقة يتم حساب الحمل كالآتي:

$$W = \frac{0.45 \times 10^6 \times 2812.5 \times 10^{-8} \times 0.1 \times 2}{250 \times 10^{-6}} \times 10^{-3} \text{ kN} = \mathbf{10.125 \text{ kN}} \quad \textbf{(Ans.)}$$

ملاحظة

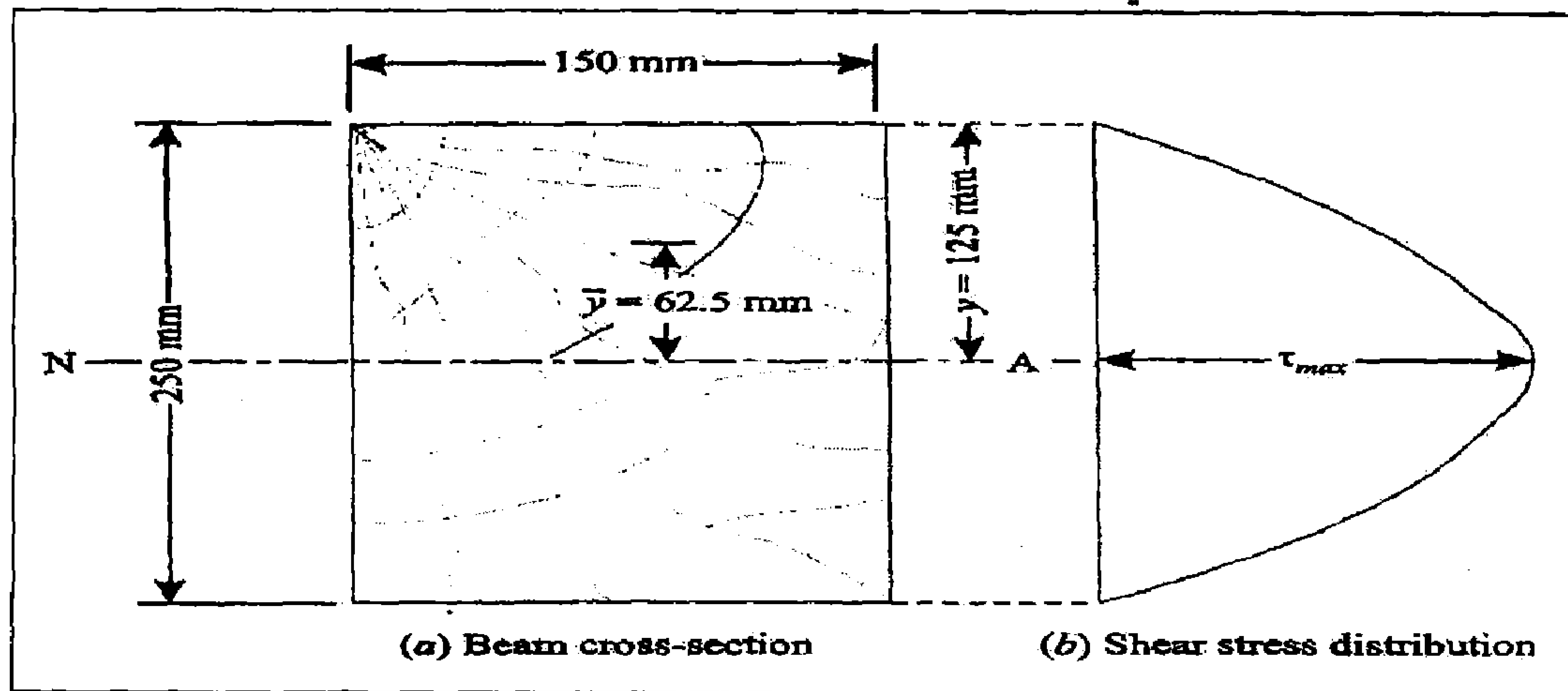
يمكن ملاحظة أنه بالنسبة للمقطع العرضي للكمرة، يصل إجهاد القص إلى أقصى قيمة عند المحور الطبيعي ولكن في هذا المثال تم تحليل الوصلات الصمغية فقط.

المثال رقم (٢)

كمرة خشبية ذات مقطع عرضي أبعاده ١٥٠ مم × ٢٥٠ مم وهي بسيطة الارتكاز عند طرفيها وبحرها يصل إلى ٣.٥ متر. إجهاد القص الأقصى المسموح به عبارة عن ٧٥٠٠ كيلونيوتن/م٢. أوجد الحمل الموزع بانتظام الأقصى الآمن الذي يمكن أن تتحمله الكمرة. وما هو أقصى إجهاد قص يتولد في الكمرة بسبب هذا الحمل الموزع بانتظام؟.

الحل

انظر الشكل التالي:



(*a*) Beam cross-section (*b*) Shear stress distribution

لنجعل (w) عبارة عن الحمل الموزع بانتظام U.D.L. (كيلونيوتن/متر).

ومن ثم، يمكن حساب إجهاد الإنثناء الأقصى عند مركز الكمرة لطول قدره (l) من خلال العلاقة التالية:

$M = \dfrac{wl^2}{8}\ \text{kNm} = \dfrac{w \times 3.5^2}{8} = 1.53\ w$	(i)

ويتم حساب عزم القصور الذاتي للمقطع كالآتي:

$$I = \frac{0.15 \times 0.25^3}{12} = 1.953 \times 10^{-4}\ \text{m}^4$$

المسافة بين أقصى طرف والمحور الطبيعي (y) = ٠.٢٥/٢ = ٠.١٢٥ متر.

وباستخدام العلاقة التالية:

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

يصبح لدينا العلاقة التالية:

$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{7500 \times 1.953 \times 10^{-4}}{0.125} = 11.718 \text{ kNm}$	(ii)

وبمساواة المعادلتين (i) و(ii) معًا، نحصل على الآتي:

$1.53\, w = 11.718$ or $w =$ **7.66 kN/m (Ans.)**

وبسبب هذا الحمل الموزع بانتظام، فستكون قوة القص القصوى مثل ردود الأفعال.

$$S_{max} = \frac{wl}{2} = \frac{7.66 \times 3.5}{2} = 13.4 \text{ kN}$$

وبما إن:

$$A = 0.15 \times 0.125 \text{ m}^2 \qquad \bar{y} = \frac{0.125}{2} = 0.0625 \text{ m}$$

إذن يتم حساب إجهاد القص الأقصى كالآتي:

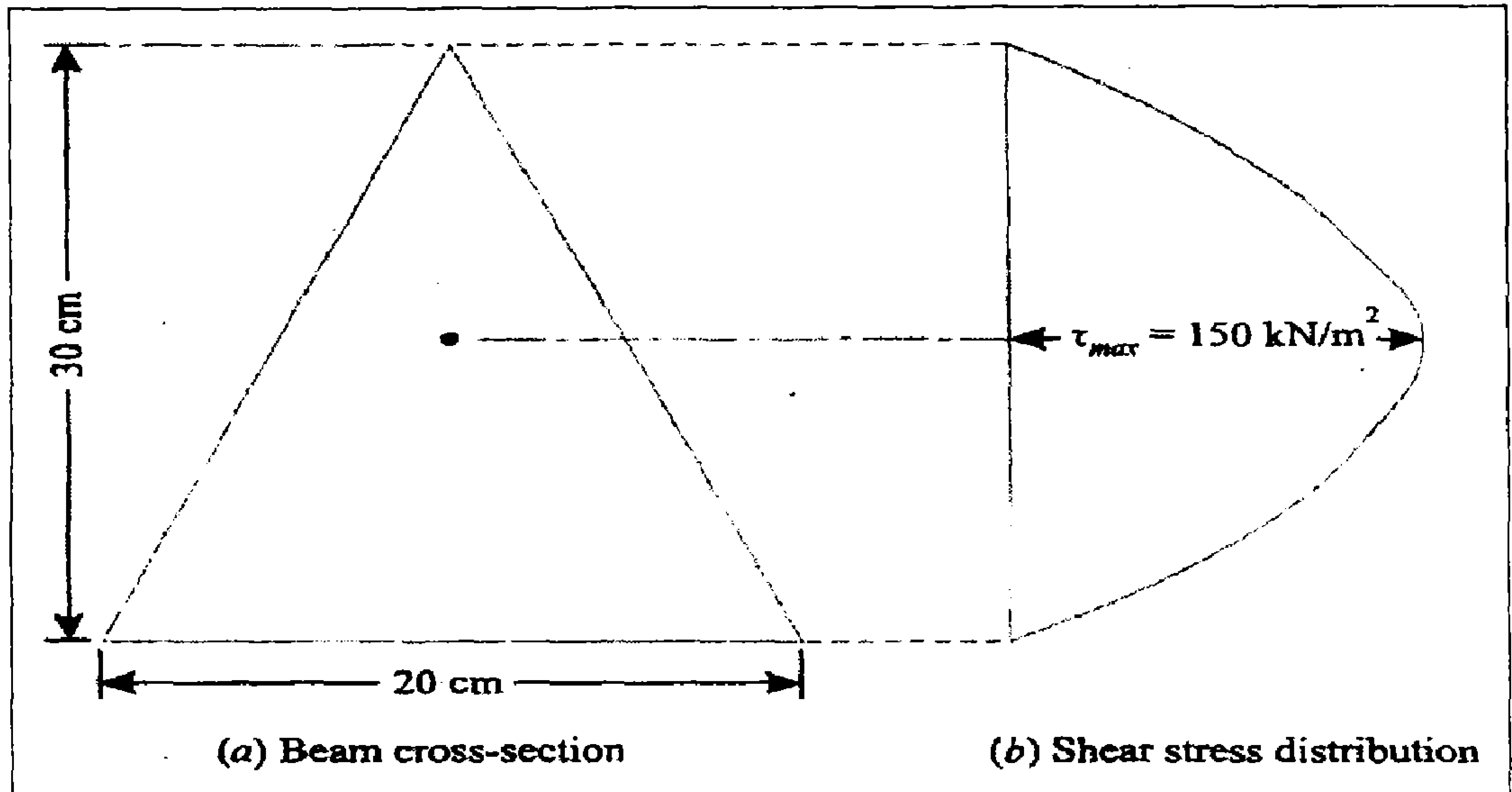
$$\tau_{max} = \frac{S\,A\bar{y}}{Ib} = \frac{13.4 \times 0.15 \times 0.125 \times 0.0625}{1.953 \times 10^{-4} \times 0.15} = \mathbf{536\ kN/m^2}\ \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٣)

كمرة لها مقطع عرضي مثلث الشكل عرض قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ٣٠ سم ومعرضة إلى قوة قص قدرها ٣ كيلونيوتن. أوجد قيمة إجهاد القص الأقصى، وارسم توزيع إجهاد القص عبر عمق الكمرة.

الحل

انظر الشكل التالي:



(a) Beam cross-section (b) Shear stress distribution

في هذا المثال لدينا الآتي:

عرض قاعدة المقطع (b) = ٢٠ سم = ٠.٢ متر.

ارتفاع المقطع (h) = ٣٠ سم = ٠.٣ متر.

إذن مساحة المقطع تكون:

$$A = \frac{1}{2}\, bh = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 0.3 = 0.03 \text{ m}^2$$

قوة القص (S) = ٣ كيلونيوتن.

<u>إجهاد القص الأقصى (τ_{max}):</u>

نحن نعلم أن الإجهاد المتوسط عبارة عن:

$$\tau_{mean} = \frac{S}{A} = \frac{3}{0.03} = 100 \text{ kN/m}^2$$

والآن، باستخدام هذه العلاقة نستطيع حساب إجهاد القص الأقصى كالآتي:

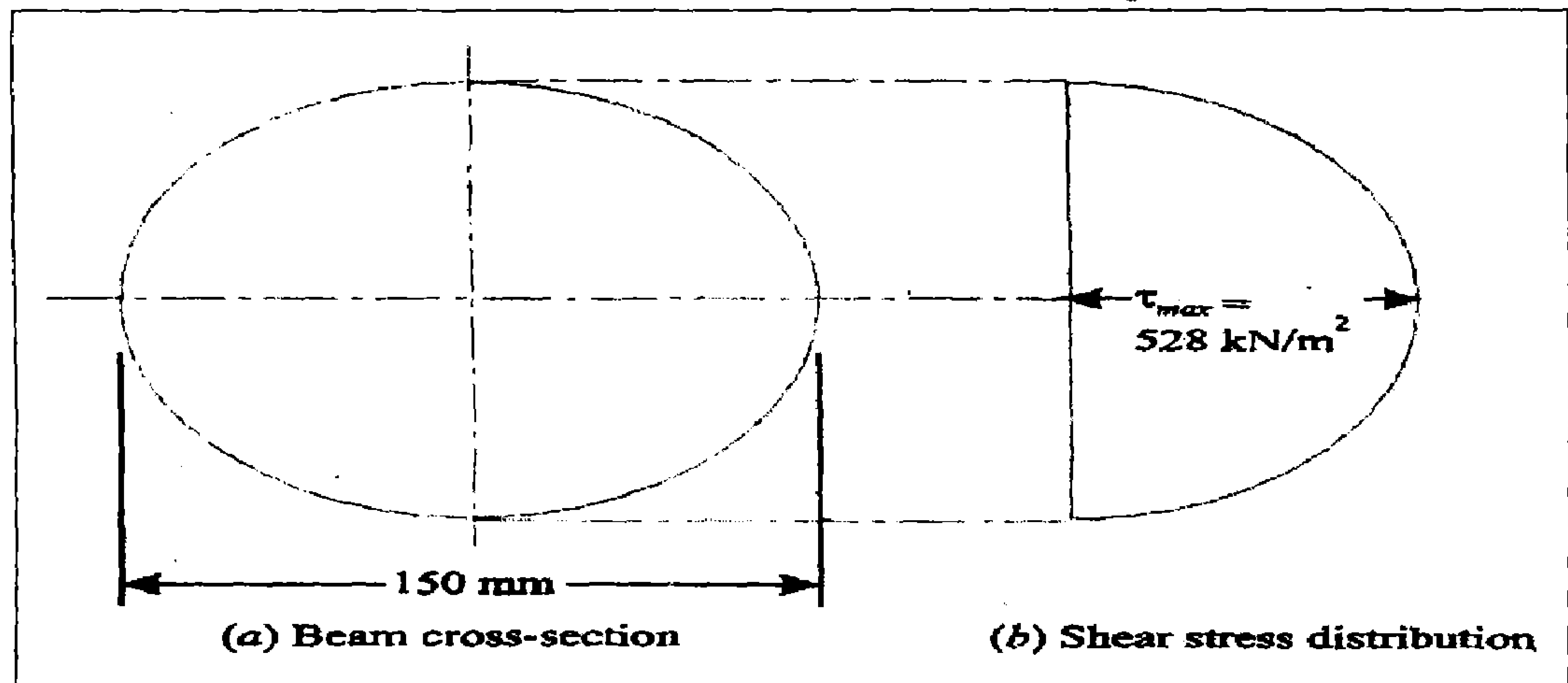
$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\tau_{mean} = 3/2 \times 100 = \mathbf{150\ kN/m^2} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٤)

كمرة لها مقطع دائري قطره ١٥٠ مم ومعرضة لقوة قص قدرها ٧ كيلونيوتن. احسب قيمة إجهاد القص الأقصى، وارسم تباين إجهاد القص عبر عمق الكمرة.

الحل

انظر الشكل التالي:



(a) Beam cross-section (b) Shear stress distribution

في هذا المثال لدينا الآتي:

قطر مقطع الكمرة = ١٥٠ مم = ٠.١٥ متر.

ومن ثم يمكن حساب مساحة مقطع الكمرة كالآتي:

$$A = \frac{\pi}{4} \times 0.15^2 = 0.01767\ m^2$$

قوة القص (S) = ٧ كيلونيوتن.

<u>إجهاد القص الأقصى (τ_{max}):</u>

نحن نعلم أن الإجهاد المتوسط عبارة عن:

$$\tau_{mean} = \frac{S}{A} = \frac{7}{0.01767} = 396\ kN/m^2$$

والآن وباستخدام هذه العلاقة يتم حساب إجهاد القص الأقصى كالآتي:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\ \tau_{mean} = \frac{4}{3} \times 396 = \mathbf{528\ kN/m^2\ (Ans.)}$$

المثال رقم (٥)

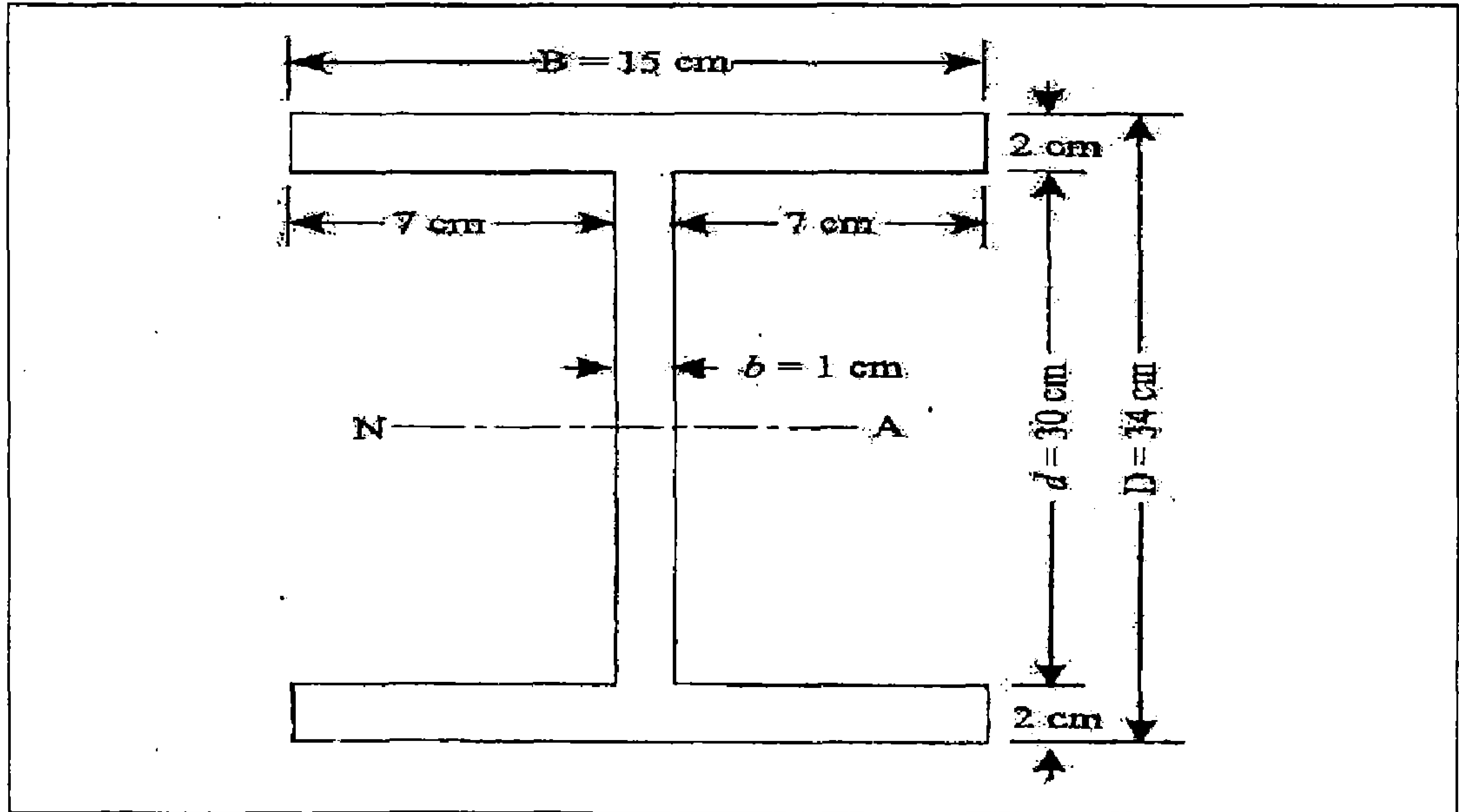
مقطع على شكل حرف I، له أطراف مستطيلة، وله الأبعاد التالية:

- أبعاد الشفتين: ١٥ سم × ٢ سم.
- أبعاد العصب: ٣٠ سم × ١ سم.

أوجد إجهاد القص الأقصى المتكون في الكمرة بسبب قوة قص قدرها ١٠ كيلونيوتن.

الحل

انظر الشكل التالي:



من خلال هذا الشكل نجد أن:

العرض الكلي للمقطع (B) = ١٥ سم = ٠.١٥ متر.

العمق الكلي للمقطع (D) = ٣٤ سم = ٠.٣٤ متر.

تخانة الشفة (t_f) = ٢ سم = ٠.٠٢ متر.

عمق العصب (d) = ٣٠ سم = ٠.٣٠ متر.

عرض العصب (b) = ١ سم = ٠.٠١ متر.

قوة القص (S) = ١٠ كيلونيوتن.

<u>إجهاد القص الأقصى (τ_{max}) المتكون:</u>

عزم القصور الذاتي للمقطع حول المحور الطبيعي:

$$I = \left[\frac{0.15 \times (0.34)^3}{12} - \frac{0.14 \times (0.30)^3}{12}\right]$$

$$I = [4.913 \times 10^{-4} - 3.15 \times 10^{-4}] = 1.763 \times 10^{-4}\ m^4$$

وأيضًا يمكن حساب عزم القصور الذاتي للمقطع حول المحور الطبيعي كالآتي:

$$I = 2\left(\frac{25 \times 2^3}{12} + 15 \times 2 \times (15+1)^2\right) + \frac{1 \times 30^3}{12}$$

$$I = 2 \times 7690 + 2250 = 17630\ cm^4 = 1.763 \times 10^{-4}\ m^4$$

نحن نعلم أن إجهاد القص الأقصى يحدث عند المحور الطبيعي، وبالتالي يمكن حساب إجهاد القص الأقصى (τ_{max}) كالآتي:

$$\tau_{max} = \frac{S}{8\ Ib}\left[B\ (D^2 - d^2) + bd^2\right]$$

$$\tau_{max} = \frac{10}{8 \times 1.763 \times 10^{-4} \times 0.01}\left[0.15\ (0.34^2 - 0.30^2) + 0.01 \times (0.3)^2\right]$$

$$\tau_{max} = 70.9 \times 10^4\ (0.00384 + 0.0009) = 3360\ kN/m^2 \text{ or } 3.36\ MN/m^2$$

الفصل الثامن

ترخيم الكمرات

Deflection of Beams

في هذا الفصل

- مقدمة عامة.
- ترخيم الكمرة.
- العلاقة بين الميل، والترخيم، ونصف قطر الانحناء.
- الإشارات المتفق عليها.
- الميل والترخيم عند مقطع عرضي.
- طريقة التكامل المزدوج.
- طريقة **Macaulay**.
- طريقة عزم المساحة-تحديد الحد الأقصى للميل والترخيم في حالات مهمة.
- طريقة الكمرة البديلة **Conjugate Beam**.
- الكابوليات والكمرات المدعمة.
- الأمثلة العملية

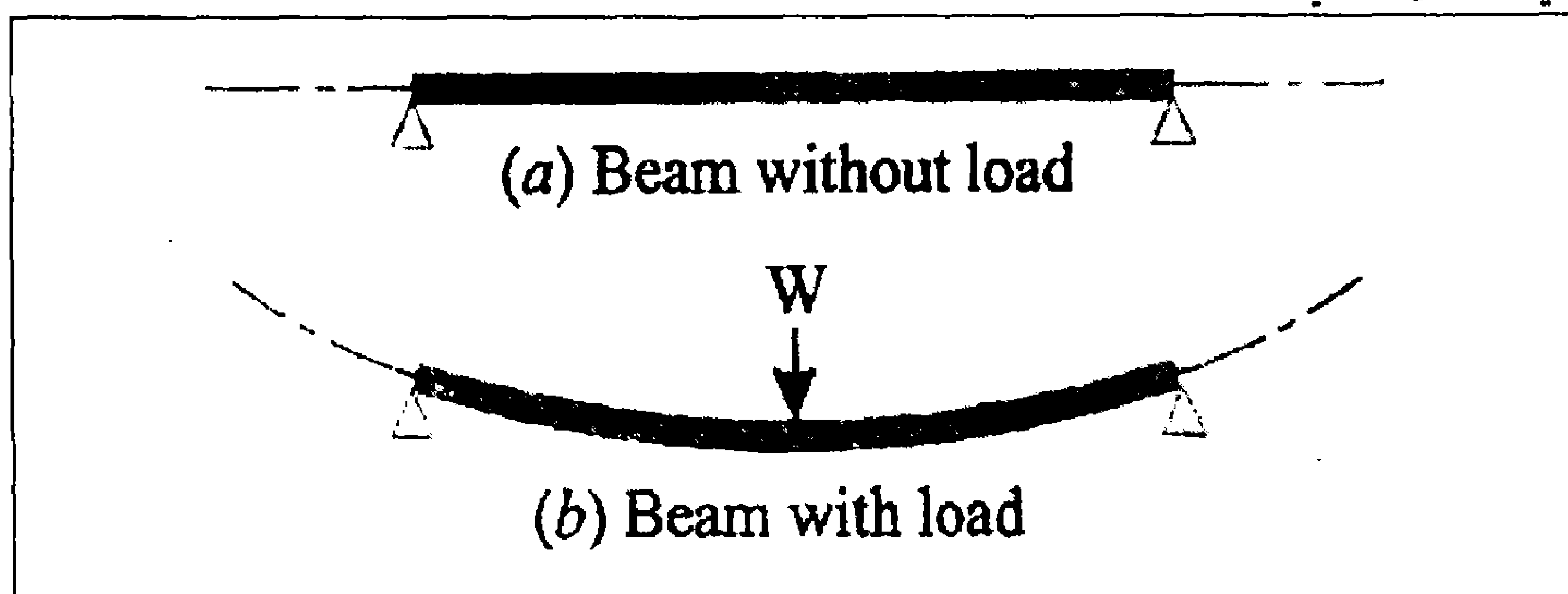
٨-١ مقدمة عامة

من الملاحظ أنه عندما تكون كمرة ما أو كابولي ما معرضًا لنوع ما من التحميل فإنه يترخم من موضعه الابتدائي أو الأصلي. ومقدار الترخيم يعتمد على مقطعه العرضي وعزم الانحناء. في هذه الأيام تعد كل من القوة أو المتانة **strength** والكزازة **Stiffness** معايير التصميم الأساسية بالنسبة لأي كمرة أو أي كابولي.

بناءًا على معيار القوة أو المتانة **strength** لتصميم الكمرة، ينبغي أن تكون الكمرة ذات قوة تكفيها لمقاومة كل من قوة القص وعزم الانحناء. وبعبارة أخرى، ينبغي أن تكون الكمرة قادرة على مقاومة إجهاد القص وإجهادات الانثناء. ولكن بناءًا على معيار الكزازة (التي يتم حسابها رياضياً على إنها (W/δ) حيث أن W عبارة عن الحمل المطبق وδ عبارة عن أقصى ترخيم أو ارتخاء) لتصميم الكمرة، الذي له نفس الأهمية، ينبغي أن تكون لدى الكمرة كزازة مناسبة تكفيها لأن تقاوم الترخيم. وبعبارة أخرى، ينبغي أن تكون الكمرة ذات كزازة تكفيها لكي لا يحدث لها ترخيم أكثر من الحد المسموح به.

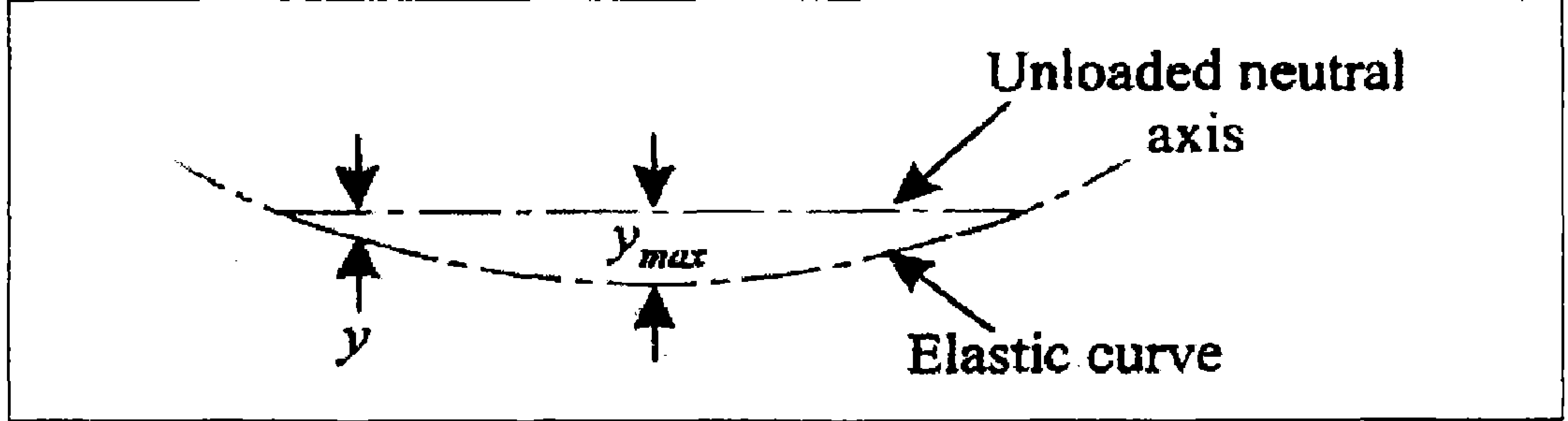
٨-٢ ترخيم الكمرات Beam Deflection

عندما يُوضع حمل ما على كمرة ما حينئذ تميل الكمرة لأن ترتخي كما هو موضح في الشكل التالي:



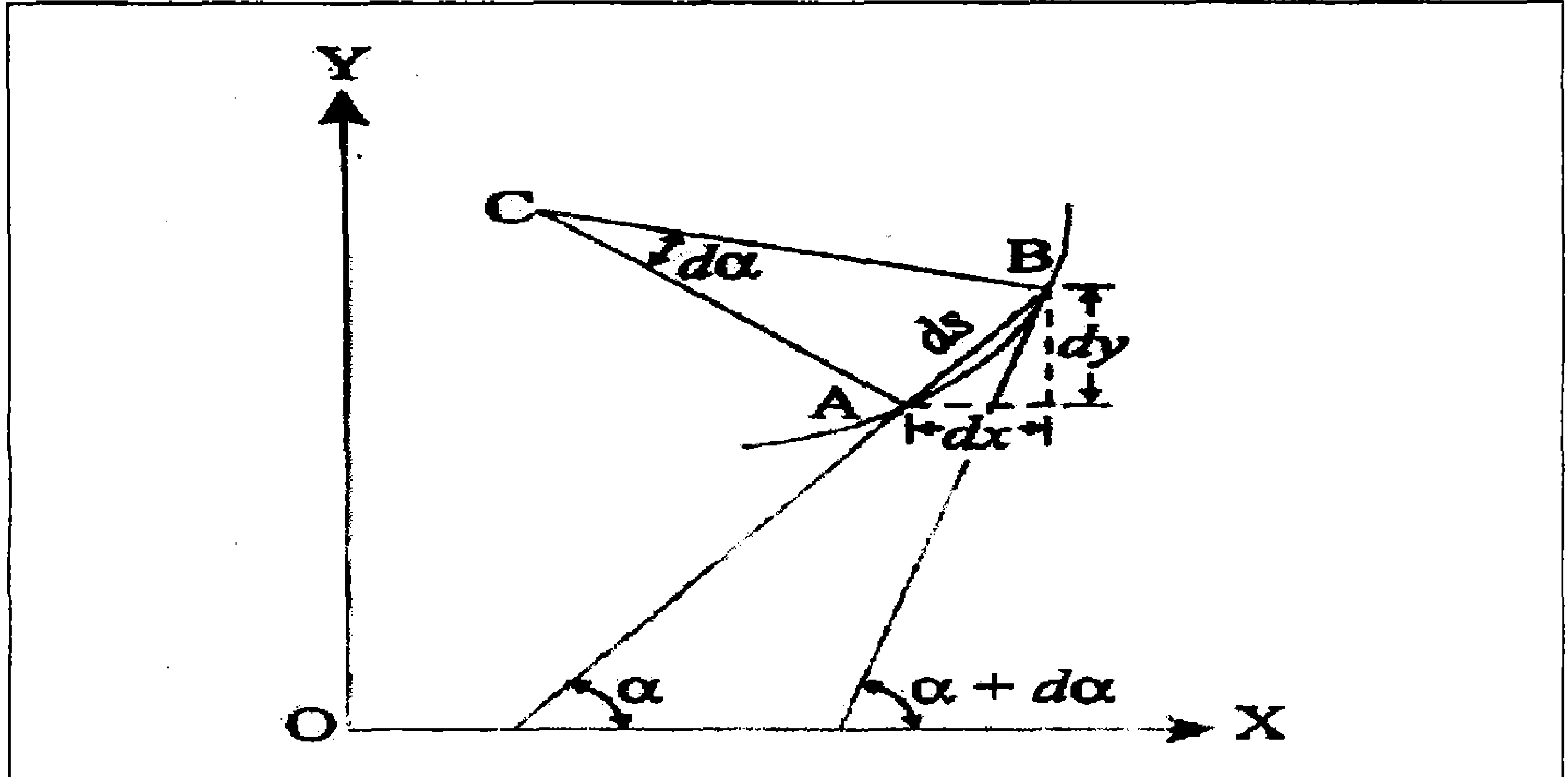
يلعب الترخيم دورًا جوهريًا في تصميم المنشآت والماكينات. فلو أن كمرات الأرضية floor beams، أو joists بعيدة عن بعضها جدًا، حينئذ يمكن أن تحدث شروخ في الـ plaster الموجود على الـ ceiling تحتهم. وبالرغم من أنه قد لا يحدث تدمير للمنشأ، إلا إن مظهر الـ ceiling يكون ruined. وأيضًا، أي أرضية مرتكزة على كمرات كتلك قد لا تكون مستوية بحيث تصبح عديمة الفائدة بالنسبة للـ machinery.

تحت تأثير الحمل، يصبح المحور الطبيعي خطًا منحنيًا وفي هذه الحالة يسمى منحني المرونة **elastic curve**. الترخيم **y** يكون المسافة الرأسية بين نقطة ما على منحني المرونة والمحور الطبيعي الغير محمل، كما هو موضح في الشكل التالي:



٨-٣ العلاقة بين الميل، والترخيم، ونصف قطر الانحناء

في الشكل التالي، نشاهد جزء صغير AB من كمرة منثنية على شكل قوس:



لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
ds	طول الكمرة **AB**.
C	مركز القوس.
α	الزاوية التي يصنعها المماس عند **A** مع المحور **XX**.
α+dα	الزاوية التي يصنعها المماس عند **B** مع المحور **XX**.

من خلال الوضع الهندسي بالشكل السابق، نجد أن:

$\angle ACB = d\alpha$ and $ds = R\, d\alpha$.

إذن:

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{dx}{d\alpha} \text{ (assuming } ds = dx)$$

أو:

$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dx}$	(i)

لو أن إحداثيات النقطة A عبارة عن (x, y)، إذن:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} \text{ or } \alpha = \frac{dy}{dx}$$

(بأخذ (tan(α)=α) حيث أن α صغيرة جدًا).

بتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة لـ x، نحصل على الآتي:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(بما إن $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{dx}$ كما في المعادلة (i)).

وأيضًا، نحن نعلم أن:

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \text{ or } M = E \times \frac{I}{R}$$

والآن بالتعويض بـ $\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$ في المعادلة السابقة، نحصل على الآتي:

$M = EI\,\frac{d^2y}{dx^2}$	(8-1)

هذه المعادلة تعتمد أساسًا على عزم الانحناء فقط (حيث أن تأثير قوة القص صغير جدًا، فقد تم تجاهله).

٨-٤ الإشارات المتفق عليها

لإيجاد الميل والترخيم لخط المتنصف بأي كمرة عند أي نقطة علينا أن نلتزم ببعض الإشارات المتفق عليها، وفيما يلي نظام الإشارات التي سوف نستخدمها:

(١) قيمة x تكون موجبة عندما تُقاس ناحية اليمين.

(٢) قيمة y تكون سالبة عندما تُقاس لأسفل.

(٣) عزم الانحناء M يكون سالب في حالة الـ **hogging**.

(٤) الميل يكون سالب عندما يكون الدوران في نفس اتجاه عقارب الساعة.

٨-٥ الميل والترخيم عند أي مقطع عرضي

الطرق الهامة المستخدمة من أجل إيجاد الميل والترخيم عند أي مقطع عرضي في أي كمرة محملة عبارة عن الآتي:

(١) طريقة التكامل المزدوج.

(٢) طريقة عزم المساحة.

(٣) طريقة Macaulay.

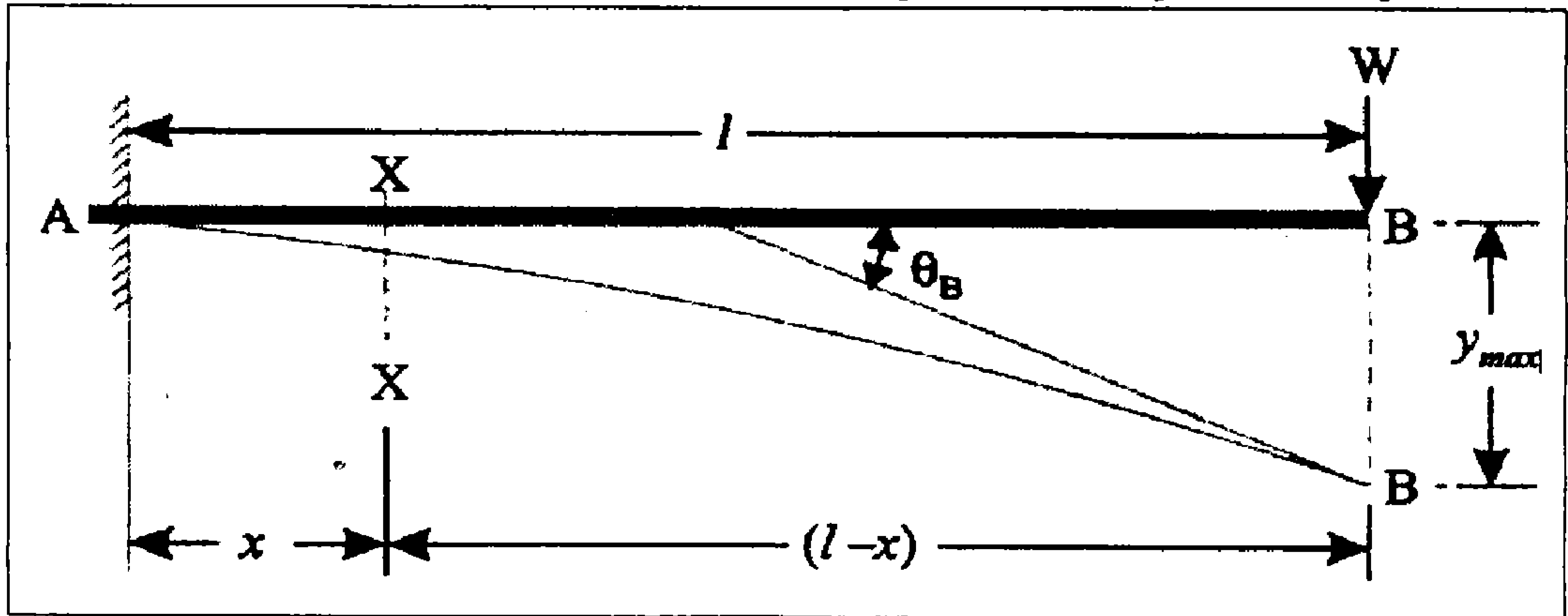
- الطريقتان الأولى والثانية تناسبان الحمل المفرد **single load**، في حين أن الطريقة الثالثة تناسب الأحمال العديدة **several loads**.
- "طريقة عزم المساحة" تكون أكثر إفادة مقارنة بطريقة التكامل المزدوج لأن العديد من المشاكل (المسائل) التي ليس لها حل رياضي بسيط يمكن تبسيطها من خلال طريقة عزم الانحناء للمساحة.

٨-٦ طريقة التكامل المزدوج Double Integration Method

الكابوليات Cantilevers

الحالة (I): كابولي معرض لحمل مركز عند الطرف الحر

في الشكل التالي، نشاهد كابولي معرض لحمل W مركز عند الطرف الحر:



لنجعل عزم القصور الذاتي لمقطع الكابولي حول المحور الطبيعي عبارة عن I.

ولندرس مقطع عرضي XX على مسافة x من الطرف المثبت A.

$$M_x = -W\,(1 - x)$$

إذن:

$$EI\,\frac{d^2 y}{dx^2} = -W\,(l - x)$$

وبالتكامل، نحصل على الآتي:

$$EI\;\frac{dy}{dx} = -W\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

(حيث أن (C_1) = ثابت التكامل).

عند الطرف المثبت A نجد أن (x=0) و(dy/dx=0)، إذن ($C_1=0$). ومن ثم تكون معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\;\frac{dy}{dx} = -W\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$	**(i)**

الميل عند B:

بوضع (x=l)، نحصل على الآتي:

$$\theta_B = \frac{dy}{dx} = -\,\frac{1}{EI}\,W\left(l \times l - \frac{l^2}{2}\right) = -\,\frac{Wl^2}{2\,EI}$$

أي أن:

$\theta_B = -\frac{Wl^2}{2\,EI}$	**(8-2)**

للحصول على الترخيم، وبتكامل المعادلة (i) السالفة الذكر، نحصل على الآتي:

$$EI\;y = -W\left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2$$

(حيث أن (C_2) = ثابت التكامل).

عند A (الطرف المثبت) تكون (x=0) و(y=0) ومن ثم ($C_2=0$) وبالتالي تكون معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$EI\;y = -W\left(l\,.\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$	**(ii)**

الترخيم عند B: بوضع (x=l)، نحصل على الآتي:

$$y_B = -\frac{W}{EI}\left(l \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6}\right) = -\frac{Wl^3}{3\,EI}$$

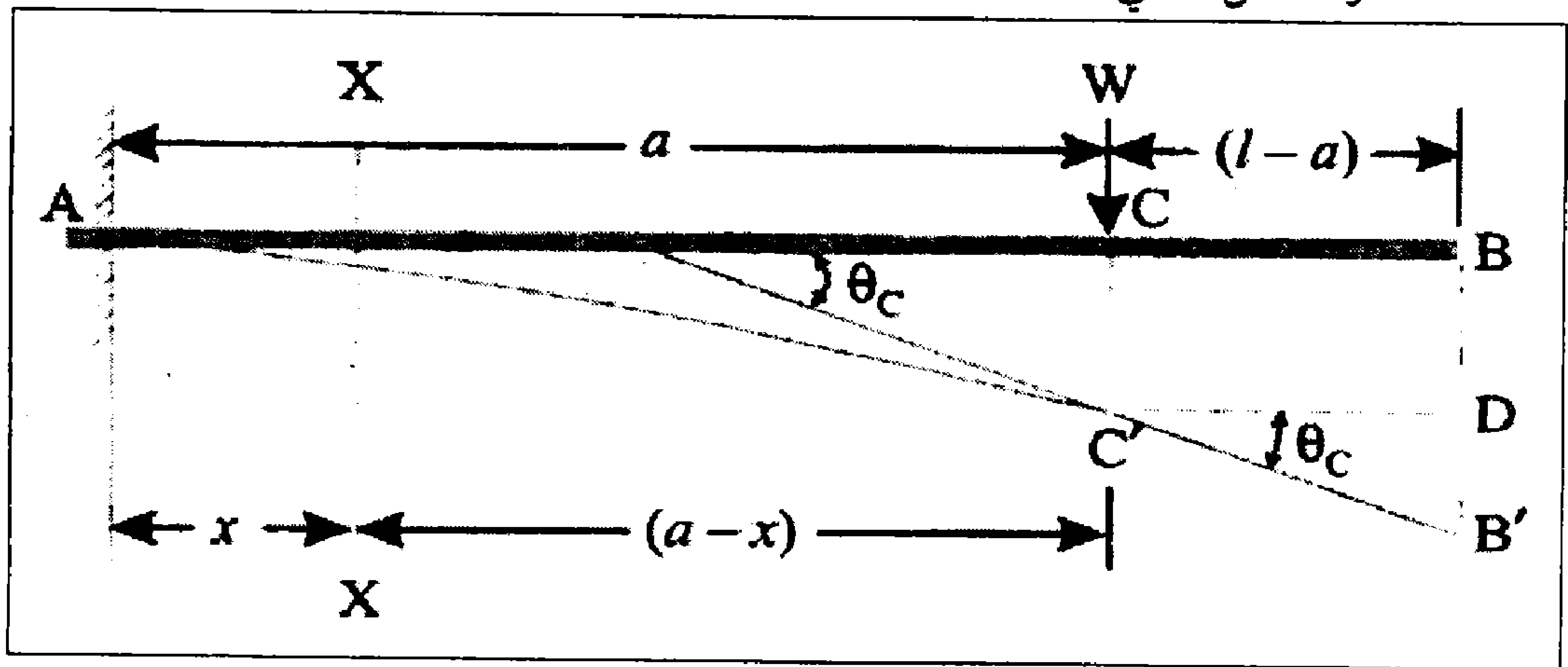
ترخيم نقطة B لأسفل يكون:

Downward deflection of $B = \dfrac{Wl^3}{3\,EI}$	(8-3)

المعادلتان رقم (٨-٢) ورقم (٨-٣) تعطيان القيم القصوى للميل والترخيم عند الطرف الحر.

الحالة (II): كابولي طوله l ويحمل حمل W مركز عند نقطة على مسافة a من الطرف المثبت

انظر الشكل التالي:



لندرس سويًا مقطع عرضي XX يوجد على مسافة x من الطرف المثبت A.

$$M_x = -W(a-x)$$

$$\therefore EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -W(a-x)$$

وبالتكامل، نحصل على الآتي:

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -W\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

(حيث أن (C_1) = ثابت التكامل).

عند الطرف المثبت A: نجد أن $(x=0)$ و$(dy/dx=0)$ ومن ثم $(C_1=0)$ وبالتالي تصبح معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\,\dfrac{dy}{dx} = -W\left(ax - \dfrac{x^2}{2}\right)$	(i)

الميل عند C: بوضع $(x=a)$، نحصل على الآتي:

$$\theta_C = \frac{dy}{dx} = -\frac{W}{EI}\left(a \, . \, a - \frac{a^2}{2}\right) = -\frac{Wa^2}{2EI}$$

أي أن:

$$\theta_C = -\frac{Wa^2}{2\,EI}$$

حيث أنه لا يوجد حمل على الجزء BC لذلك لن يكون هناك عزم انحناء .B.M في هذا الجزء وبالتالي لن ينثني، وسيبقى مستقيمًا.

$\theta_B = \theta_C = -\frac{Wa^2}{2\,EI}$	**(8-4)**

للحصول على الميل، نقوم بتكامل المعادلة (i) لنحصل على الآتي:

$$EI\;y = -W\left(a \, . \, \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2$$

(حيث أن (C_2) = ثابت التكامل).

عند A (الطرف المثبت) تكون (x=0) و(y=0) ومن ثم ($C_2=0$) وبالتالي:

$$EI\;y = -W\left(a \, . \, \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

الترخيم عند C: بوضع (x=a) نحصل على الآتي:

$$y_C = -\frac{W}{EI}\left(a \, . \, \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6}\right) = -\frac{Wa^3}{3\,EI}$$

الترخيم لأسفل عند C يكون:

$C = \frac{Wa^3}{3\,EI}$	**(8-5)**

ولكن، (y_c=DB) (الشكل السابق) كما أن:

$$B'D = DC' \tan\theta_C = BC \times \theta_C$$

(بما إن (θ_C) صغير، لذلك فإن ($\tan(\theta_C) = \theta_C$)).

$$B'D = (l - a) \times \left(-\frac{Wa^2}{2\,EI}\right)$$

ولكن:

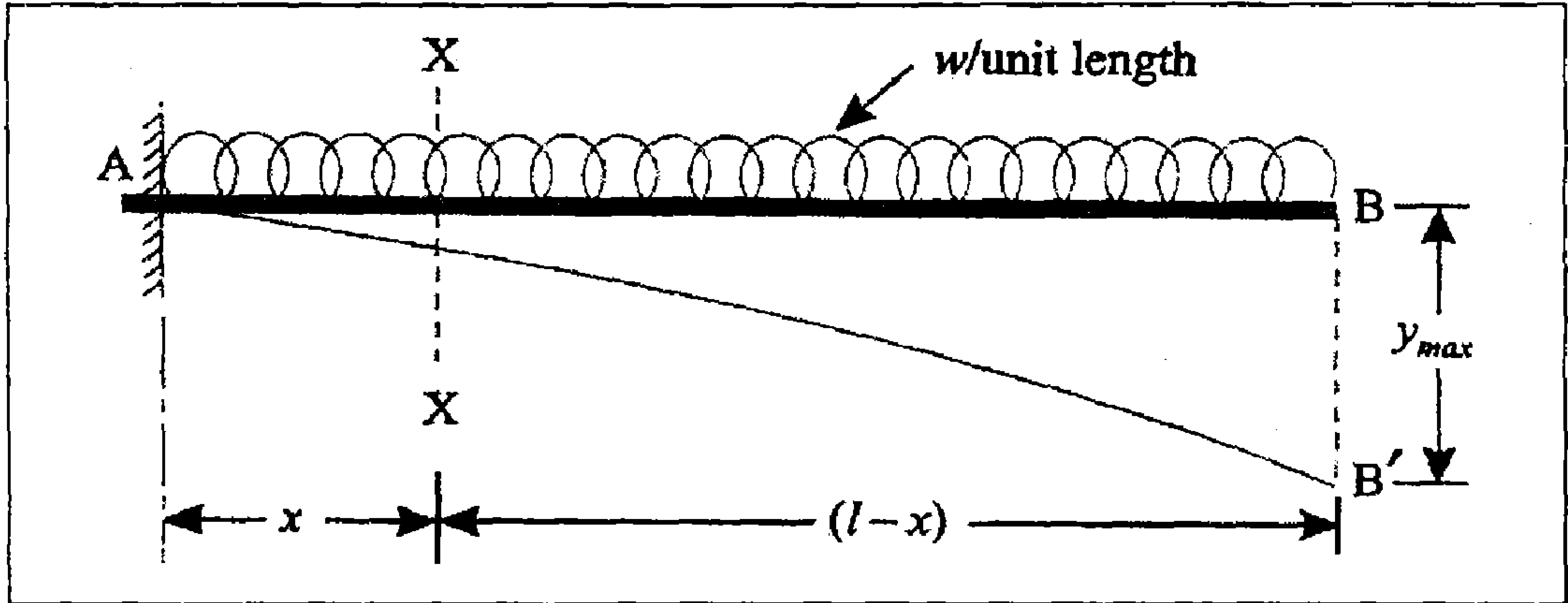
$$y_B = BB' = BD + BD' = -\frac{Wa^3}{3EI} - \frac{Wa^2}{2EI}\,(l - a)$$

الترخيم لأسفل عند B يكون:

$= \frac{Wa^3}{3\,EI} + \frac{Wa^2}{2\,EI}\,(l - a)$	(8-6)

الحالة (III): كابولي طوله (l) يحمل حمل موزع بانتظام w لكل وحدة طولية عبر الكابولي بأكمله

انظر الشكل التالي:



لندرس مقطع عرضي XX على مسافة x من الطرف المثبت A.

$$M_x = -\frac{w(l-x)^2}{2}$$

أو:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w}{2}\,(l-x)^2$$

بالتكامل، نحصل على الآتي:

$$EI\,\frac{dy}{dx} = +\frac{w}{6}(l-x)^3 + C_1$$

(حيث أن (C_1) = ثابت التكامل).

عند الطرف المثبت A: (x=0) و(dy/dx=0) وبالتالي:

$$C_1 = -\frac{wl^3}{6}$$

إذن تصبح معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\,\frac{dy}{dx} = +\frac{w}{6}(l-x)^3 - \frac{wl^3}{6}$	(i)

الميل عند B: بوضع (x=l)، نحصل على الآتي:

$$EI\,.\theta_B = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{6}\,(l-l)^3 - \frac{wl^3}{6} = -\frac{wl^3}{6}$$

أي أن:

$\theta_B = -\frac{wl^3}{6EI}\left(= -\frac{Wl^2}{6EI}\right)$ (where $W = w.l$)	**(8-7)**

للحصول على الترخيم، نقوم بعمل تكامل للمعادلة (i) لنحصل على الآتي:

$$EI\ y = -\frac{w}{24}(l-x)^4 - \frac{wl^3}{6}x + C_2$$

(حيث أن (C_2) - ثابت التكامل).

عند الطرف المثبت A: (x=y=0)

$$0 = -\frac{wl^4}{24} + C_2$$

$$\therefore \quad C_2 = \frac{wl^4}{24}$$

ومن ثم، تصبح معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$EI\ y = -\frac{w}{24}(l-x)^4 - \frac{wl^3}{6}x + \frac{wl^4}{24}$	**(ii)**

الترخيم عند B: بوضع (x=l) نحصل على الآتي:

$$EI\ y_B = -\frac{w}{24}(l-l)^4 - \frac{wl^3}{6}\times l + \frac{wl^4}{24}$$

$$EI\ y_B = -\frac{wl^4}{6} + \frac{wl^4}{24} = -\frac{wl^4}{8}$$

إذن:

$$y_B = -\frac{wl^4}{8\ EI}\left(= -\frac{Wl^3}{8\ EI}\right) \quad \text{(where, } W = wl)$$

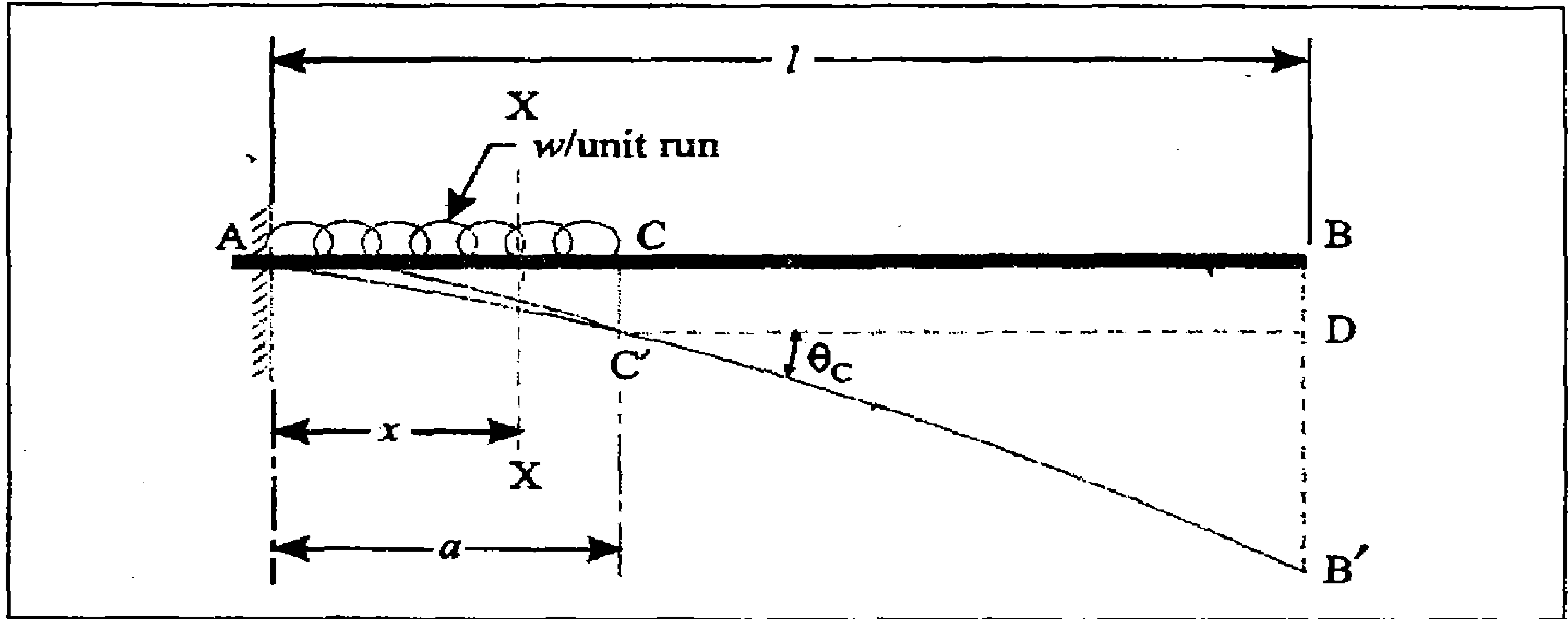
الترخيم لأسفل عند B يكون:

$= \frac{wl^4}{8\ EI}\left(= \frac{Wl^3}{8\ EI}\right)$ ...(8.8)	**(8-8)**

المعادلات رقم (٨-٧) ورقم (٨-٨) تعطي القيم القصوى لكل من الميل والترخيم عند B.

الحالة (IV): كابولي بطول (l) ويحمل حمل موزع بانتظام w لكل وحدة طولية عبر مسافة قدرها a من الطرف المثبت

انظر الشكل التالي:



لندرس سويًا مقطع عرضي XX يوجد على مسافة x من الطرف المثبت.

$$M_x = -\frac{w(a-x)^2}{2}$$

$$\therefore\ EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w(a-x)^2}{2}$$

وبالتكامل من أجل الميل، نحصل على الآتي:

$$EI\ \frac{dy}{dx} = +\frac{w}{2}\left[\frac{(a-x)^3}{3}\right] + C_1$$

(حيث أن (C_1) = ثابت التكامل).

عندما (x=0) و(dy/dx=0)، إذن:

$$C_1 = -\frac{wa^3}{6}$$

ومن ثم، تصبح معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\ \frac{dy}{dx} = +\frac{w}{2}\times\frac{(a-x)^3}{3} - \frac{wa^3}{6}$	**(i)**

الميل عند C: بوضع (x=a)، نحصل على الآتي:

$$\theta_C = \frac{dy}{dx} = -\frac{wa^3}{6EI}$$

حيث أن الجزء BC غير محمل فإنه لا ينثني ويظل مستقيمًا، ومن ثم:

$\theta_B = \theta_C = -\frac{wa^3}{6\,EI}\left(=-\frac{Wa^2}{6\,EI}\right)$ (where, $W = wa$)	**(8-9)**

للحصول على الترخيم نقوم بعمل تكامل للمعادلة (i)، وبالتالي نحصل على الآتي:

$$EI\ y = -\frac{w}{2}\ \frac{(a-x)^4}{12} - \frac{wa^3}{6}x + C_2$$

(حيث أن (C_2) = ثابت التكامل).

عندما (x=0) و(y=0)، إذن:

$$C_2 = +\frac{wa^4}{24}$$

ومن ثم، تصبح معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$EI\ y = -\frac{w}{2}\frac{(a-x)^4}{12} - \frac{wa^3}{6}x + \frac{wa^4}{24}$	**(ii)**

الترخيم عند C: بوضع (x=a)، نحصل على الآتي:

$$EI\ y_c = -\frac{wa^4}{6} + \frac{wa^4}{24} = -\frac{wa^4}{8}$$

إذن:

$y_C = -\frac{wa^4}{8\ EI}\left(= -\frac{Wa^3}{8\ EI}\right)$ **(where, $W = w\ .\ a$)**	**(8-10)**

$$CC' = BD = -\frac{wa^4}{8\ EI}$$

ولكن بما إن [$\tan(\theta_C)=\theta_C$] عندما تكون (θ_C) صغيرة، إذن:

$$B'D = C'D\ \tan\theta_C = BC \times \theta_C$$

وبما إن:

$$\theta_C = -\frac{wa^3}{6\ EI}$$

إذن:

$$B'D = (l-a) \times \left(-\frac{wa^3}{6\ EI}\right)$$

ومن ثم:

$$y_B = BD + B'D = -\frac{wa^4}{8\ EI} + (l-a) \times \left(-\frac{wa^3}{6\ EI}\right)$$

$$y_B = -\left[\frac{wa^4}{8\ EI} + \frac{wa^3}{6\ EI}(l-a)\right]$$

الترخيم لأسفل عند B يكون:

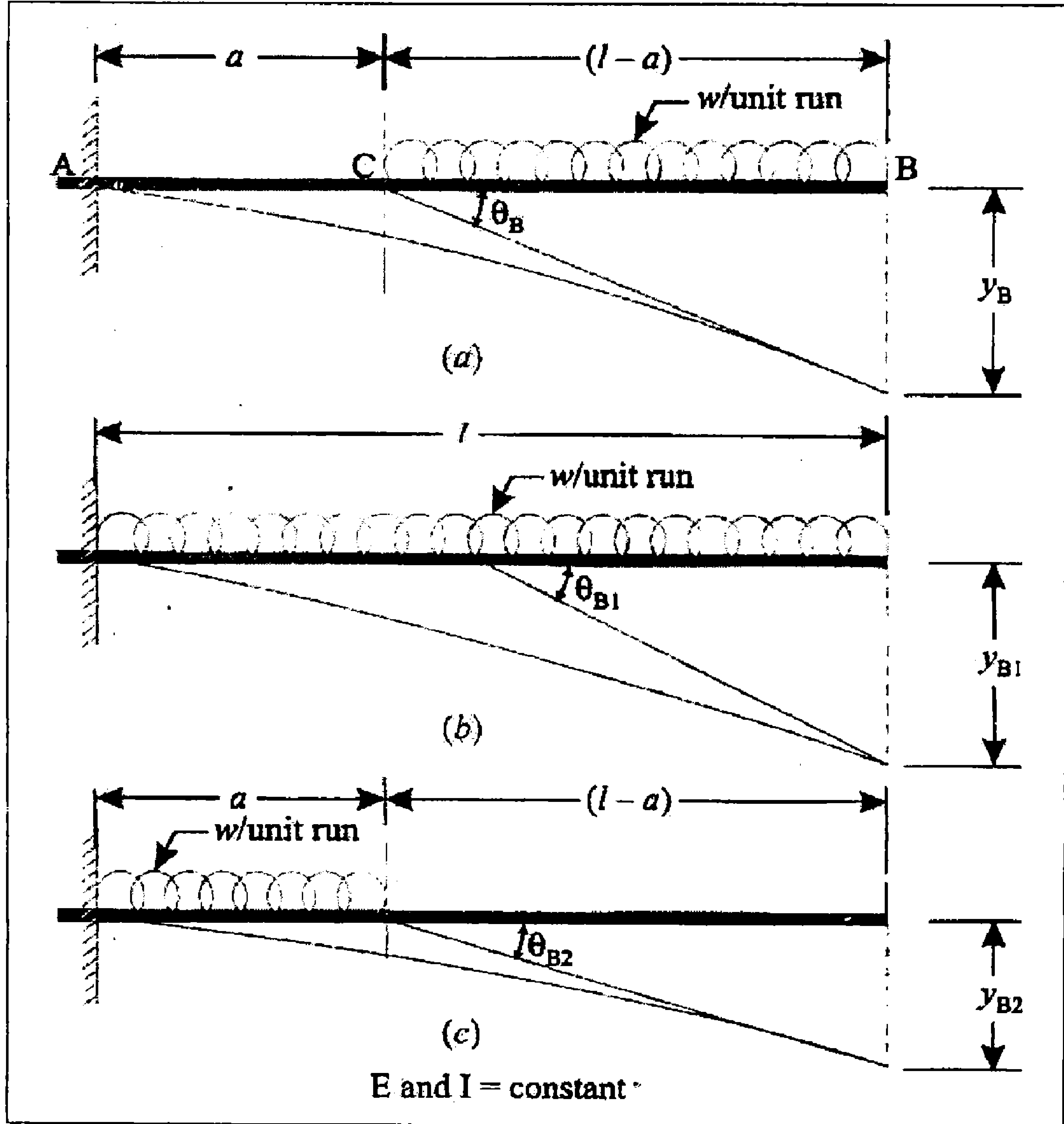
$$= \frac{wa^4}{8\ EI} + \frac{wa^3}{6\ EI}(l-a)$$

أو:

$\left[=\dfrac{Wa^{3}}{8\,EI}+\dfrac{Wa^{2}}{6\,EI}(l-a)\right]$	(8-11)

الحالة (V): كابولي طوله (l) يحمل حمل موزع بانتظام (w) لكل وحدة طول على جزء من بحر الكابولي مقاس من الطرف الحر

انظر الشكل التالي:



من الأجزاء (a, b, c) بالشكل السابق يتضح أنه للحصول على النتيجة الموضحة في الجزء (a) فإننا نأخذ الفرق بين النتيجة الموضحة في الجزء (b) والنتيجة الموضحة في الجزء (c)، ومن ثم:

$\theta_B = \theta_{B_1} - \theta_{B_2}$ and $y_B = y_{B_1} - y_{B_2}$

ولكن من الفقرات السالفة الذكر لدينا الآتي:

$$\theta_{B_1} = \frac{wl^3}{6\,EI}$$

$$y_{B_1} = -\frac{wl^4}{8\,EI}$$

$$\theta_{B_2} = \frac{wa^3}{6\,EI}$$

$$y_{B_2} = -\left[\frac{wa^4}{8\,EI} + \frac{wa^3}{6\,EI}\,(l-a)\right]$$

الميل عند النقطة B:

$$\theta_B = \theta_{B_1} - \theta_{B_2} = -\frac{wl^3}{6\,EI} - \left(-\frac{wa^3}{6\,EI}\right)$$

$$\theta_B = -\frac{wl^3}{6\,EI} + \frac{wa^3}{6\,EI} = -\frac{w}{6\,EI}(l^3 - a^3)$$

أي أن:

$$\theta_B = -\frac{w}{6\,EI}\,(l^3 - a^3)$$

الترخيم عند النقطة B:

$$y_B = y_{B_1} - y_{B_2}$$

$$y_B = -\frac{wl^4}{8\,EI} - \left[-\left\{\frac{wa^4}{8\,EI} + \frac{wa^3}{6\,EI}(l-a)\right\}\right]$$

$$y_B = -\frac{wl^4}{8\,EI} + \frac{wa^4}{8\,EI} + \frac{wa^3}{6\,EI}(l-a)$$

$$y_B = -\frac{wl^4}{8\,EI} + \frac{wa^4}{8\,EI} + \frac{wa^3\,l}{6\,EI} - \frac{wa^4}{6\,EI}$$

$$y_B = -\frac{w}{8\,EI}(l^4 - a^4) - \frac{wa^3}{6\,EI}(l-a)$$

$$y_B = -\frac{w}{24\,EI}\left[3(l^4 - a^4) - 4a^3\,(l-a)\right]$$

$$y_B = -\frac{w}{24\,EI}(3l^4 - 3a^4 - 4a^3\,l + 4a^4)$$

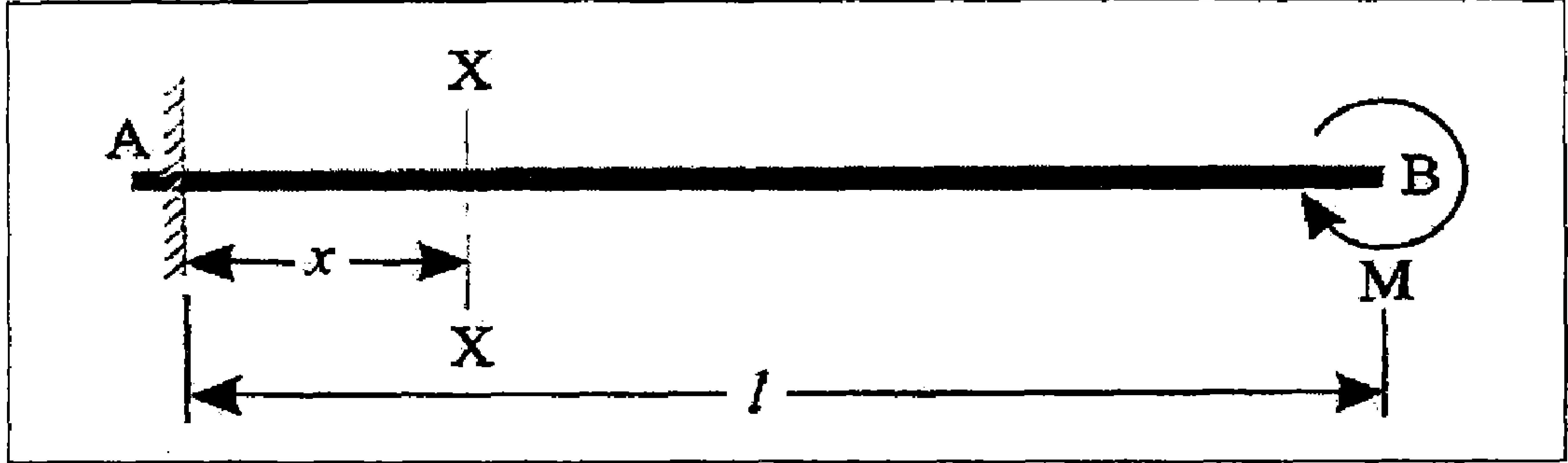
$$y_B = -\frac{w}{24\,EI}(3l^4 - 4la^3 + a^4)$$

أي أن الترخيم لأسفل عند B يكون:

$B = \frac{w}{24EI}(3l^4 - 4la^3 + a^4)$	**(8-13)**

الحالة (VI): كابولي طوله (l) ومعرض لعزم عند الطرف الحر

انظر الشكل التالي:



لندرس سويًا مقطع عرضي XX يوجد على مسافة x من الطرف المثبت.

$$M_x = -M; \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

وبعمل تكامل من أجل الميل، نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = -M.x + C_1$$

(حيث أن C_1 عبارة عن ثابت التكامل).

عندما (x=0) و(dy/dx=0) إذن ($C_1=0$). ومن ثم، تصبح معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\frac{dy}{dx} = -M.x$	**(i)**

الميل عند النقطة **B**:

بوضع (x=l)، نحصل على العلاقة التالية:

$\theta_B = \frac{dy}{dx} = -\frac{Ml}{EI}$	**(8-14)**

$$El\,y = -M.\frac{x^2}{2} + C_2$$

(حيث أن (C_2) ثابت التكامل) وعندما (x=0) و(y=0) إذن ($C_2=0$) ومن ثم تكون معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$El\,y = -M.\frac{x^2}{2}$	**(ii)**

الترخيم عند النقطة **B**:

بوضع (x=l)، نحصل على الآتي:

$$EI\,y_B = -\frac{Ml^2}{2}$$

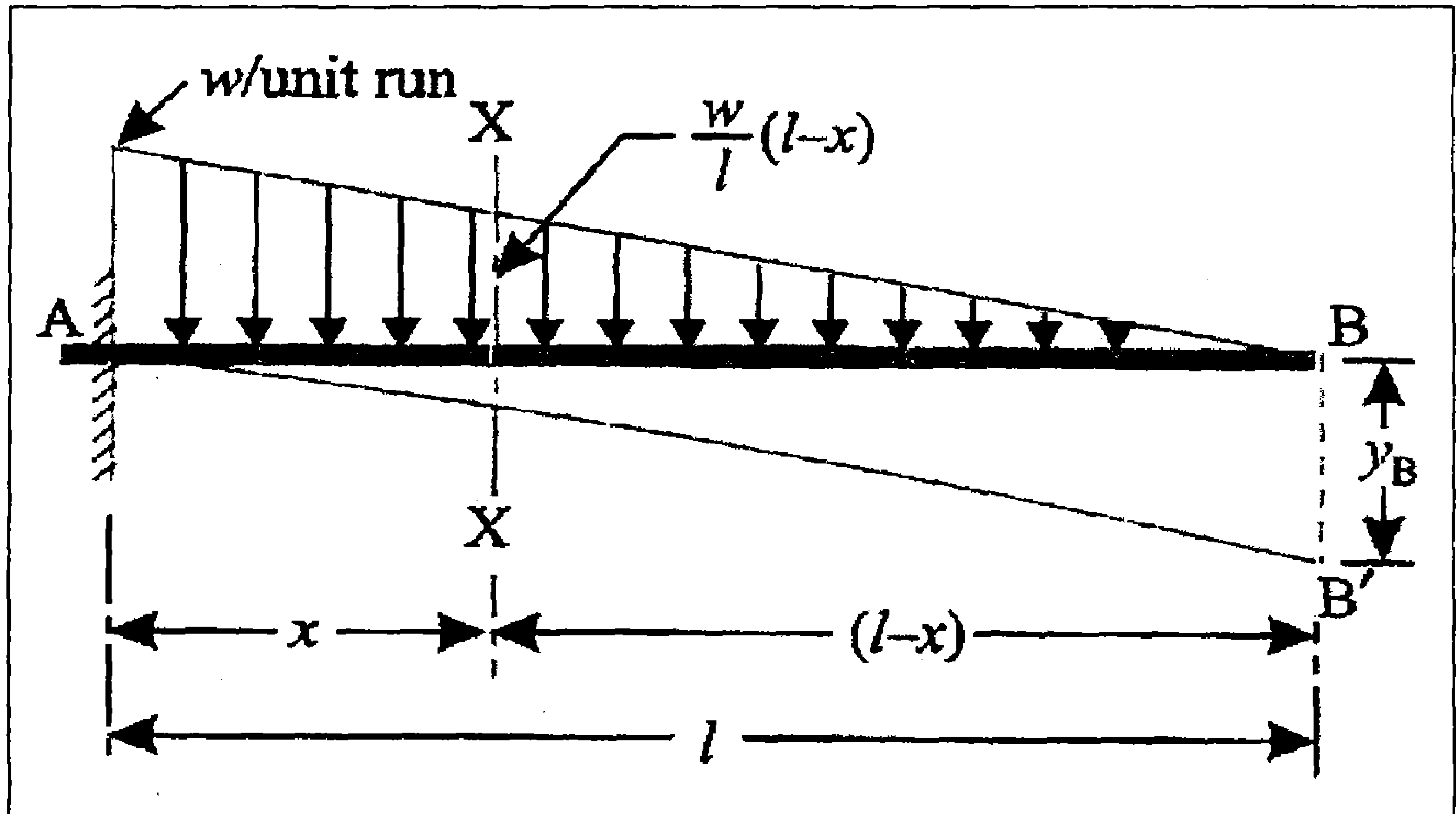
$$\therefore \quad y_B = -\frac{Ml^2}{2EI}$$

أي أن الترخيم عند B يكون لأسفل ويتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

Downward deflection of $B = \dfrac{Ml^2}{2EI}$	**(8-15)**

الحالة (VII): كابولي طوله (l) يحمل حمل موزع تتباين شدته بانتظام من الصفر عند الطرف الحر إلى w لكل وحدة طول عند الطرف المثبت

انظر الشكل التالي:



لندرس سويًا مقطع عرضي XX يوجد على مسافة x من الطرف المثبت.

شدة التحميل عند المقطع XX تكون:

$$= \frac{w}{l}(l-x) \text{ per unit run}$$

عزم الانحناء عند المقطع XX:

$$M_x = -\frac{1}{2}(l-x) \times \frac{w}{l}(l-x) \times \frac{(l-x)}{3} = -\frac{w(l-x)^3}{6l}$$

إذن:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w(l-x)^3}{6l}$$

بعمل تكامل من أجل الميل، نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = +\frac{w(l-x)^4}{24l} + C_1$$

(حيث أن C_1 عبارة عن ثابت التكامل)، وعندما:

$$x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \quad C_1 = -\frac{wl^3}{24}$$

ومن ثم تكون معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\dfrac{dy}{dx} = +\dfrac{w(l-x)^4}{24l} - \dfrac{wl^3}{24}$	**(i)**

الميل عند النقطة B:

بوضع (x=l)، نحصل على العلاقة التالية:

$\theta_B = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{wl^3}{24EI}$	**(8-16)**

للحصول على الترخيم، نقوم بعمل تكامل مرة أخرى ليصبح لدينا الآتي:

$$EI\,y = -\frac{w(l-x)^5}{120l} = -\frac{wl^3}{24}x + C_2$$

(حيث أن (C_2) ثابت التكامل). وعندما (x=0) و(y=0)، إذن:

$$0 = -\frac{wl^4}{120} + C_2 \text{ or } C_2 = \frac{wl^4}{120}$$

ومن ثم تكون معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$EI\,y = -\dfrac{w(l-x)^5}{120l} - \dfrac{wl^3}{24}x + \dfrac{wl^4}{120}$	**(ii)**

الترخيم عند النقطة B:

بوضع (x=l)، نحصل على الآتي:

$$EI\,y_B = -\frac{wl^4}{24} + \frac{wl^4}{120} = -\frac{wl^4}{30}$$

أو:

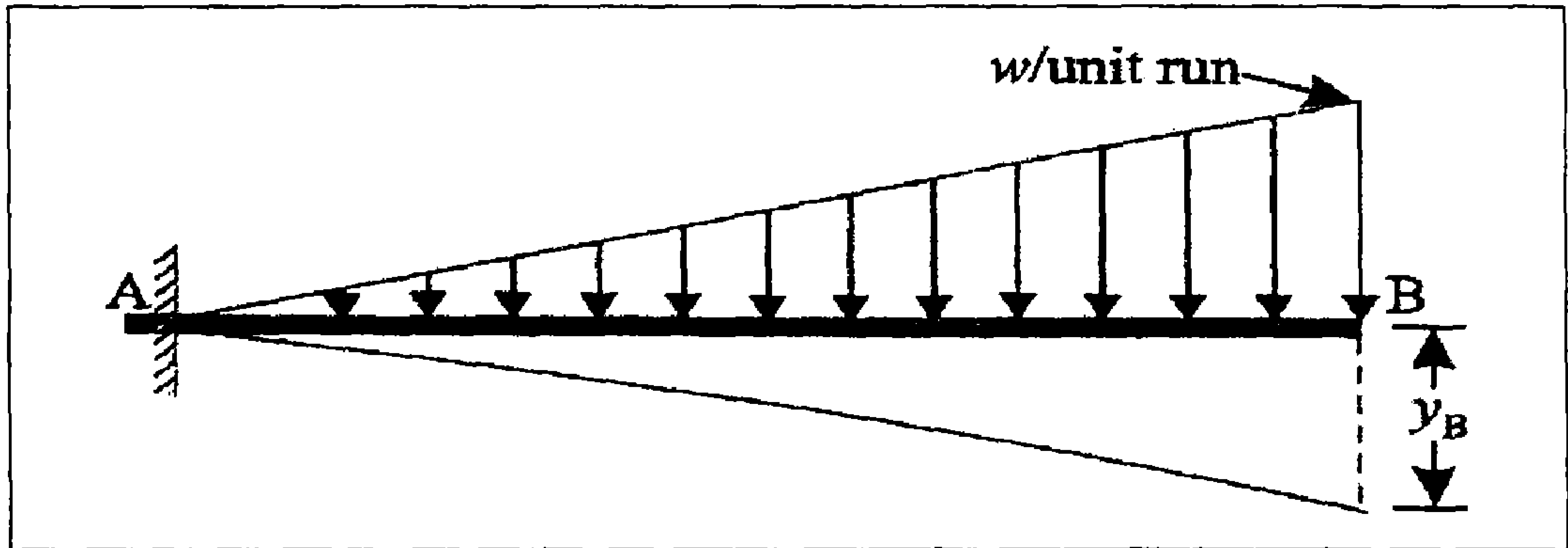
$$y_B = -\frac{wl^4}{30EI}$$

أي أن الترخيم عند B يكون لأسفل ويتم حسابه كالآتي:

$$= \frac{wl^4}{30EI}$$

الحالة (VIII): كابولي طوله (l) يحمل حمل موزع تتغير شدته بانتظام من الصفر عند الطرف المثبت إلى w لكل وحدة طول عند الطرف الحر

انظر الشكل التالي:



من الواضح أن الترخيم عند B = الترخيم عند B بسبب حمل موزع بانتظام قدره w لكل وحدة طول عبر الطول بأكمله - الترخيم عند B بسبب حمل موزع بانتظام تتغير شدته من الصفر عند الطرف الحر إلى w لكل وحدة طول عند الطرف المثبت.

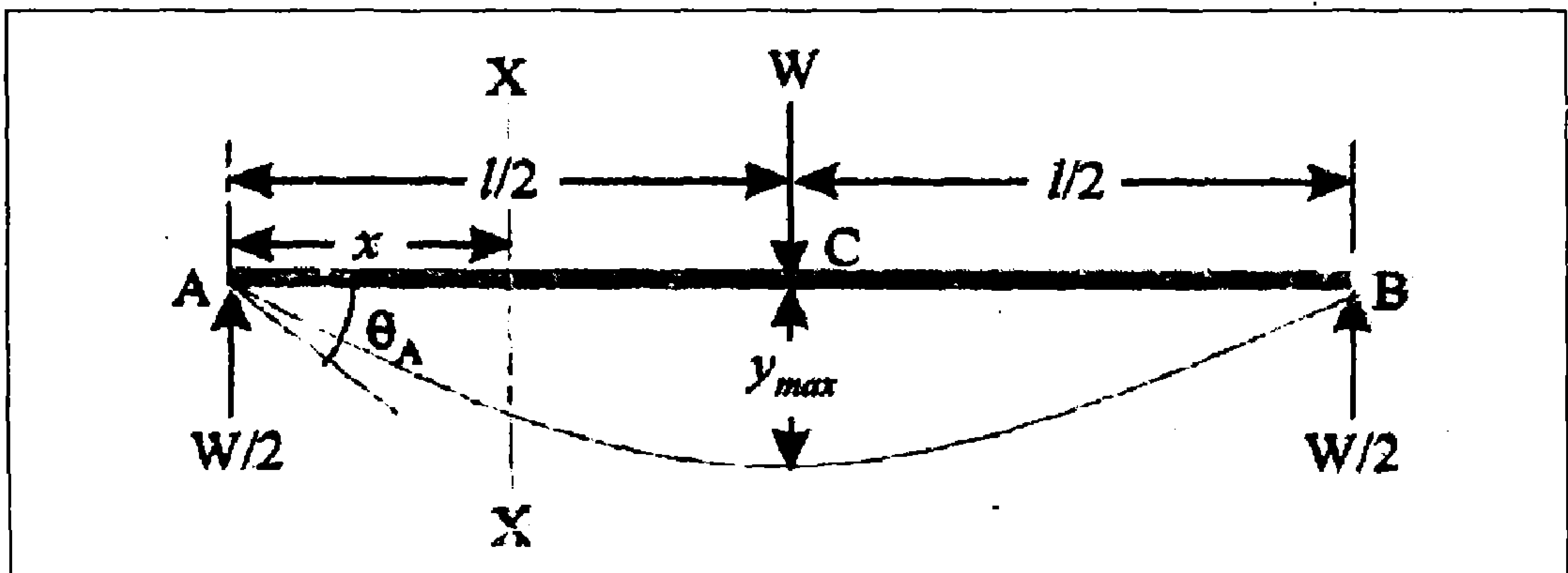
الترخيم عند B يكون لأسفل ويتم حسابه من العلاقة التالية:

$$y_B = \frac{wl^4}{8EI} - \frac{wl^4}{30EI} = \frac{11}{120}\frac{wl^4}{EI}$$

الكمرات البسيطة الإرتكاز

الحالة (I): كمرة بسيطة الارتكاز بحرها (l) وتحمل حمل مركز في نقطة عند منتصف البحر

في الشكل التالي، نشاهد كمرة بسيطة الارتكاز AB بحرها (l) وتحمل حمل مركز في نقطة W عند منتصف البحر C.



حيث أن الحمل مطبق بالتماثل فإن أقصى ترخيم (y_{max}) سوف يحدث عند منتصف البحر. كل رد فعلي رأسي يساوي (W/2). لندرس الجانب الأيسر AC من البحر.

يتم حساب عزم الانحناء عند أي مقطع XX في الجزء AC على مسافة x من A من خلال العلاقة التالية:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{W}{2}x$$

وبعمل التكامل، نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} + C_1$$

(حيث أن (C_1) ثابت التكامل).

عندما $x = \frac{l}{2}, \frac{dy}{dx} = 0$ ، فإن $0 = \frac{W}{4}(l/2)^2 + C_1$ ، إذن $C_1 = \frac{Wl^2}{16}$. ومن ثم

تكون معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} - \frac{Wl^2}{16}$	(i)

الميل عند **A**:

بوضع (x=0)، نحصل على الآتي:

$$\theta_A = \frac{dy}{dx} = -\frac{Wl^2}{16EI}$$

أي أن:

$\theta_A = -\frac{Wl^2}{16EI}$	**(8-19)**

وبتكامل معادلة الميل، نحصل على الآتي:

$$EIy = \frac{Wx^3}{12} - \frac{Wl^2}{16}x + C_2$$

عندما (x=0) و(y=0)، إذن (C_2=0)، ومن ثم تكون معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$EI\,y = \frac{Wx^3}{12} - \frac{Wl^2}{16}\cdot x$	**(ii)**

الترخيم عند **C**:

بوضع (x=l/2)، نحصل على الآتي:

$$EI\ y_C = \frac{W \times (l/2)^3}{12} - \frac{Wl^2}{16}(l/2)$$

$$EI\ y_C = \frac{Wl^3}{96} - \frac{Wl^3}{32} = -\frac{Wl^3}{48}$$

إذن:

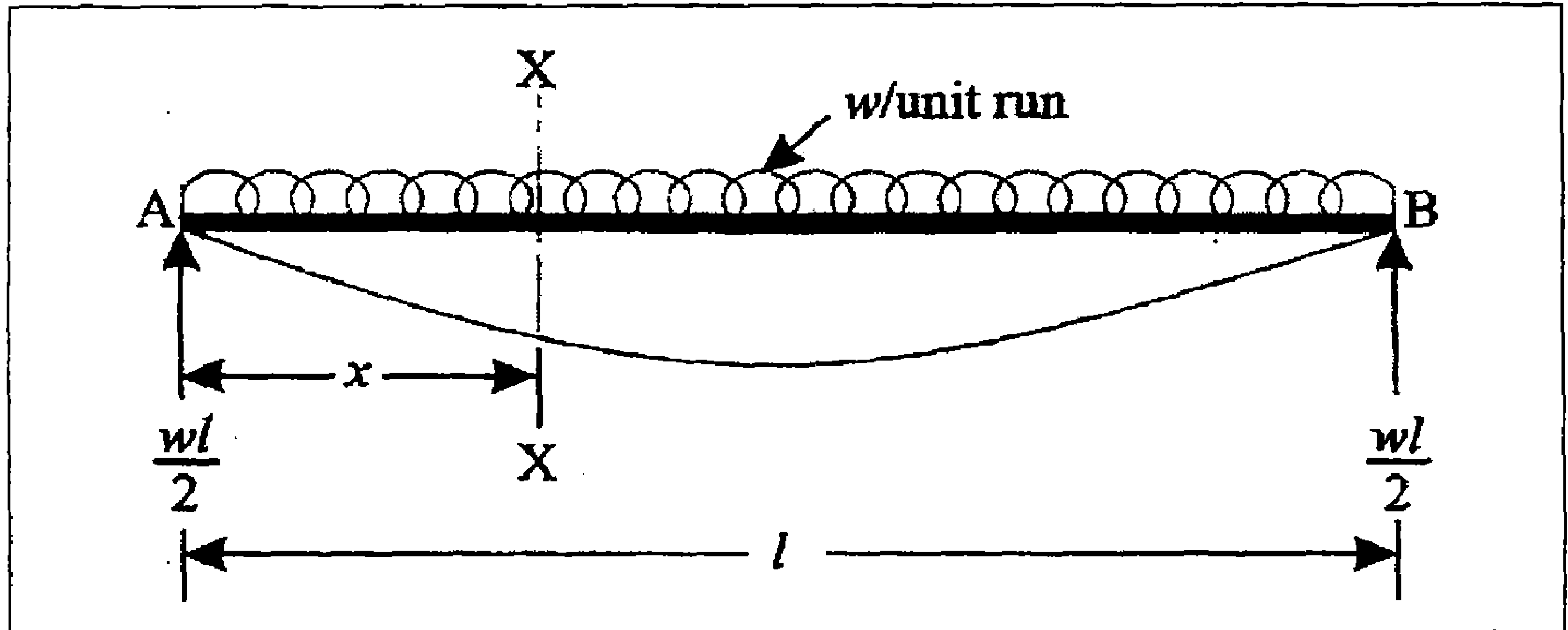
$$y_C = -\frac{Wl^3}{48\,EI}$$

ومن ثم، الترخيم عند C يكون لأسفل ويتم حسابه كالآتي:

$= \dfrac{Wl^3}{48\,EI}$	**(8-20)**

الحالة (II): كمرة بسيطة الارتكاز بحرها (l) وتحمل حمل موزع بانتظام (w) لكل وحدة طول عبر البحر بأكمله

في الشكل التالي، نشاهد كمرة بسيطة الارتكاز AB بحرها (l) وتحمل موزع بانتظام (w) لكل وحدة طول عبر البحر بأكمله. كل رد فعل رأسي يساوي (w*l/2).



لندرس مقطع عرضي XX على مسافة x من الطرف A.

$$M_x = \frac{wl}{2}\cdot x - \frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

بعمل تكامل، نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wl}{4}x^2 - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

(حيث (C_1) عبارة عن ثابت التكامل).

حيث أن التحميل متماثل، لذلك سيحدث أقصى ترخيم عند منتصف البحر ومن ثم الميل عند منتصف البحر يكون صفرًا، أي أن:

$$x = \frac{l}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = \frac{wl}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{w}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + C_1 = \frac{wl^3}{16} - \frac{wl^3}{48} + C_1$$

أو:

$$C_1 = -\frac{wl^3}{24}$$

ومن ثم، ستكون معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wl}{4}x^2 - \frac{wx^3}{6} - \frac{wl^3}{24}$	**(i)**

<u>الميل عند **A**:</u>

بوضع (x=0)، نحصل على الآتي:

$$EI\theta_A = -\frac{wl^3}{24}$$

إذن:

$\theta_A = -\frac{wl^3}{24EI}$	**(8-21)**

بعمل تكامل لمعادلة الميل، نحصل على الآتي:

$$EIy = \frac{wl\,x^3}{12} - \frac{w\,x^4}{24} - \frac{wl^3}{24}x + C_2$$

(حيث (C_2) عبارة عن ثابت التكامل).

عندما (x=0) و(y=0)، إذن ($C_2=0$)، ومن ثم تكون معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$EIy = +\frac{wl\,x^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^3}{24} \cdot x$	**(ii)**

<u>الترخيم عند منتصف البحر (y_{max}):</u>

بوضع (x=l/2)، نحصل على الآتي:

$$EIy_{max} = +\frac{wl}{12}(l/2)^3 - \frac{w}{24}(l/2)^4 - \frac{wl^3}{24} \cdot l/2$$

$$EIy_{max} = +\frac{wl^4}{96} - \frac{wl^4}{384} - \frac{wl^4}{48} = -\frac{5wl^4}{384}$$

$$y_{max} = -\frac{5wl^4}{384EI}$$

ومن ثم، الترخيم يكون لأسفل ويتم حسابه كالآتي:

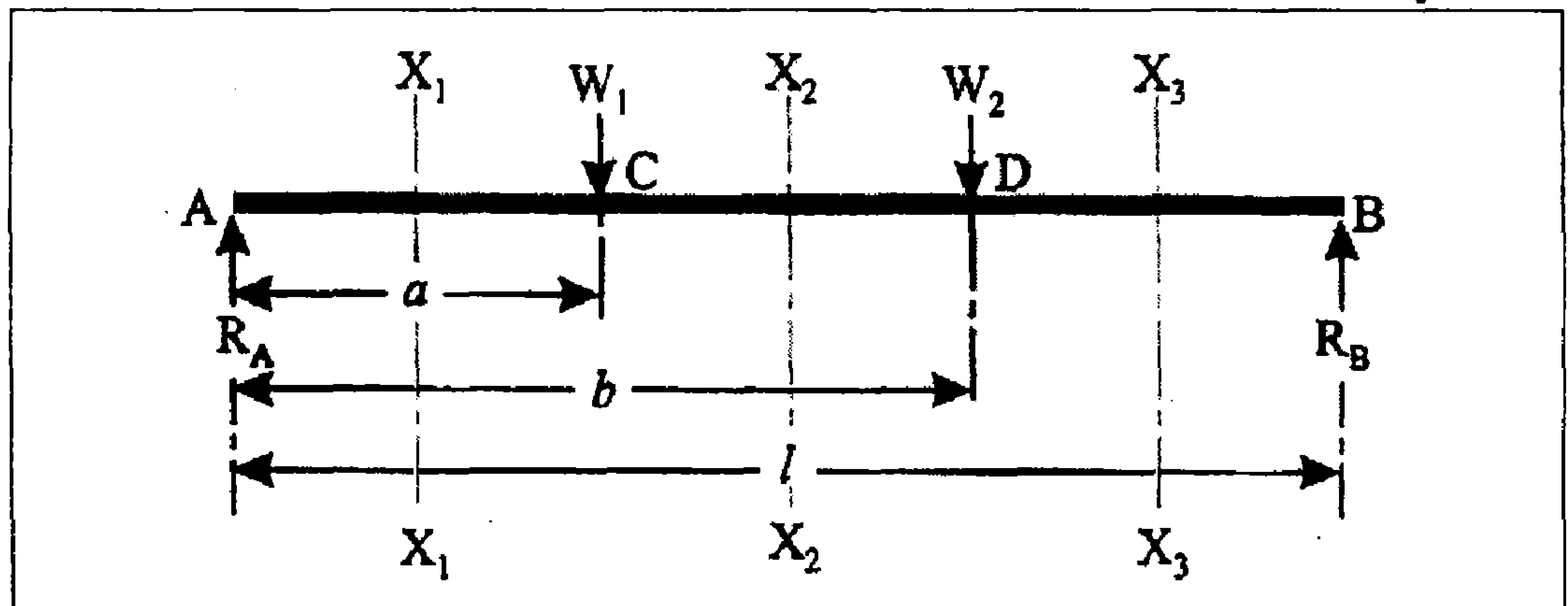
$= \frac{5wl^4}{384EI}$	(8-22)

٨-٧ طريقة Macaulay

- في طريقة Macaulay، يتم تكوين معادلة واحدة من أجل كل التحميلات الواقعة على الكمرة، هذه المعادلة يتم بناؤها بطريقة تجعل من الممكن تطبيق ثوابت التكامل على كل أجزاء الكمرة. هذه الطريقة تسمى أيضًا طريقة دوال الشذوذ **Method of Singularity functions**.

- هذه الطريقة تعتبر طريقة مناسبة لتحديد ترخيم كمرة معرضة لأحمال مركزة في نقط **point loads** أو أحمال متقطعة بصفة عامة.

في الشكل التالي، نشاهد كمرة بحرها (l) وبسيطة الارتكاز عند A وB وتحمل أحمال مركزة في نقط (W_1) و(W_2) على مسافات (a) و(b) على الترتيب من الطرف A:



لنجعل (R_A) و(R_B) عبارة عن ردود الأفعال عند A وB على الترتيب.

- لندرس مقطع عرضي X_1X_1 بين A وC على مسافة x من الطرف A. عند هذا المقطع يتم حساب عزم الانحناء كالآتي:

$M_x = R_A \cdot x$	(i)

هذا التعبير الرياضي (الخاص بعزم الانحناء) يعمل بكفاءة بالنسبة لقيم x التي تتراوح من صفر إلى a.

- لندرس مقطع عرضي X_2X_2 بين C وD على مسافة x من الطرف A. عند هذا المقطع يتم حساب عزم الانحناء كالآتي:

$M_x = R_A \cdot x - W_1\ (x-a)\ M_x = R_A \cdot x$	(ii)

هذا التعبير الرياضي (الخاص بعزم الانحناء) يعمل بكفاءة بالنسبة لقيم x التي تتراوح من a إلى b.

- لندرس مقطع عرضي X_3X_3 بين D وB على مسافة x من الطرف A. عند هذا المقطع يتم حساب عزم الانحناء كالآتي:

$M_x = R_A \cdot x - W_1\ (x-a) - W_2\ (x-b)$	(iii)

هذا التعبير الرياضي (الخاص بعزم الانحناء) يعمل بكفاءة بالنسبة لقيم x التي تتراوح من b إلى l.

- عند أي مقطع، بصفة عامة، يتم حساب عزم الانحناء من خلال العلاقة التالية:

$M_x = EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = R_A \times x \Big| -W_1\,(x-a) \Big| - W_2\,(x-b)$	(8-23)

في هذه المعادلة، يمكن ملاحظة أنه كلما اتجه مقدار **x** إلى الزيادة كلما تغير قانون التحميل وظهرت تعبيرات رياضية إضافية.

قيمة x من	قيمة x إلى	وضع المعادلة رقم (٨-٢٣)
٠	a	يتم التعامل مع الجزء الأول فقط من المعادلة.
a	b	يتم التعامل مع الجزأين الأول والثاني فقط من المعادلة.
b	l	يتم التعامل مع كل أجزاء المعادلة.

بعمل تكامل للمعادلة رقم (٨-٢٣)، نحصل على التعبير الرياضي العام للميل ليكون بالصورة التالية:

$EI\dfrac{dy}{dx} = R_A \cdot \dfrac{x^2}{2} + C_1 \Big| -\dfrac{W_1\,(x-a)^2}{2} \Big| - \dfrac{W_2\,(x-b)^2}{2}$	(8-24)

من المفيد جدًا أخذ النقاط التالية في الاعتبار:

(i) ثابت التكامل (C_1) ينبغي أن يُكتب بعد الـ term الأول بالمعادلة رقم (٨-٢٤).

(ii) الكمية (x - a) ينبغي تكاملها على إنها $\frac{(x-a)^2}{2}$ وليست على إنها $\frac{x^2}{2} - ax$.

وبالمثل ينبغي تكامل الكمية (x - b) ككل على إنها $\frac{(x-b)^2}{2}$.

(iii) الثابت (C_1) يكون صالح للاستخدام بالنسبة لكل قيم x.

بعمل تكامل للمعادلة رقم (٨-٢٤)، نحصل على معادلة الترخيم:

$EIy = R_A \times \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$	$-\frac{W_1 (x-a)^3}{6}$	$-\frac{W_2 (x-b)^3}{6}$	(8-25)

في هذه المعادلة نلاحظ الآتي:

(i) تم تكامل $(x-a)^2$ ليصبح $\frac{(x-a)^3}{3}$ كما تم تكامل $(x-b)^2$ ليصبح $\frac{(x-b)^3}{3}$.

(ii) الثابت (C_2) يتم كتابته بعد ($C_1 * x$). وهذا الثابت يكون صالح للاستخدام بالنسبة لكل قيم x.

(iii) لو أن الشروط الطرفية معلومة، حينئذ يمكن الحصول على قيم الثوابت (C_1) و(C_2).

مثال

لو أن كمرة بسيطة الارتكاز فإن الترخيم يكون صفرًا عند A وB أي عند (x=0) و(x=l) تكون (y=0).

وبوضع (x=0) و(y=0) في معادلة الترخيم، نجد أن ($C_2=0$).

وبوضع (x=l) و(y=0) في معادلة الترخيم، حينئذ يمكن حساب قيمة (C_1).

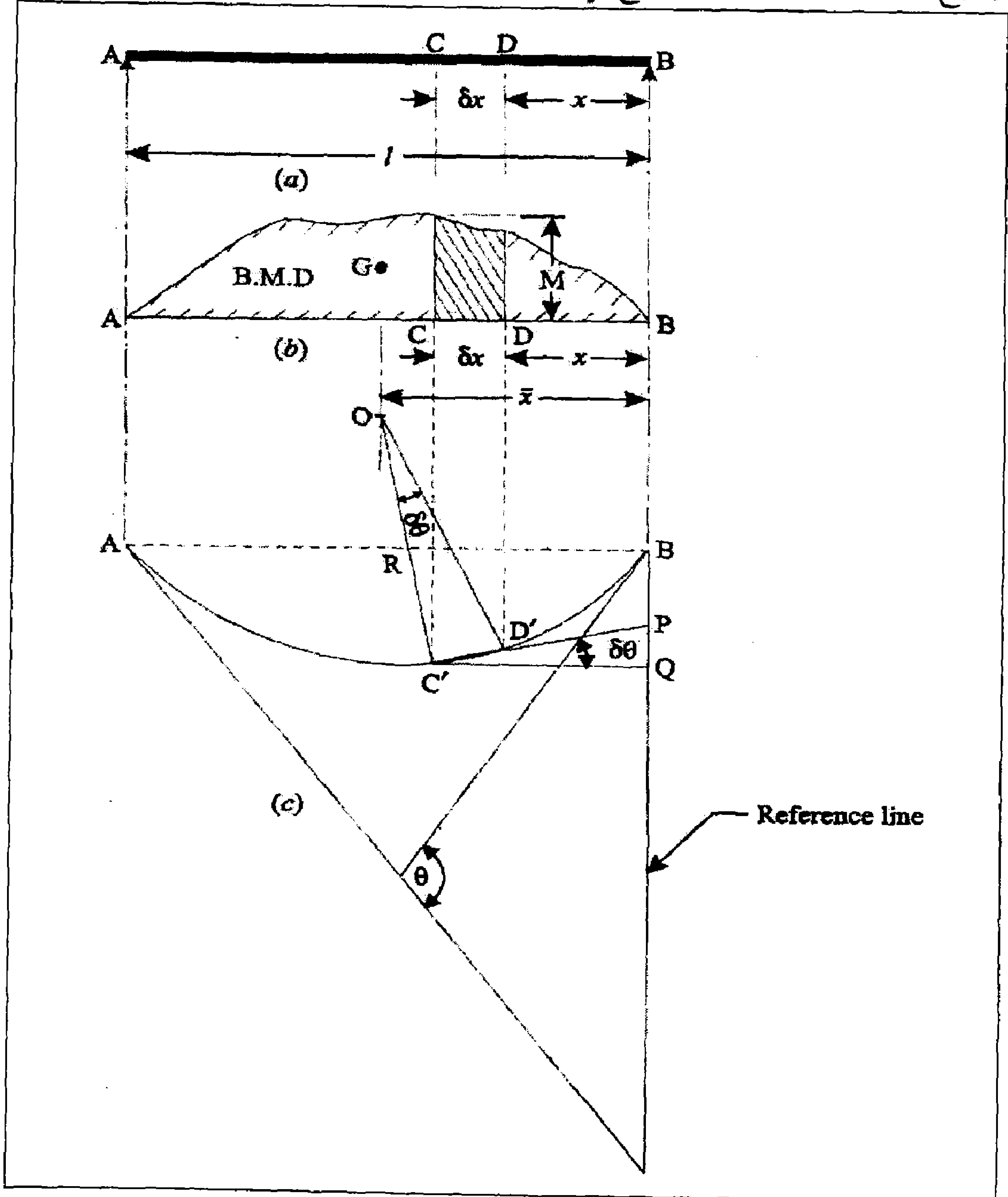
وعندما تصبح الثوابت (C_1) و(C_2) معلومة، في هذه الحالة يمكن تحديد كل من الميل والترخيم عند أي مقطع.

٨-٨ طريقة عزم المساحة

طريقة عزم المساحة تعتبر مناسبة جزئيا في حالة الكمرات الواقعة تحت تأثير أحمال مركزة في نقطة حيث تكون مساحة عزم الانحناء مؤلفة من مثلثات ومستطيلات. وفي حالة الحمل الموزع نجد أن عملية تحديد موضع مركز الثقل نفسها تتضمن عمل تكامل ، بالتالي

فهذه الطريقة أعقد إلى حد ما من طريقة Macaulay. ولكن على كل حال، هذه الطريقة قد تُستخدم بشكل مناسب في حالات قياسية معينة للحمل الموزع حيث يكون موضع مركز ثقل مساحة عزم الانحناء معلوم.

لندرس سويًا كمرة AB الموضحة في الجزء (a) بالشكل التوضيحي والتي تحمل حمل يجعلها تنثني كما هو موضح في الجزء (b) بالشكل التوضيحي. لنجعل الكمرة تنثني ليصبح شكلها AC'D'B كما هو موضح في الجزء (c) بالشكل التوضيحي.



والآن، لندرس عنصر قصير CD من الكمرة ويوجد على مسافة x من B كما هو موضح في الجزأين (a) و(b) بالشكل التوضيحي السابق.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
M	عزم الانحناء بين C وD.
δx	طول العنصر CD.
R	نصف قطر الكمرة المنثنية.
$\delta\theta$	الزاوية المحصورة بين المماس عند 'C و'D، المواجهة للخط المرجعي أو هي التغير في الميل عبر الجزء العنصري (δx) وهي أيضًا الزاوية بين العمودين.
A	مساحة ديجرام عزم الانحناء .B.M.D عبر البحر بأكمله.
$\bar{x}$	المسافة الأفقية بين مركز الجاذبية G لمساحة ديجرام عزم الانحناء بأكمله والخط المرجعي.
θ	الزاوية بالـ radians، المحصورة بين المماسات المرسومة عند أطراف الكمرة أي عند A وB وتواجه الخط المرجعي.

من الـ geometry الخاص بالكمرة المنثنية، نجد أن $C'D' = R\,\delta\theta$، أو بالتعويض بـ $C'D' = \delta x$ نجد أن $\delta x = R\,.\delta\theta$، إذن:

$\delta\theta = \dfrac{\delta x}{R}$	(i)

نحن نعلم أنه بالنسبة للكمرة المحملة فإن $\dfrac{M}{I} = \dfrac{E}{R}$، أو $R = \dfrac{EI}{M}$. وبوضع هذه القيمة لـ R في المعادلة (i)، نحصل على الآتي:

$\delta\theta = \delta x \dfrac{M}{EI} = \dfrac{M\,\delta x}{EI}$	(ii)

التغير الكلي للميل من A إلى B يمكن إيجاده عن طريق عمل تكامل لهذه المعادلة بين الحدود صفر و(l). إذن:

$$\theta = \int_0^l \frac{M\,\delta x}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^l M \cdot \delta x$$

ولكن $\int_0^l M \cdot \delta x$ = مساحة ديجرام عزم الانحناء عبر البحر بأكمله. إذن:

$\theta = \dfrac{A}{EI}$	(8-26)

والآن نرسم مماسات عند 'C و'D. ولنجعل هذين المماسين يتقابلان عند P وQ على الخط الرأسي (المرجعي) عبر B كما هو موضح في الجزء (c) بالشكل التوضيحي السابق.

ومن هندسة الشكل، نجد أن المماسات عند 'C و'D تتقابل أيضًا عند زاوية ($\delta\theta$)، أن:

$PQ = x.\delta\theta = \dfrac{xM \cdot \delta x}{EI} = \dfrac{M \cdot \delta x \cdot x}{EI}$	(iii)

الجزء المحصور الكلي يمكن إيجاده عن طريق عمل تكامل لهذه المعادلة بين الحدين صفر و(l). إذن:

$$y = \int_0^l \frac{M \cdot \delta x \cdot x}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \cdot \delta x \cdot x$$

ولكن، $M \cdot \delta x \cdot x$ = عزم مساحة ديجرام عزم الانحناء عبر الجزء (δx)، حول الخط المرجعي. إذن، $\int_0^l M \cdot \delta x \cdot x$ = عزم مساحة ديجرام عزم الانحناء عبر البحر بأكمله (δx)، حول الخط المرجعي = $A\bar{x}$. إذن:

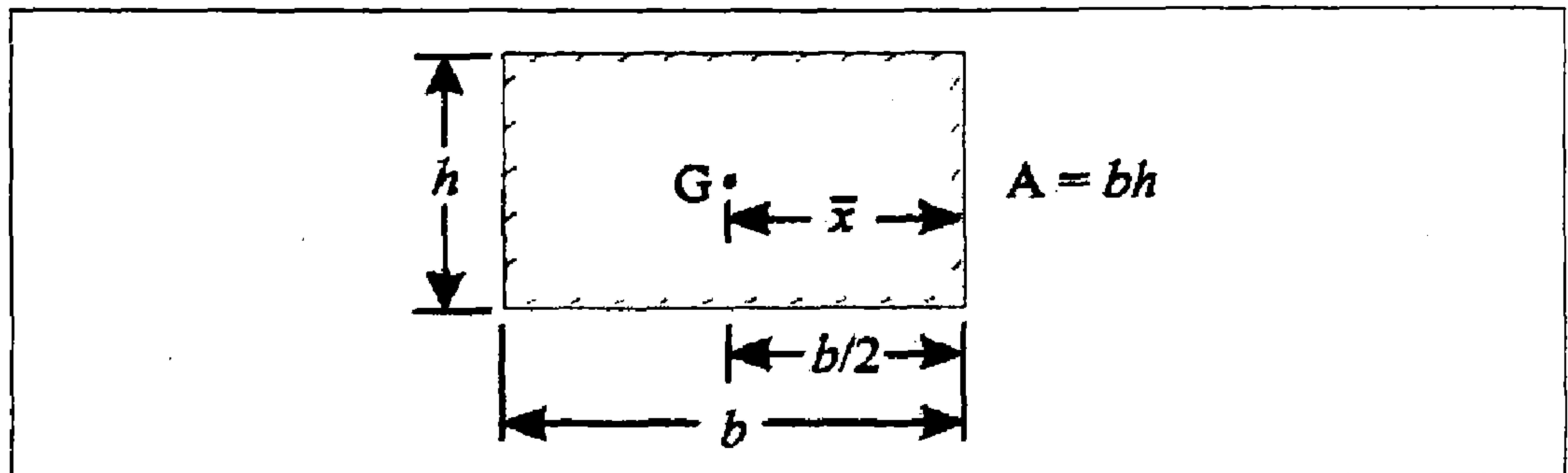
$y = \dfrac{A\bar{x}}{EI}$	(8-27)

ناتج ضرب I في E يسمى <u>الجساءة الانثنائية flexural rigidity للكمرة</u>. والنتائج المعطاة في المعادلة رقم (٨-٢٦) والمعادلة رقم (٢٧-٨) تسمى <u>نظريات مور Mohr's theorems</u>.

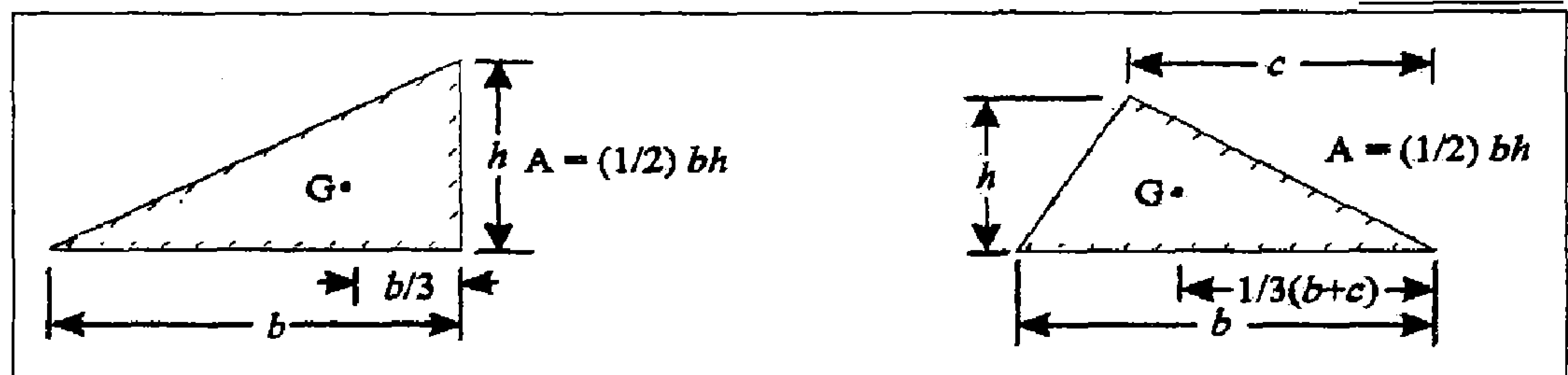
ملاحظة: مساحة ديجرام عزم الانحناء فوق خط الصفر سيكون موجب والعكس صحيح.

التعبيرات الرياضية الخاصة بحساب A (مساحة ديجرام عزم الانحناء) و $\bar{x}$ (المسافة الأفقية لمركز جاذبية ديجرام عزم الانحناء) بالنسبة لبعض ديجرامات عزم الانحناء المألوفة

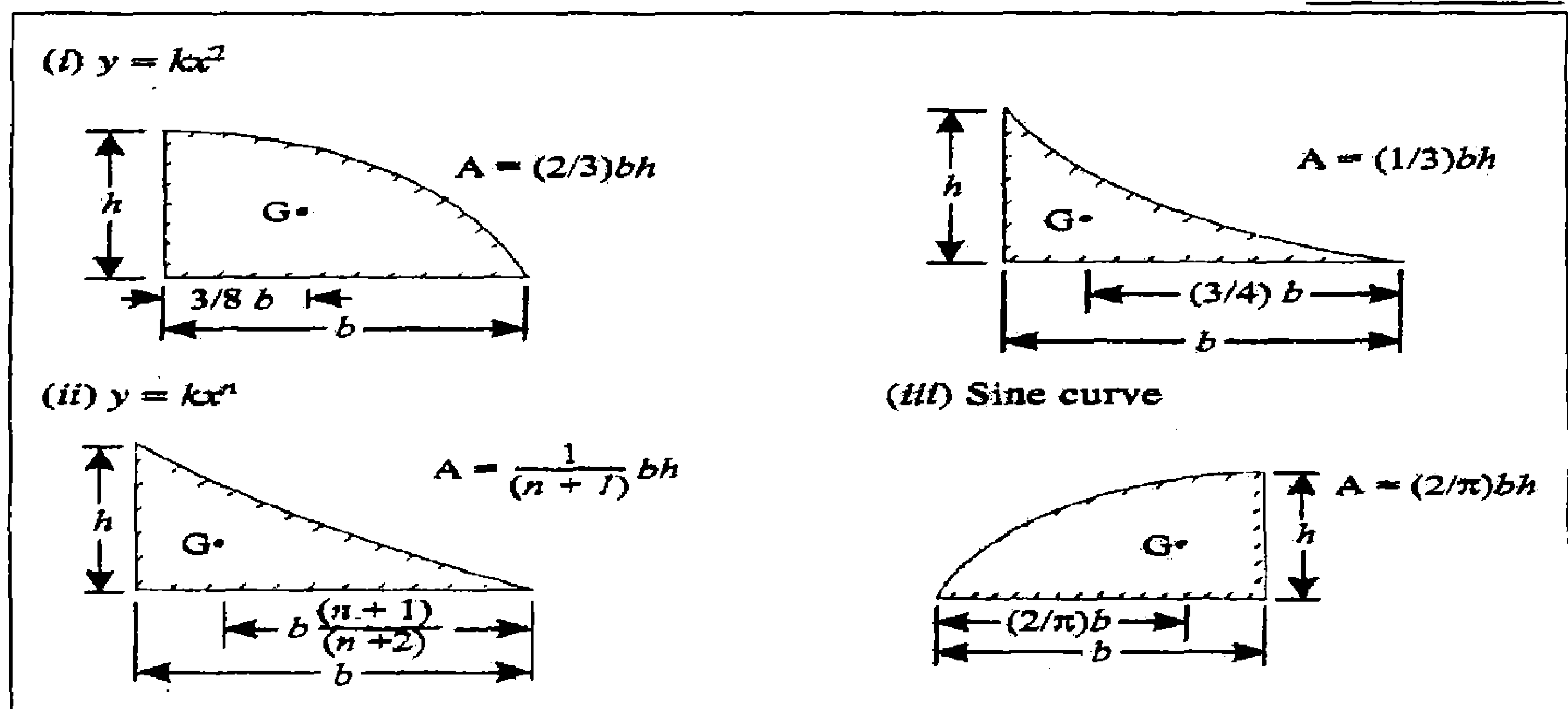
<u>(١) المستطيل:</u>



(٢) المثلث:



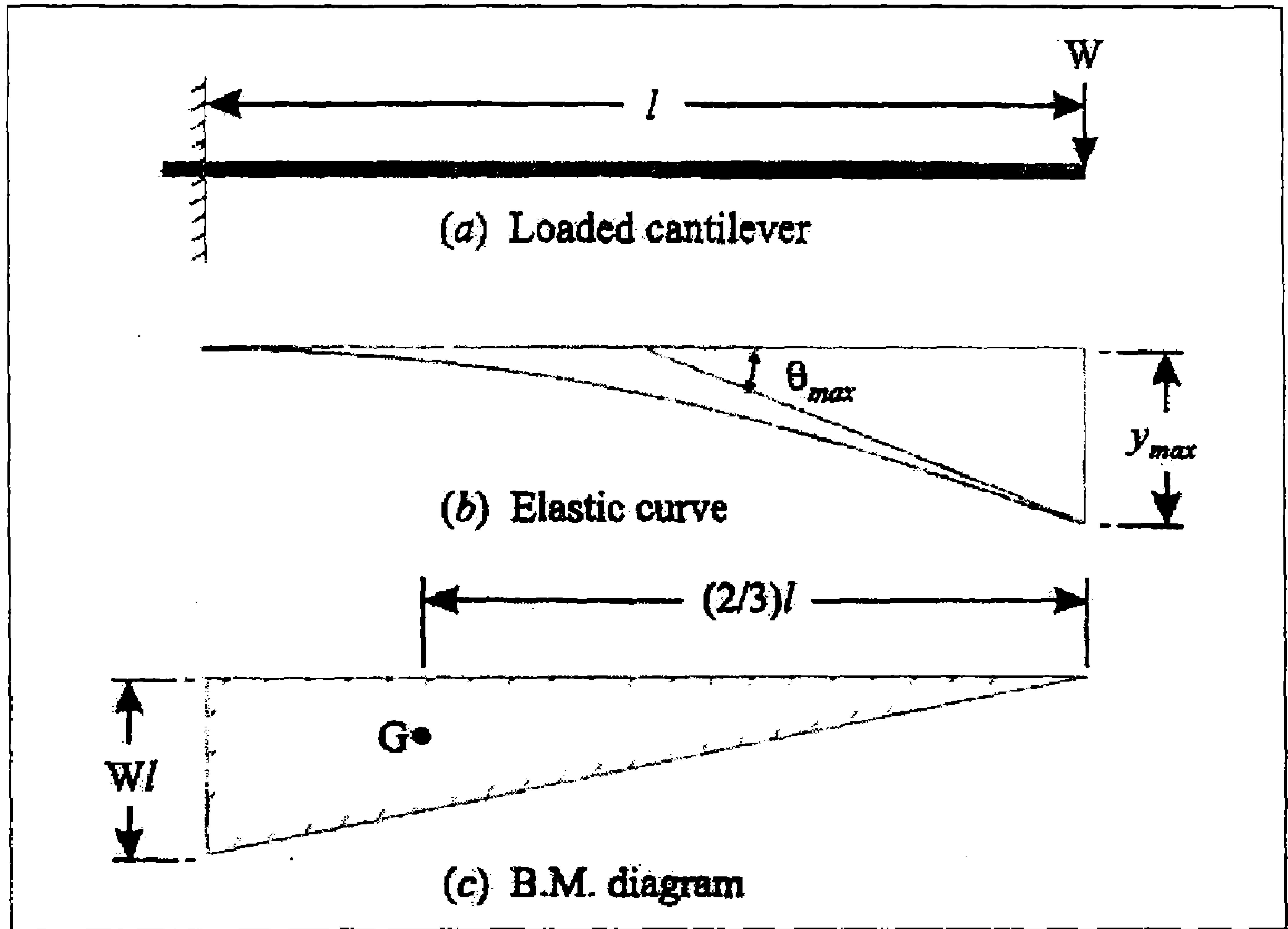
(٣) المنحنيات:



٨-٨-١ تحديد أقصى ميل وأقصى ترخيم في بعض الحالات الهامة

الحالة [I]: كمرة كابولية معرضة لحمل مركز عند الطرف الحر

في الجزء (a) بالشكل التالي نشاهد كابولي معرض لحمل مركز W عند الطرف الحر، كما نشاهد أيضًا في الجزء (b) بنفس الشكل منحنى المرونة أما في الجزء (c) فنشاهد ديجرام عزم الانحناء.



(a) Loaded cantilever

(b) Elastic curve

(c) B.M. diagram

سيصل كل من الميل والترخيم إلى الحد الأقصى عند الطرف الحر. ونحن نعلم أن:

$$\theta_{max} = \frac{A}{EI}$$

ومن الجزء (c) بالشكل التوضيحي السابق:

$$A = \frac{1}{2}(l)(Wl) = \frac{Wl^2}{2}$$

إذن:

$\theta_{max} = \dfrac{Wl^2}{2EI}$	**(8-28)**

وأيضًا، وبما إن $\bar{x} = \frac{2}{3}l$ ، إذن:

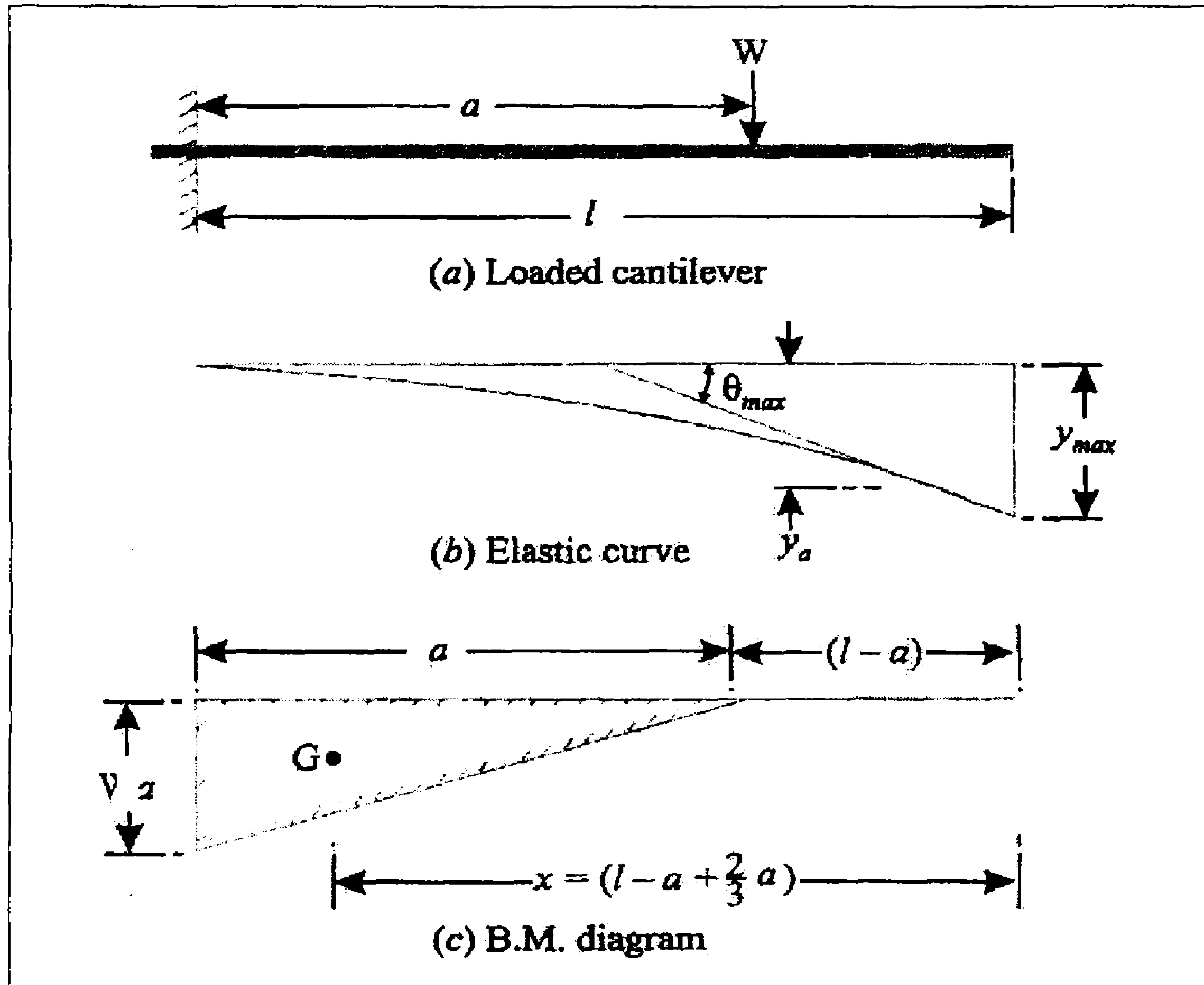
$$y_{max} = \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl^2}{2} \times \frac{2l}{3}}{EI} = \frac{Wl^3}{3EI}$$

ومن ثم:

$y_{max} = \dfrac{Wl^3}{3EI}$	**(8-29)**

الحالة (II): كمرة كابولي معرضة لحمل مركز عند أي نقط

انظر الشكل التالي:



(*a*) Loaded cantilever

(*b*) Elastic curve

(*c*) B.M. diagram

سيصل كل من الميل والترخيم إلى الحد الأقصى عند الطرف الحر كالمعتاد.

$$\theta_{max} = \frac{A}{EI}$$

ولكن:

$$A = \frac{1}{2}(a)(Wa) = \frac{Wa^2}{2}$$

إذن:

$\theta_{max} = \dfrac{Wa^2}{2EI}$	**(8-30)**

كما أن:

$$y_{max} = \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{Wa^2}{2EI}\left(l - a + \frac{2}{3}a\right)$$

أو:

$y_{max} = \frac{Wa^2}{2EI}\left(l - \frac{a}{3}\right)$	(8-31)

وأيضًا:

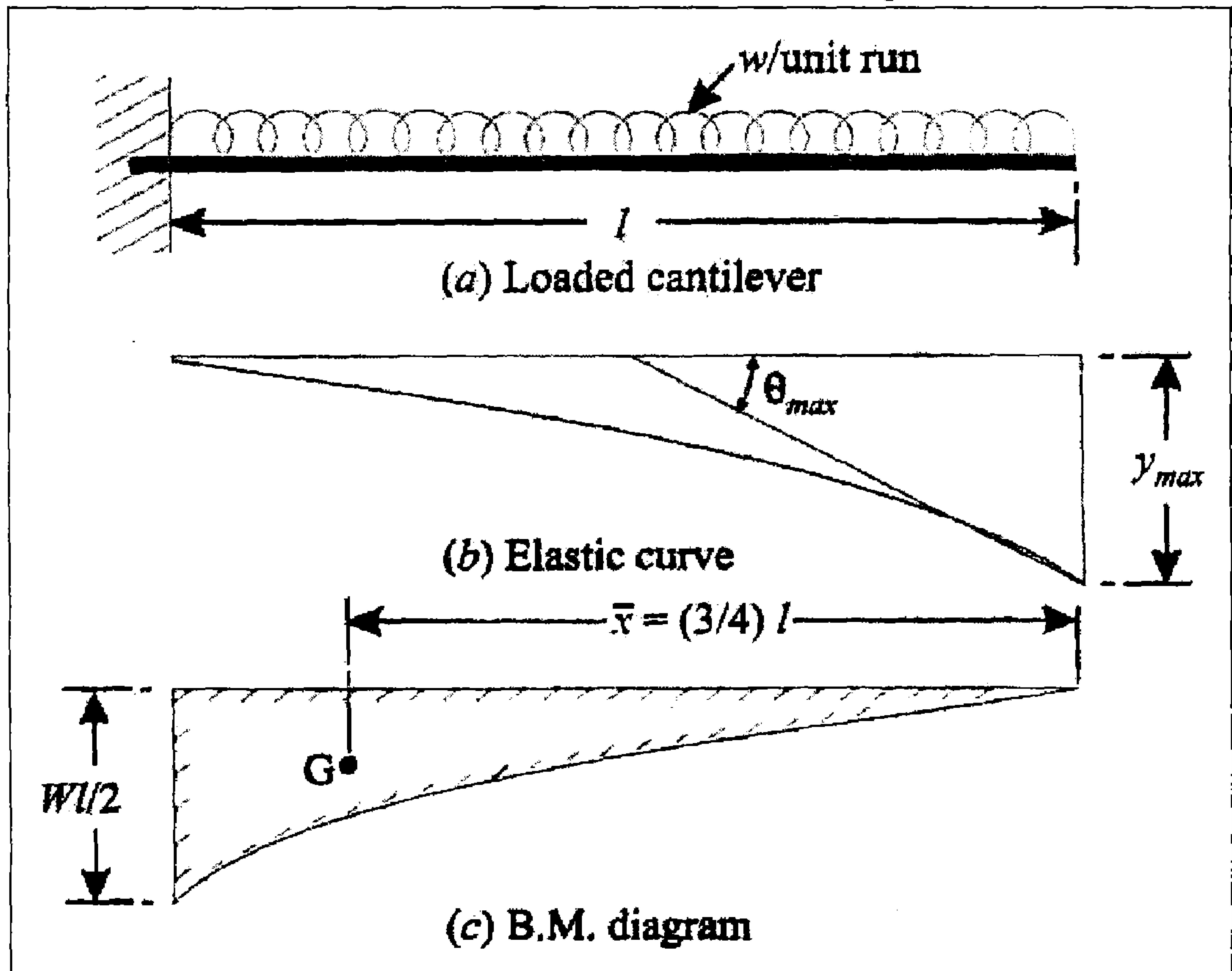
$$y_a = \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{Wa^2}{2EI}\left(\frac{2}{3}a\right)$$

أو:

$y_a = \frac{Wa^3}{3EI}$	(8-32)

الحالة (III): كمرة كابولي محملة بحمل موزع بانتظام

انظر الشكل التالي:



الحمل الكلي الواقع على الكابولي = W = w*l. والآن:

$$\theta_{max} = \frac{A}{EI}$$

ولكن:

$$A = \frac{1}{3}(l)\left[\frac{Wl}{2}\right] = \frac{Wl^2}{6}$$

إذن:

$\theta_{max} = \dfrac{Wl^2}{6EI}$	**(8-33)**

وبما إن $\bar{x} = \frac{3}{4}l$ ، إذن:

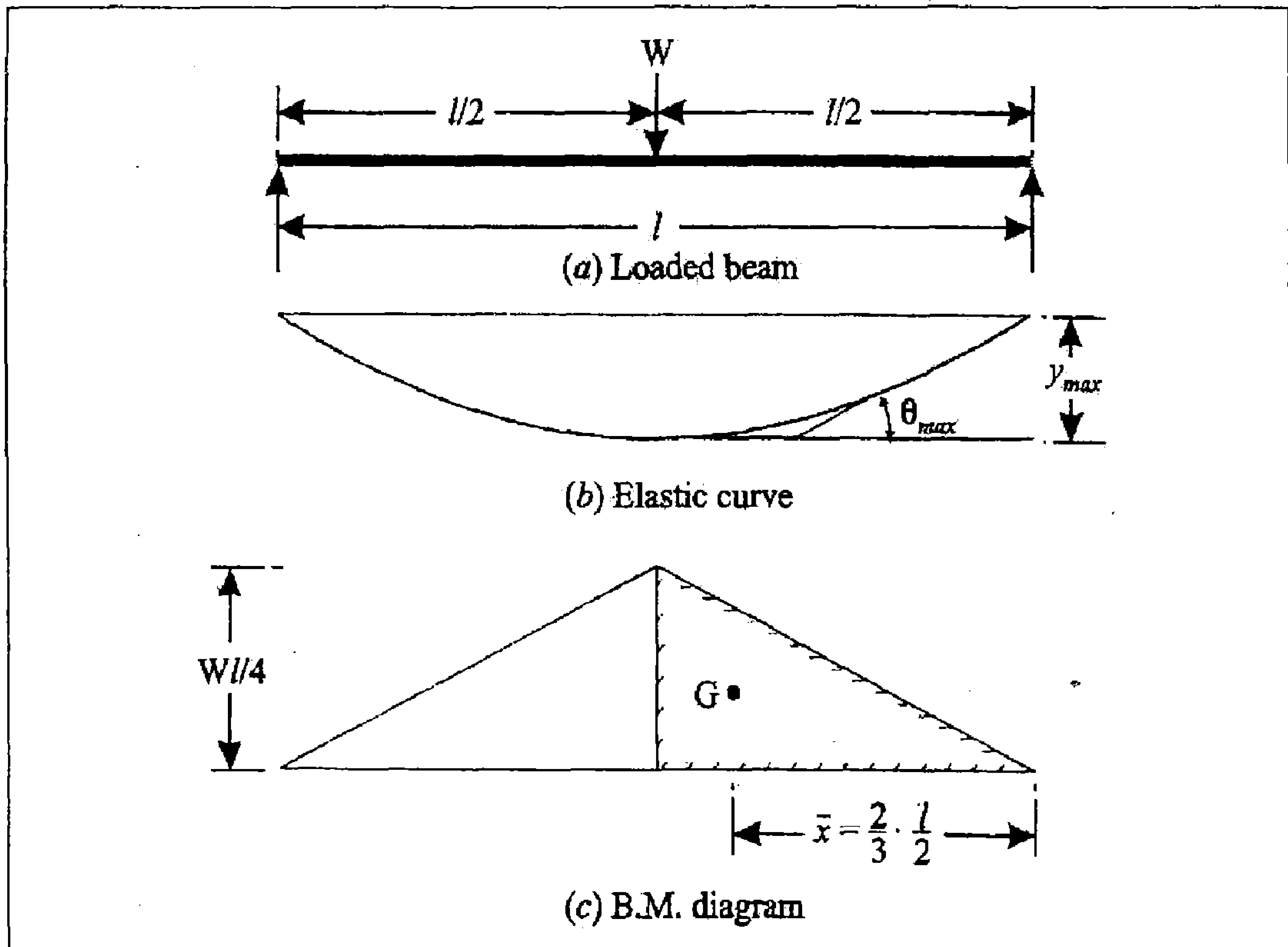
$$y_{max} = \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl^2}{6} \times \frac{3}{4}l}{EI}$$

أو:

$y_{max} = \dfrac{Wl^3}{8EI}$	**(8-34)**

الحالة (IV): كمرة بسيطة الارتكاز معرض لحمل مركز في منتصف البحر

انظر الشكل التالي:



في هـذه الحالـة حيـث أن الحمـل موضوع بتماثـل فـإن التـرخيم سيـصل إلـى الحـد الأقصى عند منتصف البحر والميل الأقصى سيكون عند الأطراف.

$$\theta_{max} = \frac{A}{EI}$$

ولكن، A = مساحة المثلث المظلل (الجزء (c) بالشكل السابق).

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{Wl}{4}\right) = \frac{Wl^2}{16}$$

إذن:

$\theta_{max} = \dfrac{Wl^2}{16EI}$	**(8-35)**

كما أن:

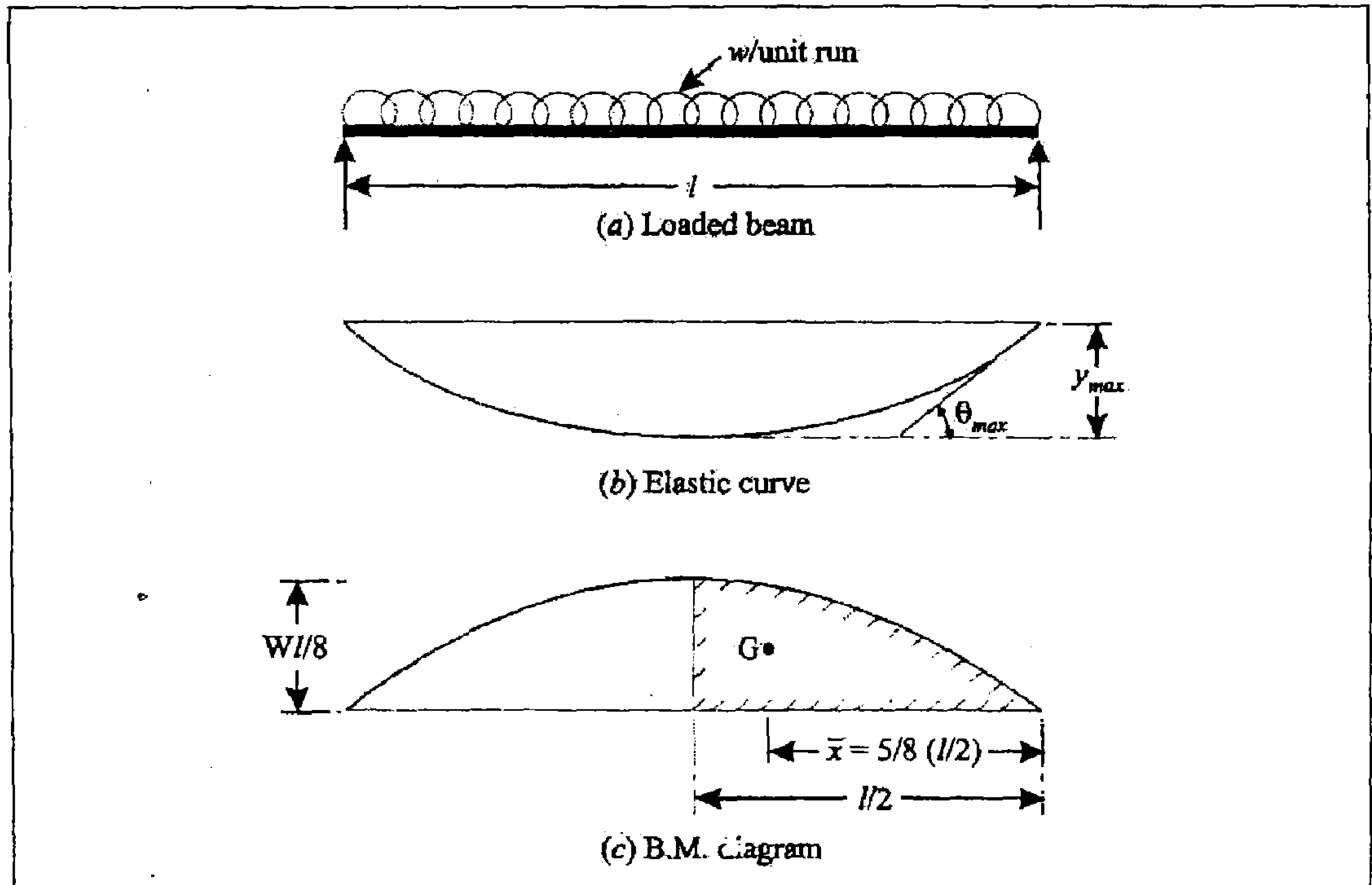
$$y_{max} = \frac{A\bar{x}}{EI}$$

وبما إن $\bar{x} = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right)$، إذن:

$$y_{max} = \frac{Wl^2}{16EI} \times \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Wl^3}{48EI}$$

الحالة (V): كمرة بسيطة الارتكاز معرضة لحمل موزع بانتظام

انظر الشكل التالي:



في هذه الحالة، سيكون أقصى ترخيم عند منتصف البحر وسيكون أقصى ميل عند الأطراف. والآن:

$$\theta_{max} = \frac{A}{EI}$$

ولكن (A) = مساحة الجزء المظلل (في الجزء (c) بالشكل السابق) ويتم حسابها كالآتي:

$$A = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{Wl}{8}\right) = \frac{Wl^2}{24} \quad (\text{where, } W = wl)$$

إذن:

$\theta_{max} = \dfrac{Wl^2}{24\,EI}$	**(8-37)**

كما أن:

$$y_{max} = \frac{A\,\bar{x}}{EI}$$

وبما إن $\bar{x} = \frac{5}{8}\left(\frac{l}{2}\right)$ ، إذن:

$$y_{max} = \frac{Wl^2}{24\,EI} \times \frac{5}{8}\left(\frac{l}{2}\right)$$

أو:

$y_{max} = \dfrac{5\,Wl^3}{384\,EI}$	**(8-38)**

٨-٩ طريقة الكمرة البديلة Conjugate Beam

- طريقة الكمرة البديلة **Conjugate Beam** (أو التناظر الحبلي **Funicular analogy**، أو طريقة الأوزان المرنة) تعتبر حالة خاصة من طريقة عزم المساحة.
- الطرق التي تشبه طريقة عزم المساحة، وطريقة Macaulay، التي سبق دراستها في هذا الفصل تعتبر مناسبة من أجل الحالات التي فيها تكون الكمرة ذات جساءة انثنائية منتظمة **uniform flexural rigidity**. أما الحالات التي فيها تكون الجساءة الانثنائية غير منتظمة فإن تلك الطرق تصبح متعبة وطريقة الكمرة البديلة تقدم وسيلة سهلة جدًا من أجل حل المسائل.
- عندما يتم تفاضل معادلة الترخيم بطريقة مناسبة، فإننا نحصل على العلاقات التالية:

$EI.y = Deflection$	(i)
$EI \cdot \frac{dy}{dx} = Slope$	(ii)
$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Moment = M$	(iii)
$EI \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = Shear = S = \frac{dM}{dx}$	(iv)
$EI \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = Load = \frac{dS}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$	(v)

مما سبق نجد أنه يوجد تشابه في العلاقة بين الحمل، والقص، والعزم (المعادلات (v) و(iv) و(iii)) والعلاقة بين العزم، والميل، والترخيم (المعادلات (iii) و(ii) و(i)). هذا يعطي فكرة عن طريقة يمكن من خلالها حساب كل من الميل والترخيم وذلك عن طريق استخدام الطرق المعتادة لحساب القص وعزوم الانحناء. في هذه الطريقة، يتم تحميل الكمرة (التي تسمى الكمرة البديلة **conjugate beam**) ليس بالأحمال الفعلية، ولكن بالوزن المرن (**M/(E*I)**) المناظر للحمل الفعلي.

نظرية الكمرة البديلة (I)

"الميل عند أي مقطع بالكمرة المحملة بالنسبة للمحور الأصلي للكمرة، يساوي القص في الكمرة البديلة عند المقطع المناظر".

نحن نعلم أن:

$$\text{load} = w = \frac{M}{EI}$$

إذن:

$$\text{Shear} = S_x = \int_0^x w \cdot dx = \int_0^x \frac{M}{EI} dx$$

ولكن:

$$\int_0^x \frac{M}{EI} dx = \int_0^x \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = slope$$

نظرية الكمرة البديلة (II)

"الترخيم عند أي مقطع بكمرة محملة، بالنسبة للموضع الأصلي، يساوي عزم الانحناء عند المقطع المناظر بالكمرة البديلة".

نحن نعلم أن القص عبارة عن:

$$S_x = \int_0^x \frac{M}{EI}\, dx$$

إذن، العزم يكون:

$$M_x = \int_0^x S_x \cdot dx = \int_0^x \int_0^x \frac{M}{EI}\, dx$$

ولكن:

$$\int_0^x \int_0^x \frac{M}{EI}\, dx = \int_0^x \int_0^x \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x \frac{dy}{dx} = y = deflection \qquad ...Proved$$

من المفيد ملاحظة النقاط التالية بالنسبة لطريقة الكمرة البديلة:

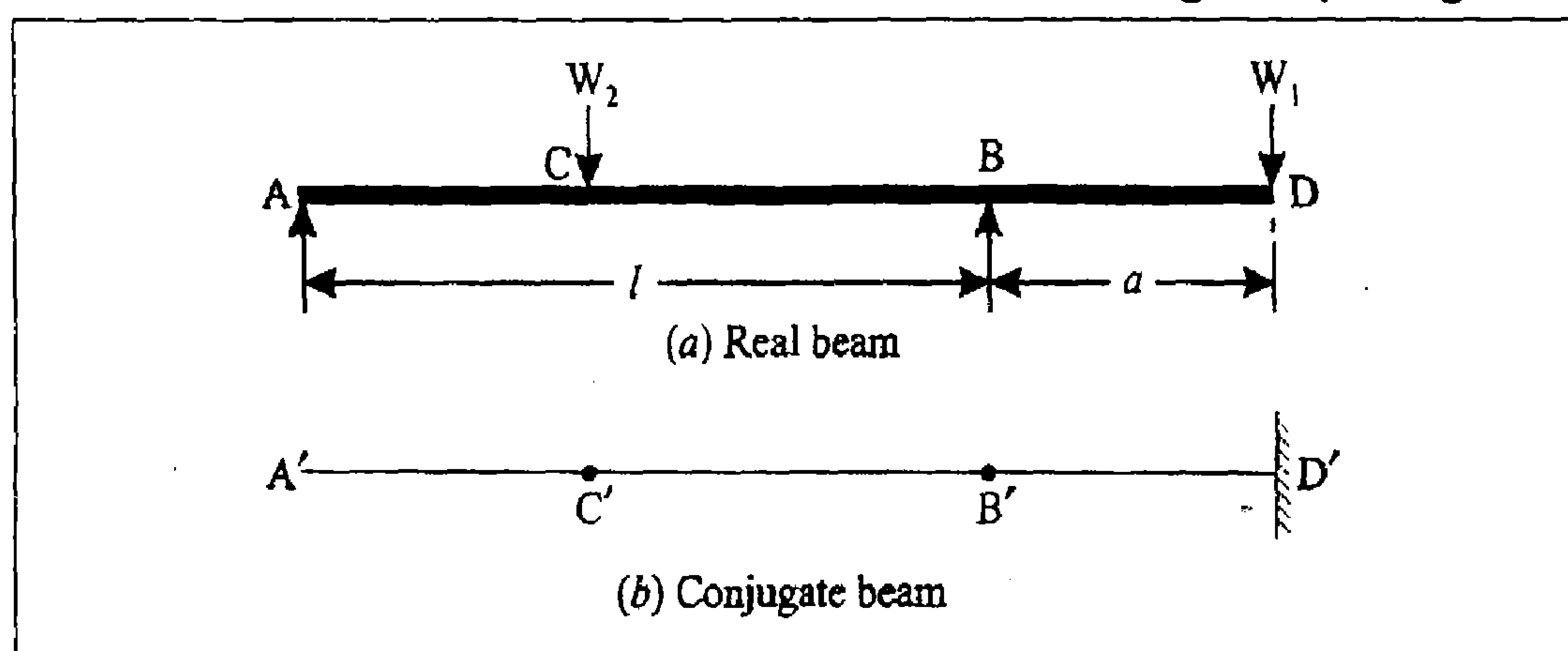
(i) هذه الطريقة يمكن استخدامها مباشرة من أجل الكمرات البسيطة الارتكاز فقط.

(ii) في هذه الطريقة بالنسبة للكابوليات والكمرات المثبتة من الطرفين، يُحتاج لأن يتم تطبيق قيود اصطناعية على الكمرة البديلة بحيث نجعلها مرتكزة بطريقة متناسقة مع قيود الكمرة الحقيقية.

استخدام طريقة الكمرة البديلة مع الكمرات ذات الأطناب

(أ) كمرات ممتدة من طرف واحد

في الشكل التالي نشاهد كمرة ذات أطناب overhanging beam (ACBD) مع كونها تمتد من الجانب الأيمن فقط.



(a) Real beam

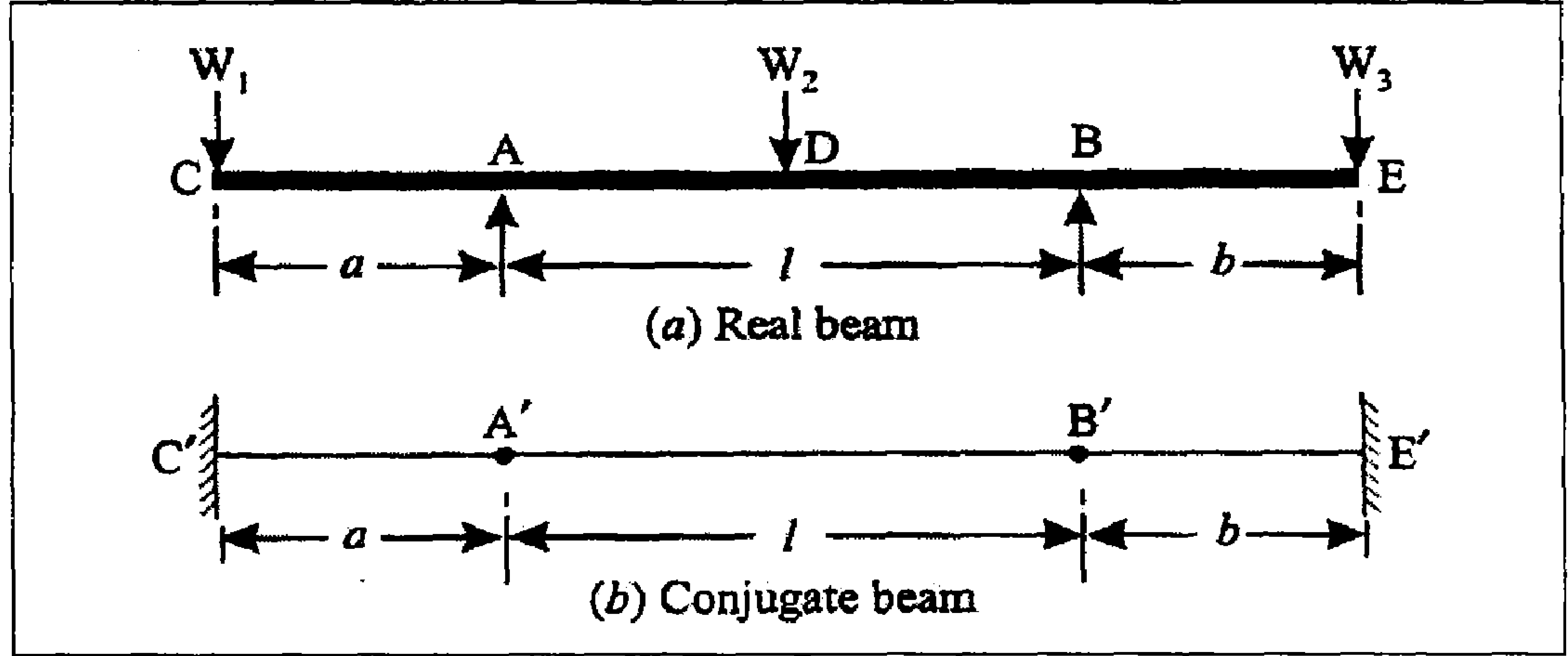
(b) Conjugate beam

الترخيم عند A وB سيكون صفرًا بغض النظر عن طبيعة التحميل الواقع على الكمرة. الكمرة البديلة، المناظرة للكمرة الحقيقية ينبغي اختيارها بحيث يكون عزم الانحناء عند A وB

صفرًا. الكمرة البديلة A'C'B'D' مثبتة عند D' ولها مفصل عند B' مما يؤدي إلى تحقيق المتطلبات (الجزء (b) بالشكل السابق). الطرف الحر D بالكمرة الحقيقية سيحدث له ميل وترخيم أيضًا، ومن ثم، النقطة المناظرة D' تكون مثبتة بحيث يكون لها قوة قص وعزم انحناء.

(ب) كمرات ذات أطناب من الاتجاهين

في الشكل التالي نشاهد كمرة CADBE مع أطناب على كلا الجانبين:



(*a*) Real beam

(*b*) Conjugate beam

هذه الكمرة سيحدث لها ميل وترخيم عند C وE ولكن لن يحدث لها ترخيم عند A وB. الكمرة البديلة ينبغي أن تكون بهيئة تجعلها تحقق الشروط التالية:

(i) ينبغي أن يوجد بها قوة قص وعزم انحناء عند C وE.

(ii) لا ينبغي أن يكون بها عزم انحناء عند A وB.

(iii) ينبغي أن يكون بها قوة قص عند A وB.

كل هذه الشروط يتم تحقيقها عن طريق كمرة بديلة C'A'B'E' وهي مثبتة عند الطرفين C' وE' (بحيث يكون هناك قوة قص وعزم انحناء عند كلا الطرفين المثبتين) ولها مفصلات عند A' وB' (بحيث لا يكون هناك عزم انحناء عند هاتين النقطتين) كما هو موضح في الجزء (b) بالشكل السابق.

٨-١٠ الكابوليات والكمرات المزودة بدعامات إضافية Propped Cantilevers and Beams

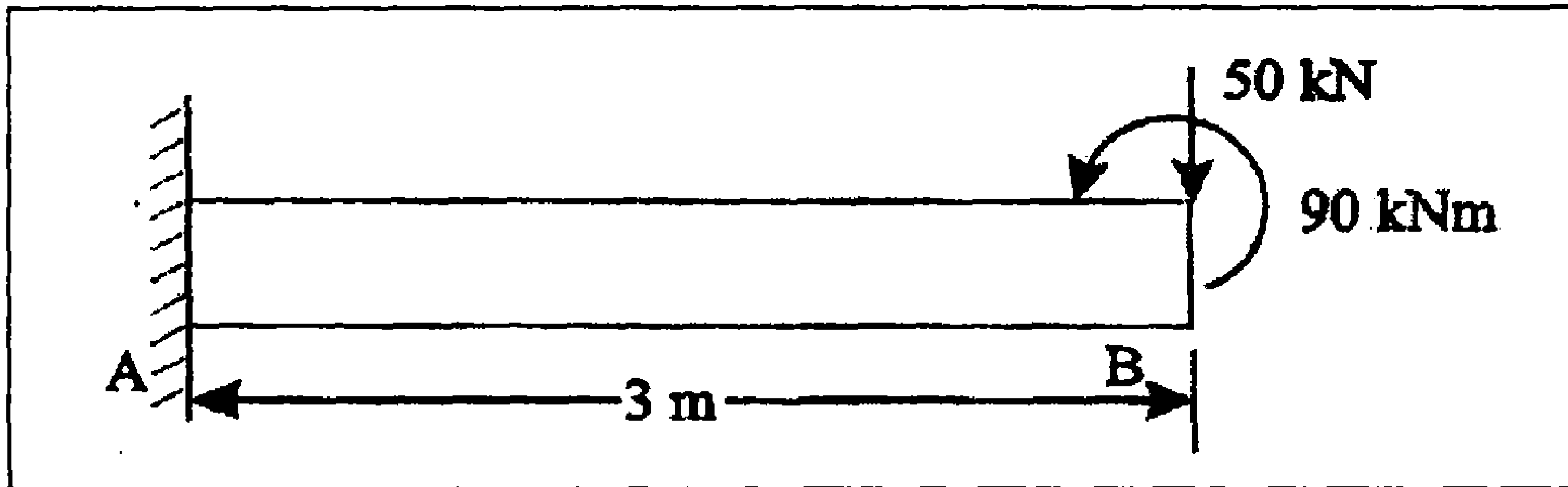
في أي كابولي أو في أي كمرة، لكي يتم تفادي حدوث ترخيم زائد أو من أجل التقليل من قيم عزوم الانحناء، يتحتم وضع بعض الدعامات بخلاف الموجودة أصلاً؛ هذه الدعامة الإضافية تسمي Prop. تعمل الدعامة الإضافية على جعل المنشأ غير معرف استاتيكيًا

أي أن الكمرة أو الكابولي الذي تم تدعيمه بدعامة إضافية لا يمكن تحليله من خلال المعادلات الاستاتيكية البسيطة؛ وبالتالي لتحليل المنشأ فإنه يتم الاستعانة بمعادلات إضافية تأتي من الاعتبارات الخاصة بالميل أو الترخيم.

٨-١١ الأمثلة العملية

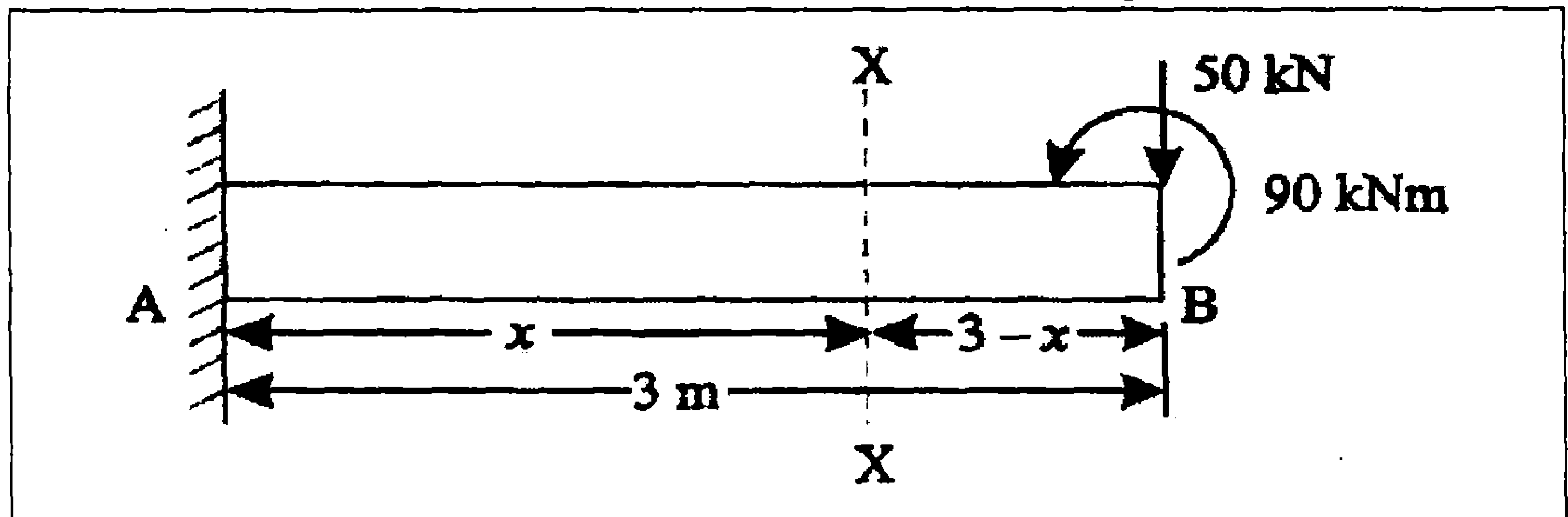
المثال رقم (١)

حدد الميل والترخيم عند الطرف B بالكمرة الكابولية الموشورية عندما تكون محملة كما هو موضح في الشكل التالي، مع العلم بأن الجساءة الانثنائية للكمرة (EI) عبارة عن ١٠^(٤) كيلونيوتن.م٢.



الحل

انظر الشكل التالي:



لندرس سويًا مقطع XX على مسافة x من الطرف B.

عزم الإنحناء عندهXX:

$$M_x = 90 - 50\,(3 - x)$$

إذن:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = 90 - 150 + 50x$$

بالتكامل، نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = 50 \times \frac{x^2}{2} - 60x + C_1$$

(حيث أن C_1 عبارة عن ثابت التكامل).

وعندما (x=0) و(dx/dy=0) إذن ($C_1=0$).

ومن ثم، تصبح معادلة الميل بالصورة التالية:

$EI\frac{dy}{dx} = \left(50 \times \frac{x^2}{2} - 60x\right)$	(i)

إذن، الميل عند B (عند x=3 m) يكون:

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left(50 \times \frac{3^2}{2} - 60 \times 3\right) = \frac{1}{10^4} \times 45 = \mathbf{0.0045\ rad.}\quad \mathbf{(Ans.)}$$

التر خيم عند B (y_B):

بتكامل المعادلة رقم (i)، نحصل على الآتي:

$$EIy = \left(50 \times \frac{x^3}{6} - 60 \times \frac{x^2}{2}\right) + C_2$$

(حيث أن (C_2) ثابت التكامل) وعندما (x=0) و(y=0) إذن ($C_2=0$) ومن ثم:

$$EIy = 50 \times \frac{x^3}{6} - 60 \times \frac{x^2}{2}$$

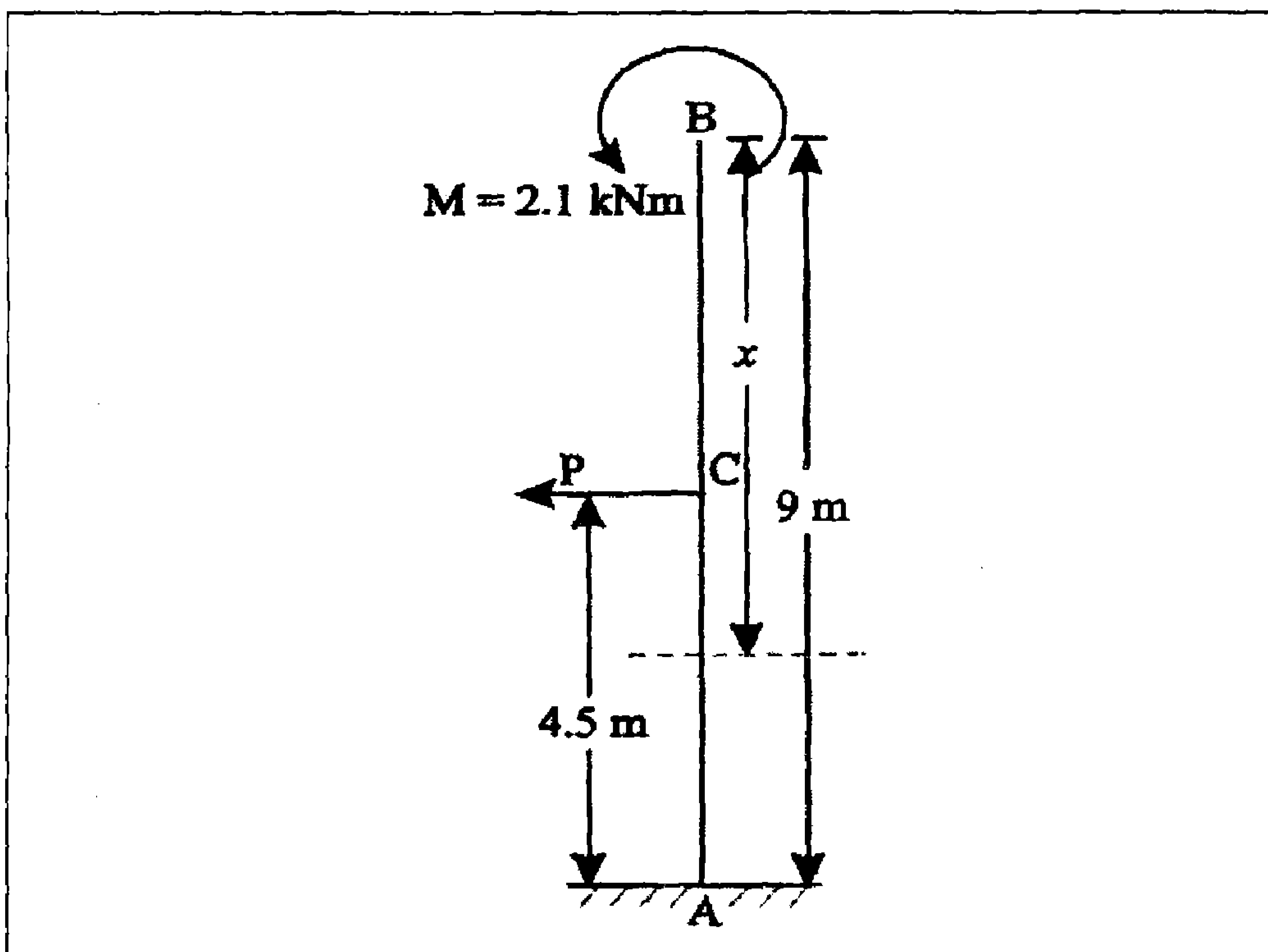
إذن:

$$y_B = (\text{at } x = 3m) = \frac{1}{EI}\left(50 \times \frac{3^3}{6} - 60 \times \frac{3^2}{2}\right)$$

(الإشارة السالبة تدل على أن الترخيم لأسفل).

المثال رقم (٢)

عمود رأسي ارتفاعه ٩ متر مثبت عند القاعدة وتم تطبيق عزم قدره ٢.١ كيلونيوتن.متر في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة عند قمة العمود. تم تطبيق قوة أفقية **P** على العمود على ارتفاع قدره ٤.٥ متر فوق القاعدة لإعطاء عزم في عكس اتجاه عقارب الساعة.



حدد قمة P بحيث تكون الترخيمات الأفقية عند قمة العمود وعند نقطة تطبيق الحمل P متساوية:

(i) عندما تكون الترخيمات على نفس الجانب.

(ii) عندما تكون الترخيمات على جانبي الخط الرأسي المار عبر قاعدة العمود.

الحل

باختيار نقطة الأصل عند B وباستخدام طريقة Macaulay يصبح لدينا الآتي:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M - P(x - 4.5)$$

عندما تكون x أقل من ٤.٥ متر حينئذ يمكن إهمال تأثير الجزء الموجود بين القوسين.

وبالتكامل بالنسبة لـ x، فإننا نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = Mx - \frac{P}{2}(x - 4.5)^2 + C_1$$

وعندما تكون x=9 m وتكون dy/dx=0، إذن:

$$0 = 9M - \frac{P}{2}(9 - 4.5)^2 + C_1$$

إذن:

$$C_1 = 10.125\ P - 9M$$

وإذن:

$$EI\ \frac{dy}{dx} = Mx - \frac{P}{2}(x - 4.5)^2 + 10.125P - 9M$$

وبالتكامل مرة أخرى، نحصل على الآتي:

$$EIy = \frac{Mx^2}{x} = \frac{P}{6}\ (x - 4.5)^3 + (10.125P - 9M)\,x + C_2$$

وعندما تكون x = ٩ متر وy = صفر، إذن:

$$0 = \frac{M}{2} \times 81 - \frac{P}{6}\ (9 - 4.5)^3 + (10.125P - 9M) \times 9 + C_2$$

$$0 = 40.5M - 15.19\ P + 91.12\ P - 81\ M + C_2$$

إذن:

$$C_2 = 40.5\ M - 75.93\ P$$

ومن ثم، معادلة الميل تصبح بالصورة التالية:

$$EIy = \frac{Mx^2}{2} - \frac{P}{6}(x - 4.5)^3 + (10.125\,P - 9M)\,x + (40.5\,M - 75.93\,P)$$

وبالتالي، عند x = صفر، وبإهمال الجزء الموجود داخل الأقواس، نحصل على الآتي:

$$EIy_B = 40.5\ M - 75.93\ P$$

$$EIy_B = 40.5 \times 2.1 - 75.93\ P = 85.05 - 75.93\ P$$

وعند x = ٤.٥ متر:

$$EIy_C = \frac{M \times (4.5)^2}{2} - \frac{P}{6}\ (45.45)^3 + (10.125P - 9M) \times 4.5 + (40.5M - 75.93\ P)$$

$$EIy_C = 10.125\ M - 0 + 45.56\ P - 40.5\ M + 40.5\ M - 75.93\ P$$

$$EIy_C = 10.125\ M - 30.37\ P = 10.125 \times 2.1 - 30.37\ P = 21.26 - 30.37\,P$$

(i) عندما تكون الترخيمات على نفس الجانب:

$$y_B = y_C$$

$$85.05 - 75.93\ P = 21.26 - 30.37\ P$$

إذن:

$$P = \frac{(85.05 - 21.26)}{(75.93 - 30.37)} = 1.4\ \text{kN} \quad \text{(Ans.)}$$

(ii) عندما تكون الترخيمات على جانبين الخط الرأسي:

$$y_B = -y_C$$

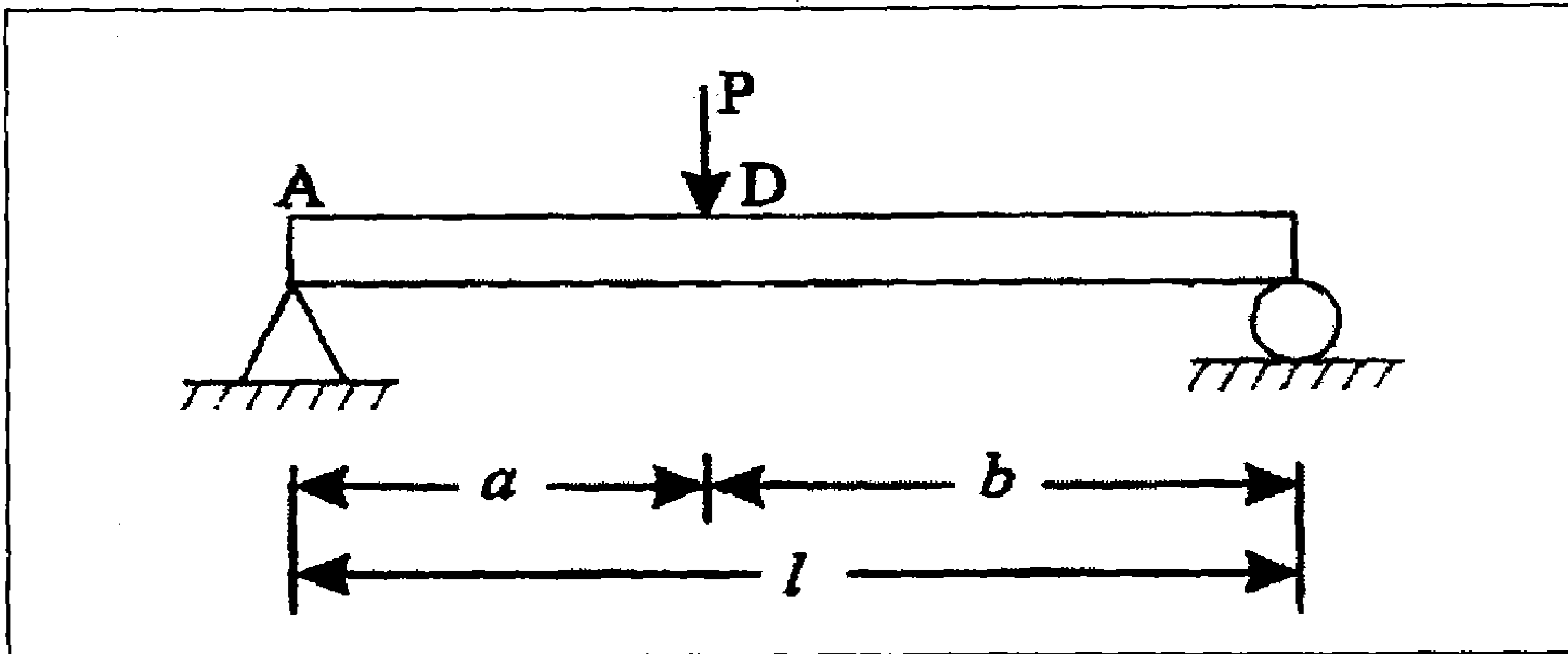
$$85.05 - 75.93\,P = (21.26 - 30.37\,P) = -21.26 + 30.37\,P$$

إذن:

$$P = \frac{(85.05 + 21.26)}{(75.93 + 30.37)} = 1.0\ \text{kN} \quad \text{(Ans.)}$$

المثال رقم (٣)

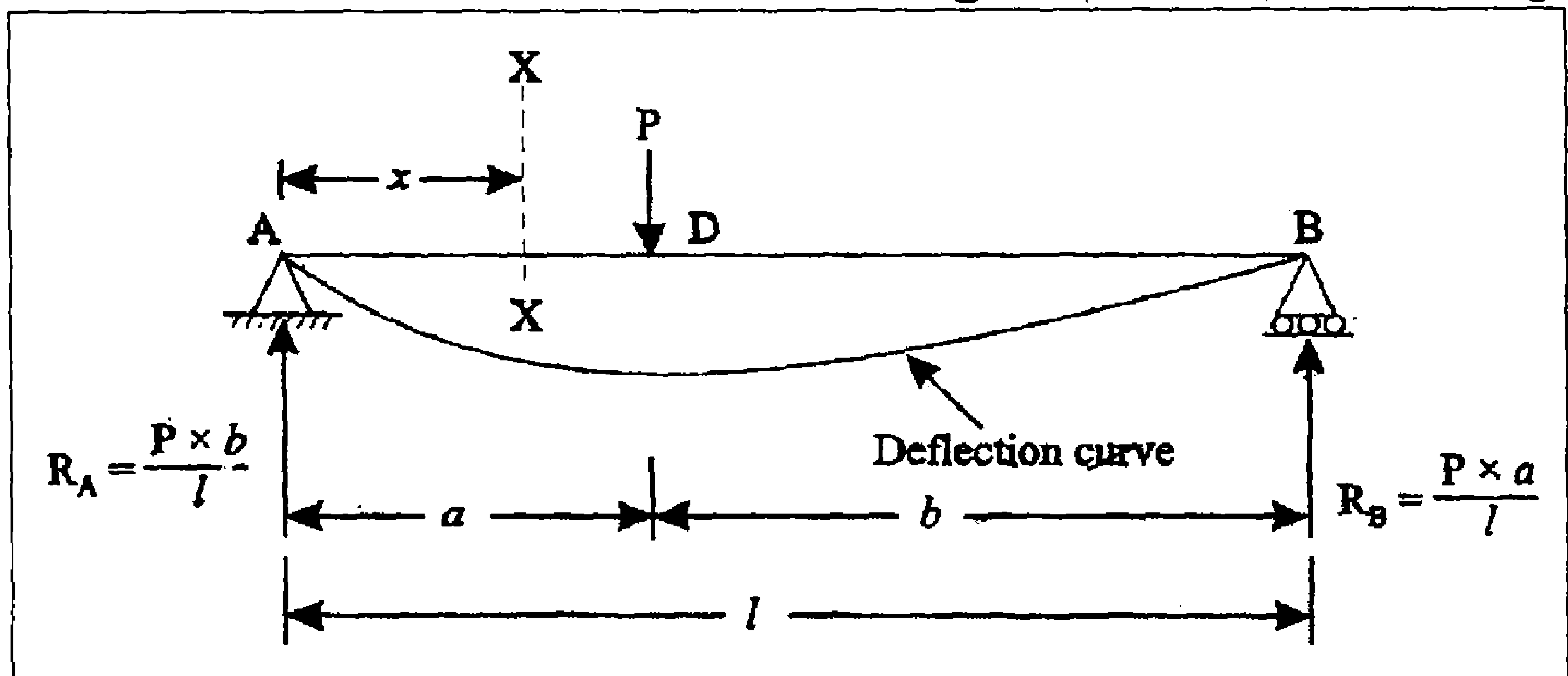
كمرة بسيطة تحمل حمل مركز في نقطة ومتجه لأسفل قدره P عند مسافة من الدعامة اليسرى كما هو موضح في الشكل التالي:



الجساءة الانثنائية EI ثابتة. أوجد معادلة الترخيم بطريقة التكامل المتتابع.

الحل

في الشكل السابق نشاهد الترتيب المعطي، وفي الشكل التالي نشاهد نفس الترتيب مع منحنى الترخيم؛ وأيضًا تم توضيح ردود الأفعال عند الطرفين A وB.



من أجل تحديد (R_A) نطبق $\Sigma M_B = 0$.

$$R_A \times l = P \times b$$

إذن:

$$R_A = \frac{P \times b}{l}(\uparrow)$$

وبالمثل:

$$R_B = \frac{P \times a}{l}(\uparrow)$$

عندما ندرس الشكل السابق نرى بوضوح أن هناك قطعتين AD وDB للكمرة AB. ومن ثم، علينا أن نأخذ في الاعتبار معادلتين مختلفتين، تصفان عزم الانحناء في الكمرة.

المعادلة الأولى تكون صالحة لمجال الحمل P، والأخرى تُحمل إلى يمين هذا الحمل. التكامل لكل معادلة يؤدي إلى وجود ثابتي تكامل ينبغي تحديدهما.

لندرس مقطع تصوري XX على مسافة x من A في القطعة AD:

عزم الانحناء عند المقطع XX:

$$M_x = \frac{P \times b}{l}x \quad \text{for} \quad 0 < x < a$$

وبالتالي تصبح المعادلة التفاضلية للكمرة المنثنية بالصورة التالية:

$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P \times b}{l}x \text{ for } 0 < x < a$	(i)

والتكامل الأول لها يعطي الآتي:

$EI\,\frac{dy}{dx} = \frac{P \times b}{l} \times \frac{x^2}{2} + C_1$	(ii)

حيث إن:

المعنى والاستخدام	المعامل
ثابت التكامل.	C_1

والآن، لا توجد أي معلومات رقمية عن الميل dy/dx عند أي نقطة في هذه المنطقة. وحيث أن الحمل غير مطبق عند مركز الكمرة لذلك ليس هناك سبب لتصديق أن الميل يساوي صفر عند x = l/2.

ولكن، بالنسبة لميل الكمرة تحت نقطة تطبيق القوة P، نستطيع من المعادلة رقم (ii) كتابة المعادلة التالية:

$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2l} + C_1$	(iii)

التكامل التالي للمعادلة رقم (ii)، يعطي المعادلة التالية:

$EIy = \frac{Pb}{2l} \times \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$	**(iv)**

حيث إن:

المعامل	**المعنى والاستخدام**
C_2	ثابت آخر للتكامل.

عند الدعامة اليسرى عندما تكون x = صفر وy = صفر. وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة رقم (iv)، نجد أن (C_2) = صفر.

من الممكن أيضًا ملاحظة أنه لا يمكن استخدام الشرط (y=0) عند (x=l) في المعادلة رقم (iv) حيث أن المعادلة رقم (i) غير صالحة في هذه المنطقة.

من أجل الترخيم تحت نقطة تطبيق القوة P، لدينا المعادلة التالية:

$EIy_{(x=a)} = \frac{Pba^3}{6l} + C_1 a$	**(v)**

في المنطقة على يمين القوة P، لنأخذ مقطع تصوري آخر XX على مسافة x من الطرف A.

عزم الإنحناء عند المقطع XX:

$$XX = M_x = \frac{Pb}{l}x - P(x-a) \text{ for } a<x<l.$$

ومن ثم:

$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pb}{l}x - P(x-a) \quad \text{for} \quad a<x<l$	**(vi)**

التكامل الأول لهذه المعادلة يعطي العلاقة التالية:

$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{l} \times \frac{x^2}{2} - P\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right] + C_3$	**(vii)**

بالرغم من أنه لا يمكن قول شيء محدد عن الميل في هذا الجزء من الكمرة، إلا إنه بالنسبة للميل تحت نقطة تطبيق القوة P يكون لدينا العلاقة التالية:

$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{Pba^2}{2l} + C_3$	**(viii)**

تحت الحمل المركز P، ينبغي أن يكون الميل كما هو معطى بواسطة المعادلة رقم (iii) مساويًا للميل المعطى بواسطة المعادلة رقم (viii).

وبالتالي، الجوانب اليمنى لهاتين المعادلتين ينبغي أن تكون متساوية. ومن ثم، يصبح لدينا العلاقة التالية:

$$\frac{Pba^2}{2l} + C_1 = \frac{Pba^2}{2l} + C_3$$

إذن $(C_1) = (C_3)$.

يمكن الآن تكامل المعادلة رقم (vii) لنحصل على العلاقة التالية:

$EIy = \frac{Pb}{2l} \times \frac{x^3}{3} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4$	(ix)

من أجل الترخيم تحت الحمل المركز P نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$EIy_{(x=a)} = \frac{Pba^3}{6l} + C_3a + C_4$	(x)

الترخيم عند (x=0) المعطى بواسطة المعادلة رقم (v) ينبغي أن يكون مساويًا للترخيم المعطى بواسطة المعادلة رقم (x).

ومن ثم، الجانب الأيمن بتلك المعادلتين متساويان. وعليه، نحن لدينا العلاقة التالية:

$$\frac{Pba^3}{6l} + C_1a = \frac{Pba^3}{6l} + C_3a + C_4$$

وحيث أن $(C_1=C_3)$، إذن لدينا $(C4=0)$.

الشرط الذي هو (y=0) عندما تكون (x=l) يمكن التعويض به في المعادلة رقم (ix) مما يؤدي إلى الحصول على الآتي:

$$0 = \frac{Pbl^3}{6l} - \frac{Pb^3}{6} + C_3l$$

إذن:

$$C_3 = \frac{Pb}{6l}(b^2 - l^2)$$

بهذه الطريقة، يتم تحديد كل ثوابت التكامل الأربعة.

تلك القيم يمكن التعويض بها الآن في المعادلتين رقم (iv) ورقم (ix) لنحصل على معادلات الترخيم المطلوبة:

$$EIy = \frac{Pb}{2l} \times \frac{x^3}{3} + \frac{Pb}{6l}(b^2 - l^2)x + 0$$

أو:

$EIy = \frac{Pb}{6l}\left[x^3 - (l^2 - b^2)x\right]$ for $0 < x < l$	(1)

$$EIy = \frac{Pb}{2l} \times \frac{x^3}{3} - \frac{P(x-a)^3}{6} + \frac{Pb}{6l}(b^2 - l^2)x + 0$$

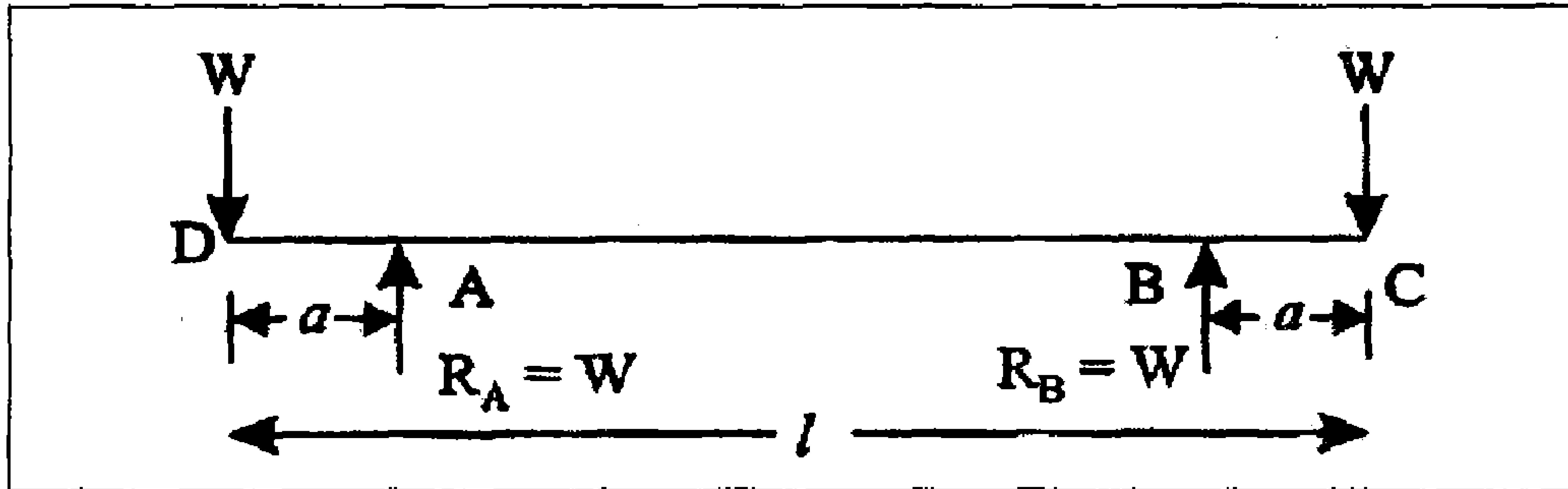
أو:

$EIy = \frac{Pb}{6l}\left[x^3 - \frac{l}{b}(x-a)^3 - (l^2 - b^2)x\right]$ for $a<x<1$	(2)

هاتان المعادلتان رقم (١) ورقم (٢) عبارة عن منحنى الترخيم المطلوب للكمرة المنثنية. ولاحظ أن كل معادلة تكون صحيحة في المنطقة المشار إليها فقط.

المثال رقم (٤)

أنبوبة قطرها الخارجي ٤٠ مم وسمك جدارها ٥ مم وطولها ١.٥ متر وهي مرتكزة ارتكازًا بسيطًا عند طرفيها الذي بينهما ١٢٥ مم وهي تحمل حملاً مركزًا في نقطة قدره ١ كيلونيوتن عند كل طرف، كما هو موضح في الشكل التالي:



المطلوب

(i) بإهمال وزن الأنبوبة، ارسم كل من ديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء.

(ii) احسب كل من نصف قطر الانحناء والترخيم عند منتصف البحر.

خذ معامل مرونة المادة عبارة عن ٢٠٨ جيجانيوتن/م٢.

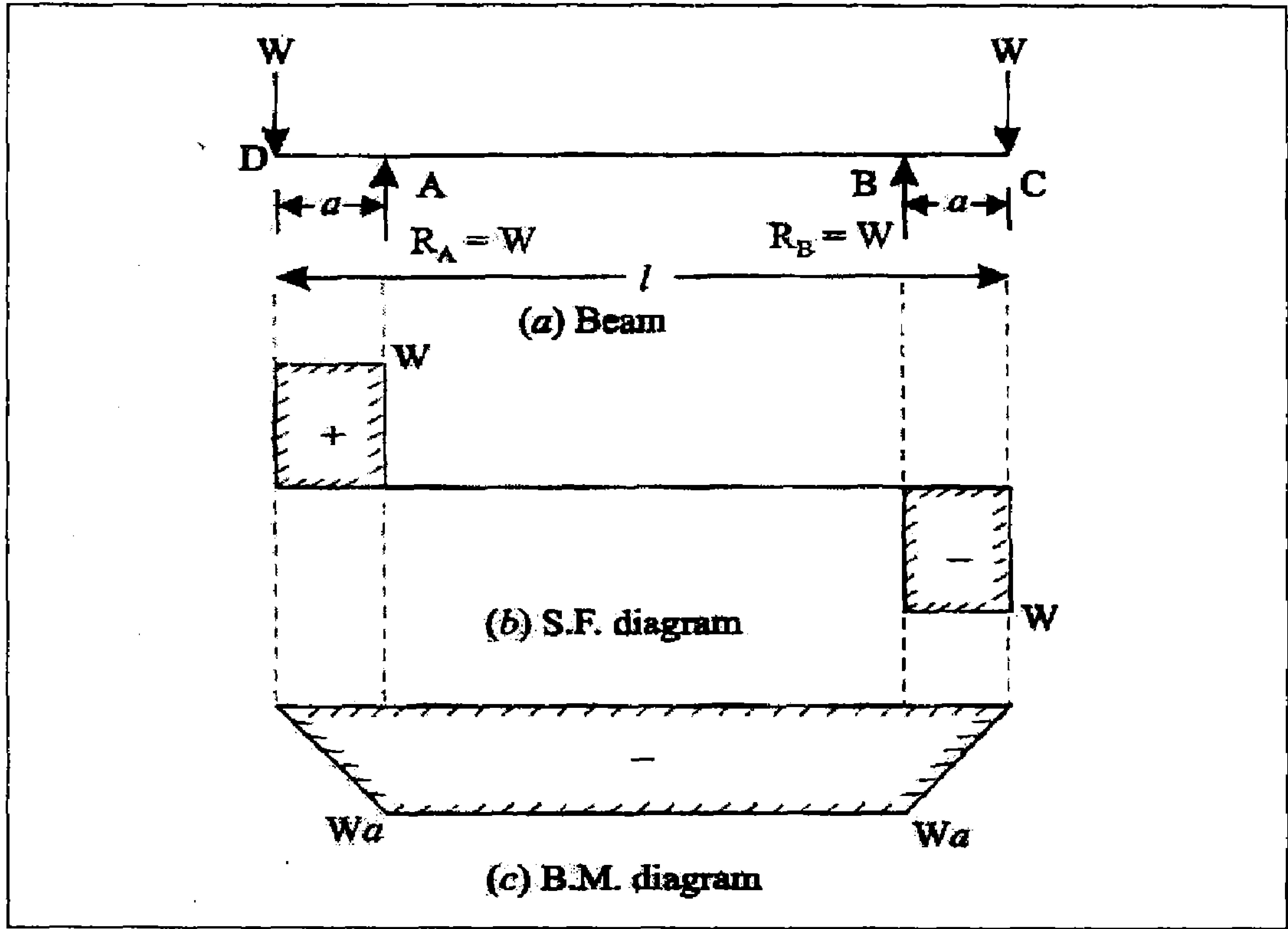
الحل

في هذا المثال لدينا الآتي:

d_0 = 40 mm = 0.04 m
d_i = d0 - 2*t = 40 - 2*5 = 30 mm = 0.03 m
W = 1 kN
E = 208 GN/m^2 = 208 * 10^9 N/m^2
l = 1.5 m
a = 125 mm = 0.125 m

<u>(i) ديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء:</u>

في الشكل التالي نشاهد كل من ديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء:



(a) Beam

(b) S.F. diagram

(c) B.M. diagram

(ii) نصف قطر الانحناء:

بناءً على معادلة الإنثناء:

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$$

أو:

$R = \frac{EI}{M}$	(i)

هنا:

$$M = W \times a = 1 \times 10^3 \times 0.125 = 125 \text{ Nm}$$

$$I = \frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_i^4)$$

$$I = \frac{\pi}{64}\left[(0.04)^4 - (0.03)^4\right] = 8.59 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

بالتعويض بالقيم في المعادلة رقم (i)،نحصل على الآتي:

$$R = \frac{208 \times 10^8 \times 8.59 \times 10^{-8}}{125} = \mathbf{142.9 \text{ m (Ans.)}}$$

الترخيم عند منتصف البحر:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = -Wx + W(x-a) = -Wx + Wx - Wa = -Wa$$

وبالتكامل نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = -Wax + C_1$$

وعند (x=l/2) و(dy/dx=0)، إذن:

$$0 = -Wa\frac{l}{2} + C_1 \quad \text{or} \quad C_1 = \frac{Wal}{2}$$

إذن:

$$EI\frac{dy}{dx} = -Wax + \frac{Wal}{2}$$

وبالتكامل مرة أخرى، نحصل على الآتي:

$$EIy = -Wa\frac{x^2}{2} + \frac{Wal}{2}x + C_2$$

عندما x=a وy=0، إذن:

$$0 = -\frac{Wa^3}{2} + \frac{Wa^2 l}{2} + C_2$$

أو:

$$C_2 = \frac{Wa^3}{2} - \frac{Wa^2 l}{2}$$

إذن:

$$EIy = -\frac{Wax^2}{2} + \frac{Walx}{2} + \left[\frac{Wa^3}{2} - \frac{Wa^2 l}{2}\right]$$

أو:

$$y = \frac{Wa}{EI}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{lx}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{al}{2}\right]$$

أي أنه عند منتصف البحر:

$x = l/2$

$$y = \frac{Wa}{EI}\left[-\frac{(l/2)^2}{2} + \frac{l\times(l/2)}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{al}{2}\right]$$

$$y = \frac{Wa}{EI}\left[-\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{al}{2}\right] = \frac{Wa}{EI}\left[\frac{l^2}{8} + \frac{a^2}{2} - \frac{al}{2}\right]$$

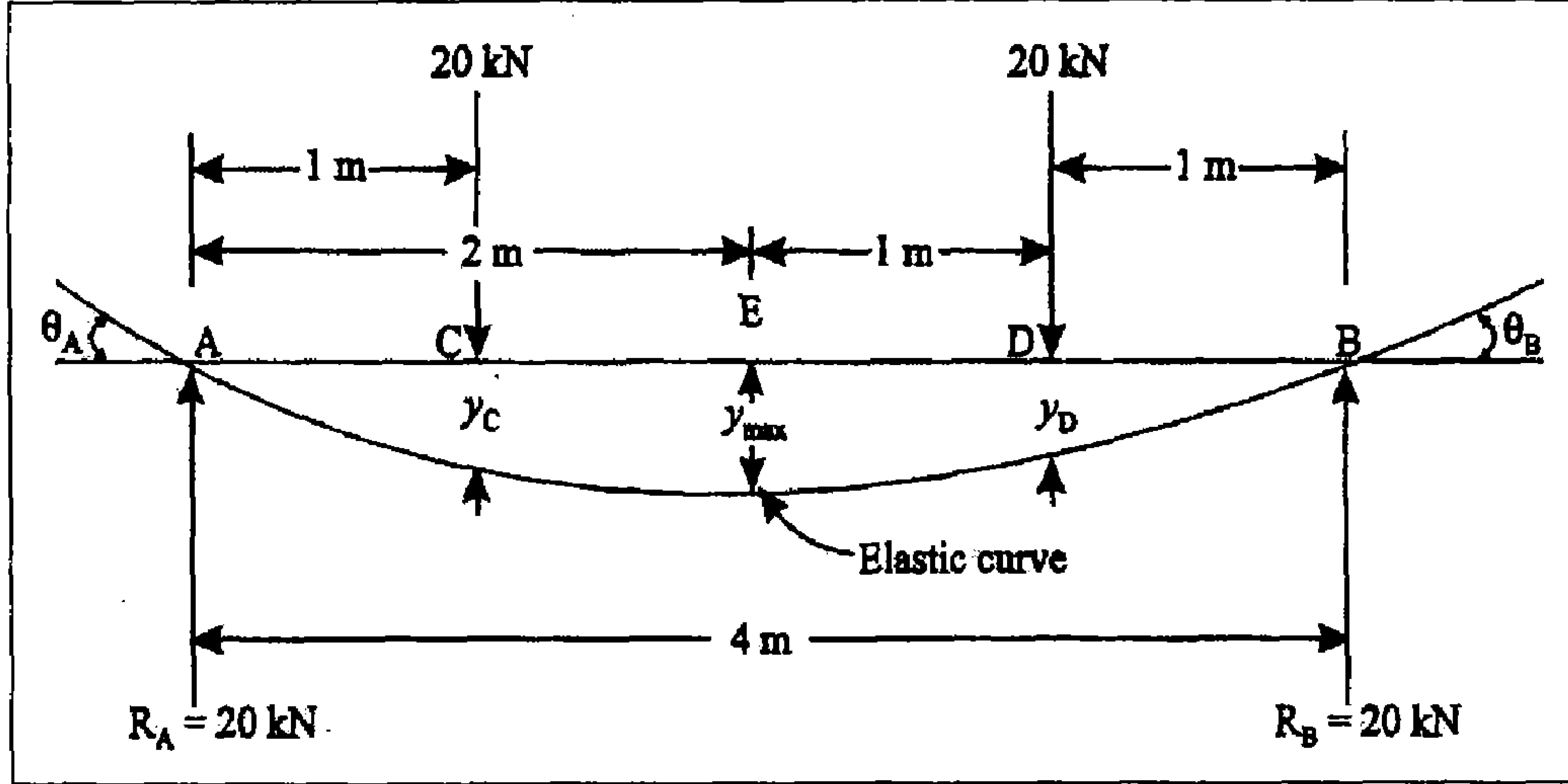
$$y = \frac{1\times1000\times0.125}{208\times10^9\times8.59\times10^{-8}}\left[\frac{1.5^2}{8} + \frac{0.125^2}{2} - \frac{0.125\times1.5}{2}\right]$$

$$y = 0.006996(0.28125 + 0.007812 - 0.09375) = 0.001366 \text{ m} = 1.366 \text{ mm}$$

ومن ثم، الترخيم عند منتصف البحر = ١.٣٦٦ مم (لأعلى).

المثال رقم (٥)

كمرة طولها ٤ متر وحرة الارتكاز عند طرفيها. هذه الكمرة تحمل حملين قدرهما ٢٠ كيلونيوتن مركزين في نقطتين تبعدان ١ متر من الأطراف كما هو موضح في الشكل التالي:



احسب أقصى ميل والترخيم للكمرة وأيضًا الميل والترخيم تحت كل حمل. خذ EI = ١٣٠٠٠ كيلونيوتن/م٢.

الحل

ارجع إلى الشكل الموضح الخاص بهذا المثال.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
R_A	رد الفعل عند الدعامة اليسرى.
R_B	رد الفعل عند الدعامة اليمنى.

حيث أن الأحمال موضوعة بالتماثل على الكمرة، إذن:

$$R_A = R_B = \frac{20+20}{2} = 20 \text{ kN } (\uparrow)$$

في هذا المثال سوف نطبق طريقة Macaulay.

لندرس سويًا مقطع تخيلي XX على مسافة x من A في الجزء DB.

$$M_x = EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = 20x| - 20(x-1) - 20(x-3)$$

بتكامل هذا التعبير الرياضي، يصبح لدينا:

$$EI\,\frac{dy}{dx} = 20\times\frac{x^2}{2} + C_1\Big| -\frac{20}{2}(x-1)^2 \Big| -\frac{20}{2}(x-3)^2$$

$EI\,\frac{dy}{dx} = 10x^2 + C_1\Big| -10(x-1)^2 - 10(x-3)^2$	(i)

وبالتكامل مرة أخرى، نحصل على الآتي:

$EIy = \frac{10}{3}x^3 + C_1x + C_2 - \frac{10}{3}(x-1)^3 - \frac{10}{3}(x-3)^3$	(ii)

عندما (x=0) و(y=0)، إذن ($C_2=0$).

عندما (x=4m) و(y=0)، إذن من المعادلة رقم (ii) نحصل على الآتي:

$$0 = \frac{10}{3}\times 4^3 + C_1\times 4 - \frac{10}{3}(4-1)^3 - \frac{10}{3}(4-3)^3$$

$$0 = \frac{640}{3} + 4C_1 - 90 - \frac{10}{3}$$

إذن:

$$C_1 = \left(90 + \frac{10}{3} - \frac{640}{3}\right)\Big/4 = -30$$

وبالتعويض عن الثابت (C_1) والثابت (C_2)، تصبح كل من معادلة الميل ومعادلة الترخيم بالصورة التالية:

معادلة الميل:

$$EI\frac{dy}{dx} = 10x^2 - 30 - 10(x-1)^2 - 10(x-3)^2$$

معادلة الترخيم:

$$EIy = \frac{10}{3}x^3 - 30x - \frac{10}{3}(x-1)^3 - \frac{10}{3}(x-3)^3$$

<u>الميل الأقصى:</u>

أقصى ميل سوف يحدث عند الأطراف الساندة A, B. ولنأخذ في الاعتبار معادلة الميل التالية:

$$EI\frac{dy}{dx} = 10\times 0 - 30 = -30$$

إذن:

$$\theta_A\left(=\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{30}{EI} = -\frac{30}{13000} = \mathbf{-0.002308\ rad.\ (Ans.)}$$

وبالمثل، الميل عند:

$\theta_B = +0.002308$ **rad. (Ans.)**

أقصى ترخيم (y_{max}):

من أجل الحصول على أقصى ترخيم، ينبغي علينا أولاً تحديد الموضع الذي عنده يكون الميل صفرًا. وبأخذ معادلة الميل في الاعتبار يكون لدينا الآتي:

$$0 = 10x^2 - 30 - 10\,(x-1)^2$$

(حيث أن الجزء ($10*(x-3)^2$) سيكون سالب بالنسبة للقطعة CD فمن ثم سيتم تجاهله). أو:

$$10x^2 - 30 - 10(x^2 - 2x + 1)$$
$$10x^2 - 30 - 10x^2 + 20x - 10 = 0$$
$$20x = 40 \text{ or } x = 2\text{m from } A.$$

والآن، من أجل تحديد أقصى ترخيم، نضع ($x=2$) في معادلة الترخيم لنحصل على الآتي:

$$EIy_{max} = \frac{10}{3} \times 2^3 - 30 \times 2 - \frac{10}{3}(2-1)^3 = 26.67 - 60 - 3.33 = -36.66$$

إذن:

$$y_{max} = -\frac{36.66}{13000} = 0.00282\,\text{m or } -2.82\text{ mm}$$

ومن ثم:

$$y_{max} = 2.82\text{ mm } (downward)$$

الميل (θ_C) تحت الحمل (٢٠ كيلونيوتن) عند C:

بالتعويض بـ ($x=1$ m) في معادلة الميل، نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = 10 \times 1^2 - 30 = -20$$

إذن:

$$\theta c\left(=\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-20}{EI} = \frac{-20}{13000} = -\mathbf{0.001538\ rad.\ \ (Ans.)}$$

الميل (θ_D) تحت الحمل (٢٠ كيلونيوتن) عند D:

بالتعويض بـ ($x=3$ m) في معادلة الميل، نحصل على الآتي:

$$EI\frac{dy}{dx} = 10 \times 3^2 - 30 - 10(3-1)^2 = 90 - 30 - 40 = 20$$

إذن:

$$\theta_D\left(=\frac{dy}{dx}\right) = \frac{20}{EI} = \frac{20}{13000} = +\mathbf{0.001538\ rad.\ \ (Ans.)}$$

الترخيم (y_C) تحت الحمل (٢٠ كيلونيوتن) عند C:

بالتعويض بـ (x=1 m) في معادلة الترخيم، نحصل على الآتي:

$$EI\,y_c = \frac{10}{3} \times 1^3 - 30 \times 1 = -\frac{80}{3}$$

إذن:

$$y_c = -\frac{80}{3} \times \frac{1000}{13000}\ \text{mm} = -2.05\ \text{mm}$$

ومن ثم:

y_c **= 2.05 mm** ***(downwards)*** **(Ans.)**

الترخيم (y_D) تحت الحمل (٢٠ كيلونيوتن) عند D:

بالتعويض بـ (x=3 m) في معادلة الترخيم، نحصل على الآتي:

$$EIy_D = \frac{10}{3} \times 3^3 - 30 \times 3 - \frac{10}{3}(3-1)^3 = 90 - 90 - \frac{80}{3} = -\frac{80}{3}$$

إذن:

$$y_D = -\frac{80}{3} \times \frac{1000}{13000} = -2.05\ \text{mm}$$

ومن ثم:

y_D **= 2.05 mm** ***(downward)*** **(Ans.)**

الفصل التاسع

الكمرات المثبتة والمستمرة

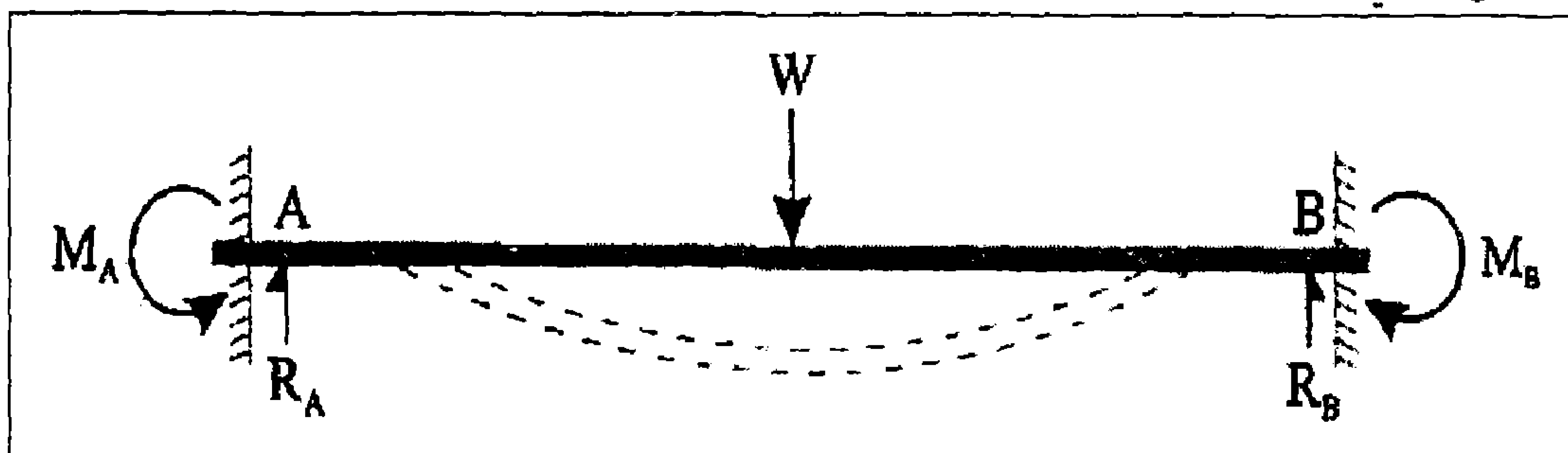
في هذا الفصل

- مقدمة عامة.
- الكمرات المثبتة عند الطرفين.
- الكمرات المستمرة.
- الأمثلة العملية.

٩-١ مقدمة عامة

الكمرات المثبتة عند الطرفين Fixed Beams

الكمرة المثبتة fixed beam (التي تسمى أيضًا الكمرة المبنية built-in أو encaster) عبارة عن كمرة أطرافها مقيدة أو مبنية بحيث تبقي في وضع أفقي دائمًا، كما هو موضح في الشكل التالي:



عند دراسة الكمرات المثبتة عند الطرفين، يكون من المفيد أخذ النقاط التالية في الاعتبار:

(١) بسبب التثبيت، ميل الكمرة يكون صفرًا عند كل طرف، وسيحدث عزم (أو ازدواج) عند كل طرف لتحقيق هذا الشرط.

(٢) العزوم الحادثة (M_A) و(M_B) ستكون في اتجاه يقابل اتجاه العزوم الناتجة عن التحميل الخارجي.

(٣) العزوم الطرفية في حالة الكمرات المثبتة عند الأطراف تعمل على انثناء الكمرة لجعلها تتحدب لأعلى في حين أن الأحمال العمودية لأسفل تعمل على ثني الكمرة لتتقعر لأعلى. إن شرط أكبر قوة (متانة) سوف يُطبق عندما تكون أكبر عزوم التقوس hogging moments مساوية في المقدار لأكبر عزوم الارتخاء sagging moments.

(٤) في حالة كمرة مثبتة عند الطرفين هناك أربعة مجاهيل: (R_A)، و(R_B)، و(M_A)، و(M_B). ومن ثم، ينبغي تكميل المعادلات الاستاتيكية بمعادلتين إضافيتين تأتيان من التشوهات.

بالنسبة لنفس البحور والأحمال، حينئذ تتمتع الكمرات المثبتة عند الأطراف بالمميزات التالية التي لا تتمتع بها الكمرات البسيطة الارتكاز:

(١) في هذه الكمرات توجد قيم أقل بالنسبة لعزوم الانحناء القصوى.

(٢) في هذه الكمرات توجد قيم أقل بالنسبة للترخيم الأقصى.

الكمرات المثبتة عند الأطراف (مقارنة بالكمرات البسيطة الارتكاز) تعاني من العيوب التالية:

(١) الإجهادات الكبيرة التي تتولد بسبب التغيرات في درجة الحرارة.

(٢) ينبغي الاعتناء بصفة خاصة باصطفاف الدعامات بدقة لتكون على نفس المنسوب.

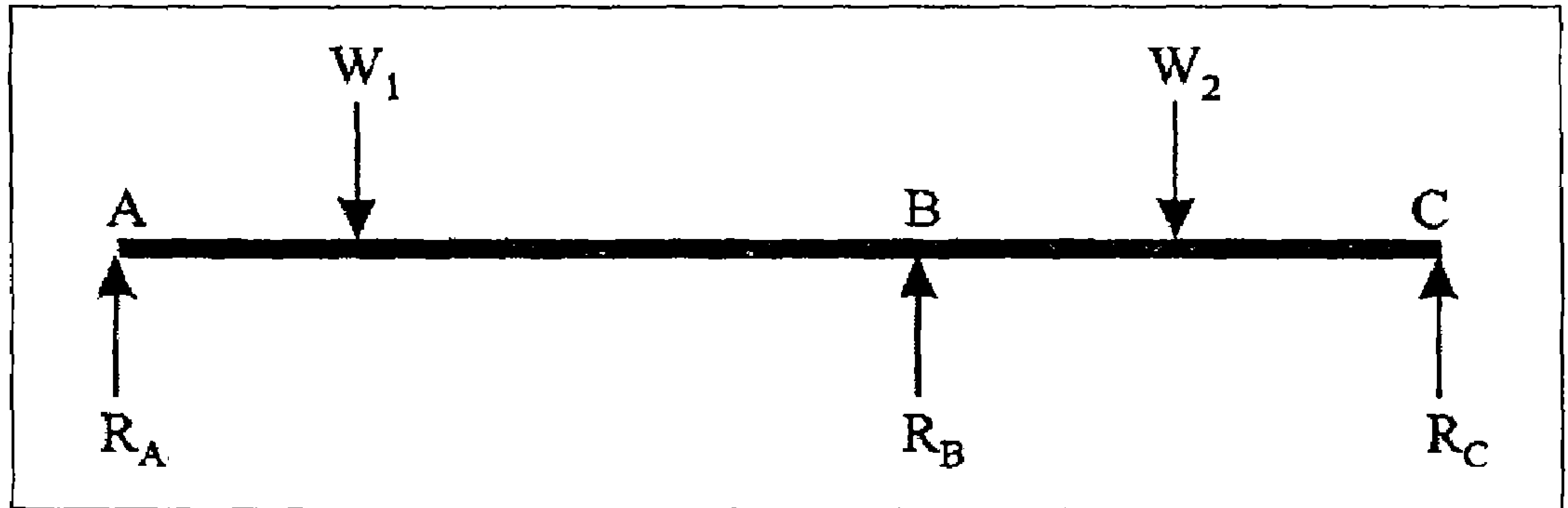
(٣) تتولد إجهادات كبيرة عند حدوث هبوط بسيط في إحدى الدعامات.

(٤) التقلبات الدورية في التحميل (خصوصًا في حالة الأحمال المتحركة) تؤثر سلبًا على درجة التثبيت عند الأطراف.

العديد من عيوب الكمرات المثبتة عند الأطراف يمكن تحاشيها عن طريق وجود كابولي عند كل طرف والعبور القنطري bridging للفراغ عن طريق تعليق كمرة بأطرافها الحرة.

الكمرات المستمرة Continuous Beams

الكمرة المستمرة تلك الكمرة التي ترتكز على أكثر من دعامتين، كما هو موضح في الشكل التالي:



بالنسبة للتحميلات المعتادة على الكمرة، نجد أن عزوم التقوس تتسبب في حدوث تحدب لأعلى عند الدعامات في حين أن عزوم الارتخاء تتسبب في حدوث تقعر لأسفل عند منتصفات البحور.

الكمرات المستمرة تتمتع المميزات التالية التي لا تتمتع بها الكمرات البسيطة الارتكاز:

(١) عزم الانحناء الأقصى في حالة الكمرة المستمرة يكون أقل بكثير من نظيره في حالة الكمرة البسيطة الارتكاز مع تساوي البحور والأحمال في الحالتين.

(٢) في حالة الكمرة المستمرة، متوسط عزم الانحناء يكون أقل ومن ثم يمكن استخدام مواد إنشاء أخف لمقاومة عزم الانحناء.

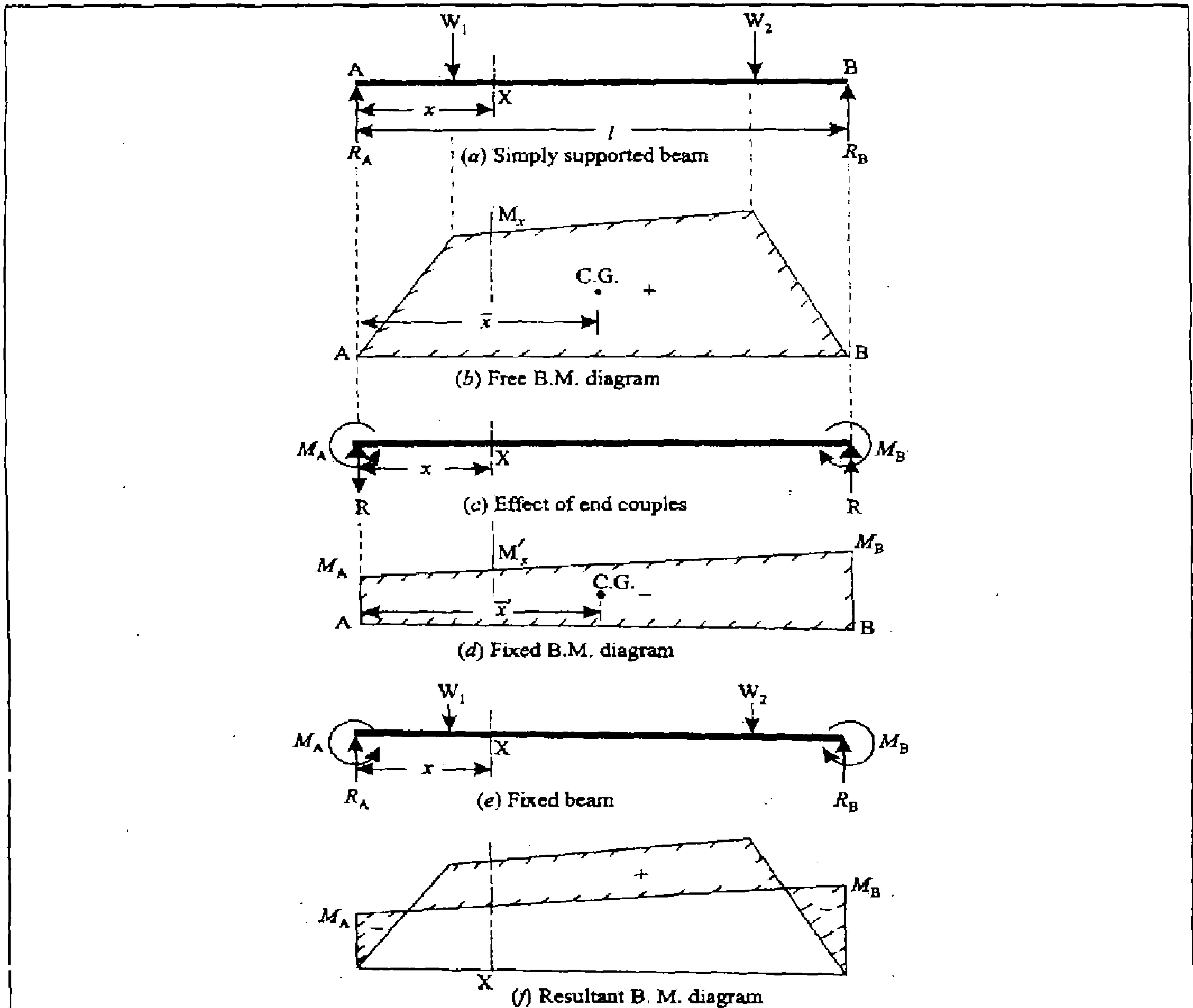
(٣) في حالة الكمرة المستمرة، عزم الانحناء يكون أكبر عبر الدعامات من عزم الانحناء عند منتصفات البحور ومن ثم فإن وزن الكمرة لا يؤثر في الإجهادات ماديًا.

عيب الكمرات المستمرة يتمثل في أن هبوط أي دعامة يؤدي إلى تغيير إجهادات الإنحناء تغيرًا كبيرًا. ولكن، هذا العيب يمكن تحاشيه عن طريق وضع مفصلات **hinges** عند النقط التي عندها تكون عزوم الانحناء أصفار.

٩-٢ الكمرات المثبتة من الطرفين Fixed Beams

٩-٢-١ تحليل الكمرة المثبتة من الطرفين

في الشكل التالي نشاهد كمرة AB مثبتة من الطرفين وتحمل أحمال مركزة في نقط (W_1) و(W_2):



لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
R_{fA}	رد الفعل عند الدعامة **A**.
R_{fB}	رد الفعل عند الدعامة **B**.
M_A, M_B	العزوم عند الأطراف المثبتة.

تحليل الكمرة يمكن تقسيمه إلى المراحل التالية:

(١) في المرحلة الأولى (الجزء (a) بالشكل السابق) يتم التعامل مع الكمرة على إنها كمرة بسيطة الارتكاز وتحمل أحمال مركزة في نقط (W_1) و(W_2) وفي الجزء (b) بالشكل السابق نشاهد ديجرام عزم الانحناء بالنسبة لهذا الوضع.

عزم الانحناء عند أي مقطع يكون عزم ارتخاء **sagging moment**. لنجعل (R_A) و(R_B) عبارة عن ردود الأفعال عند A وB بالنسبة لهذا الوضع.

(٢) في المرحلة الثانية (الجزء (a) بالشكل السابق)، يتم التعامل مع الكمرة البسيطة الارتكاز على إنها تحت تأثير الازدواجيات (العزوم) الطرفية (M_A) و(M_B) فقط بدون التحميل المعطى.

لنجعل (R) = رد الفعل عند كل طرف تحت هذا الوضع، و(M_B) أكبر من (M_A)، إذن:

$$R = \frac{M_B - M_A}{l}$$

- لو أن (M_B) أكبر من (M_A)، إذن يكون رد الفعل R لأعلى عند B ولأسفل عند A.
- عزم الانحناء (M'_x)، عند أي مقطع، يكون عزم تقوس hogging moment. في الجزء (d) بالشكل السابق نشاهد ديجرام عزم الانحناء الخاص بهذا الوضع. الديجرام المحصلة (النهائي) يتم رسمه عن طريق الدمج بين ديجرامات عزوم الانحناء السابقة كما هو موضح في الجزء (f) بالشكل السابق.

ردود الأفعال النهائية يتم حسابها كالآتي:

$$R_{fA} = R_A - R$$
$$R_{fB} = R_B + R$$

والآن، عزم الانحناء الفعلي عند أي مقطع X، على مسافة x من الطرف A يتم حسابه من خلال العلاقة التالية:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M_x - M'_x$$	**(9-1)**

بعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على العلاقة التالية:

$$EI\left[\frac{dy}{dx}\right]_0^l = \int_0^l M_x\,dx - \int_0^l M'_x\,dx$$	(9-2)

عندما:

$$x = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0 \text{ and } x = l,\ \frac{dy}{dx} = 0$$

وأيضًا:

$$\int_0^l M_x\,dx = \text{Area of free B.M. diagram} = a$$

وكذلك:

$$\int_0^l M'_x\,dx = \text{Area of fixed B.M. diagram} = a'$$

وبالتعويض في المعادلة (٩-٢)، نحصل على الآتي:

$$0 = a - a'$$

إذن:

$a = a'$	(9-3)

أي أن مساحة ديجرام عزم الانحناء الحر = مساحة ديجرام عزم الانحناء المثبت.

لنأخذ في الاعتبار المعادلة رقم (٩-١) مرة أخرى:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M_x - M'_x$$

وبضرب كلا الطرفين في x، نحصل على الآتي:

$$EIx\,\frac{d^2y}{dx^2} = M_x \cdot x - M'_x \cdot x$$

وبعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على الآتي:

$$\int_0^l EIx\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \int_0^l M_x \cdot x\,dx - \int_0^l M'_x \cdot x\,dx$$

إذن:

$$EI\left[x\,\frac{dy}{dx} - y\right]_0^l = a\bar{x} - a'\bar{x}'$$	(9-4)

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
$\bar{x}$	مسافة مركز ثقل ديجرام عزم الانحناء الحر من **A**.
$\bar{x}'$	مسافة مركز ثقل ديجرام عزم الانحناء المثبت من **A**.

عندما (x=0) و(y=0) فإن (dy/dx=0).

وعندما (x=l) و(y=0) فإن (dy/dx=0).

وبالتعويض بتلك القيم في المعادلة رقم (٩-٤)، نحصل على الآتي:

$$0 = a\bar{x} - a'\bar{x}'$$

$$a\bar{x} = a'\bar{x}'$$

$$\bar{x} = \bar{x}' \quad (\because a = a')$$

عن طريق استخدام الشروط نجد أن:

$$a = a'$$

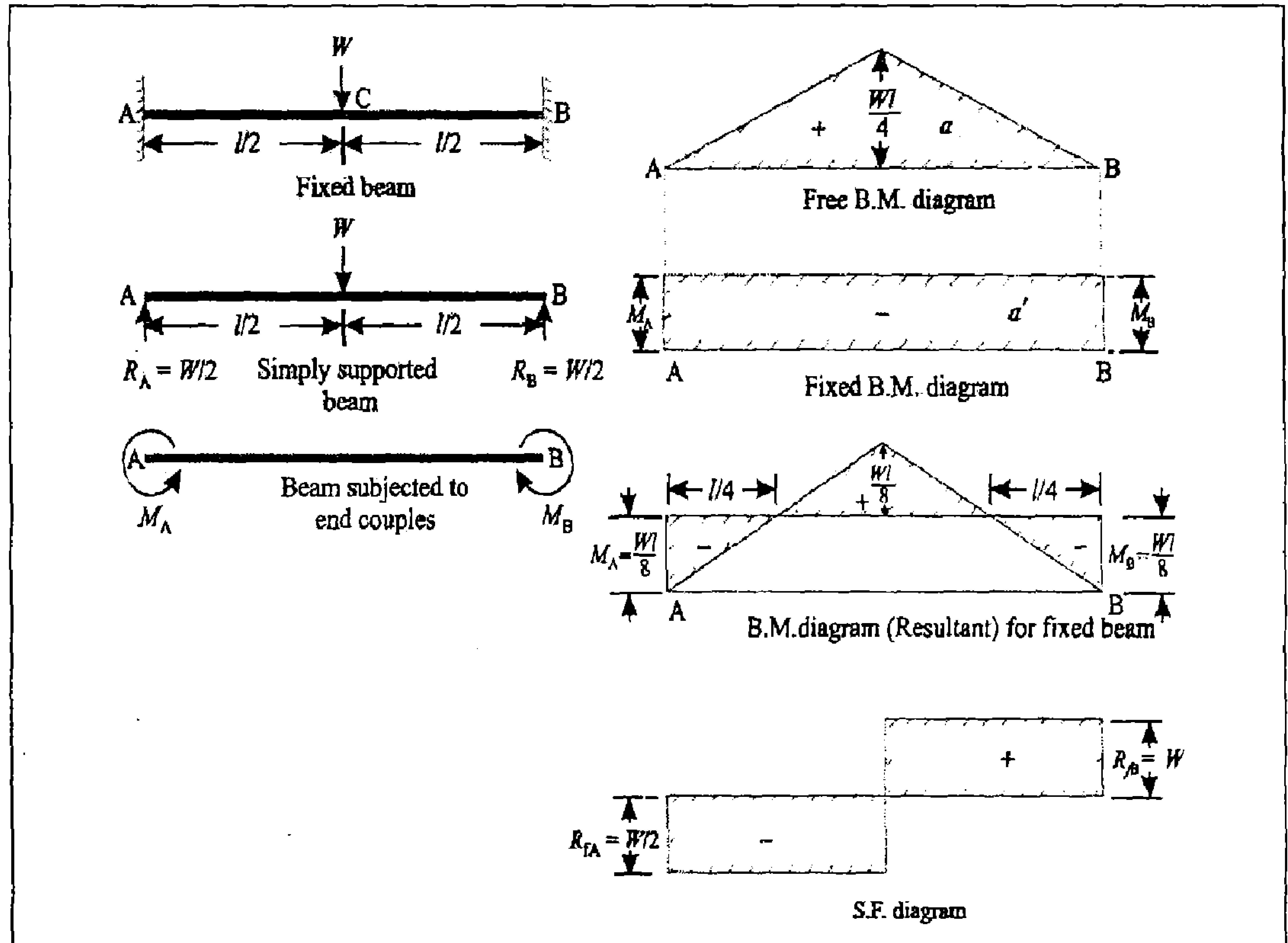
$$\bar{x} = \bar{x}'$$

يمكن إيجاد قيم المجاهيل (M_A) و(M_B).

فيما يلي سوف ندرس بعض الحالات القياسية للكمرة المثبتة من الطرفين.

الحالة (I): كمرة مثبتة من الطرفين وتحمل حمل مركز في نقطة عند منتصف البحر

في الشكل التالي، نشاهد كمرة مثبتة من الطرفين AB وبحرها (l) وتحمل حمل مركز في نقطة W عند منتصف البحر كما نشاهد أيضًا ديجرام عزم الانحناء الحر وديجرام عزم الانحناء المثبت (العزوم الطرفية (M_A) و(M_B) متساوية نظرًا للتماثل).



بمساواة مساحة ديجرام عزم الانحناء الحر مع مساحة ديجرام عزم الانحناء المثبت، نحصل على الآتي:

$$a = a' , \; \frac{1}{2} \times l \times \frac{Wl}{4} = M_A \times l$$

إذن:

$$M_A = \frac{Wl}{8} \qquad \text{and} \qquad M_B = M_A = \frac{Wl}{8}$$

عزم الانحناء عند منتصف البحر:

$$= M_x - M'_x = \frac{Wl}{4} - \frac{Wl}{8} = + \frac{Wl}{8}$$

وبسبب التماثل نجد أن ردود الأفعال (R_A) و(R_B) متساوية.

والآن، بالنسبة لديجرام قوة القص وديجرام عزم الانحناء يمكن بسهولة رسمهما كما هو موضح في الشكل السابق. ومن البديهي، أن تكون هناك نقطتي انقلاب عند ($l/4$) من الأطراف (انظر الشكل السابق).

الميل والترخيم

عزم الانحناء عند أي مقطع في AC، على مسافة x من الطرف A، يُحسب من خلال العلاقة التالية:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x - M'_x = \frac{W}{2} x - \frac{Wl}{8}$$

وبتكامل كلا الطرفين، نحصل على معادلة الميل بالصورة التالية:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} - \frac{Wl}{8} x + C_1$$

وعندما $x = 0, \frac{dy}{dx} = 0$، إذن $C_1 = 0$.

وبالتكامل مرة أخرى، نحصل على معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$$EIy = \frac{Wx^3}{12} - \frac{Wl}{8} \times \frac{x^2}{2} + C_2$$

عندما ($x=0$) و($y=0$)، إذن ($C_2=0$).

أقصى ترخيم يحدث عند منتصف البحر أي عند ($x=l/2$)، إذن:

$$EIy_C = \frac{W}{12}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{Wl}{16} \times \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Wl^3}{96} - \frac{Wl^3}{64} = -\frac{Wl^3}{192}$$

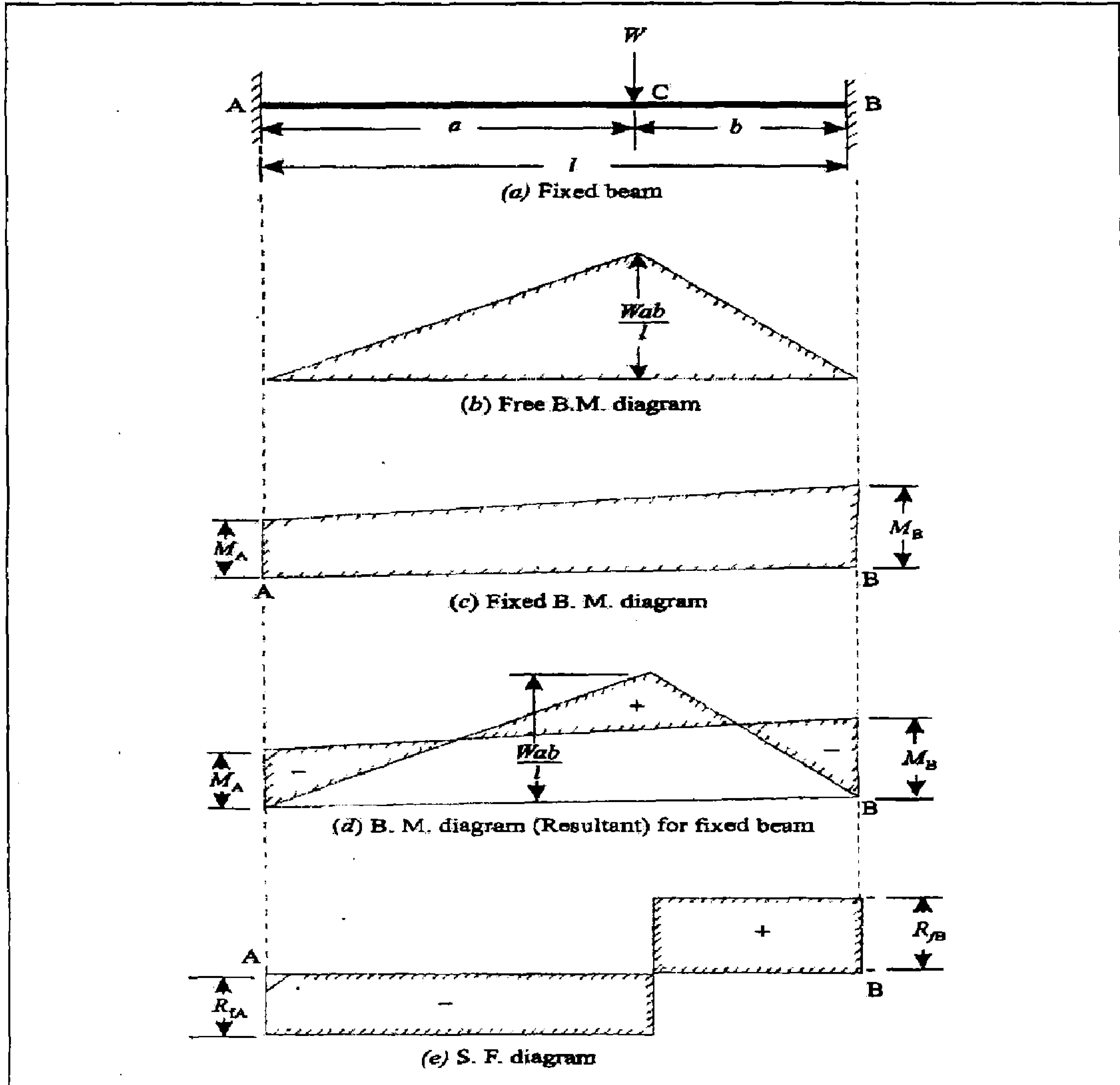
ومن ثم:

$y_C = -\dfrac{Wl^3}{192\ EI}$	(9-5)

y_C = ربع الترخيم الخاص بأي كمرة بسيطة الارتكاز.

الحالة (II): كمرة مثبتة عند الطرفين وتحمل حمل مركز على أي موضع بالكمرة

في الشكل التالي نشاهد كمرة AB بحرها (l) وتحمل حمل مركز W عند C بحيث أن C ليست منتصف البحر وبالتالي فإن (AC=a) و(BC=b).



من الواضح أن ديجرام عزم الانحناء الحر يكون على شكل مثلث ارتفاعه (w*a*b/l).

لنجعل (M_A) و(M_B) عبارة عن عزوم التثبيت عند الأطراف A وB على الترتيب.

بما إن مساحة ديجرام عزم الانحناء الحر = مساحة ديجرام عزم الانحناء المثبت،

إذن:

$$\frac{1}{2} \times l \times \frac{Wab}{l} = \left(\frac{M_A + M_B}{2}\right) \times l$$

ومن ثم:

$M_A + M_B = \frac{Wab}{l}$	(i)

وأيضًا، $\bar{x}$ (المسافة بين مركز ثقل ديجرام عزم الانحناء والطرف A) = $\bar{x}'$ (المسافة بين مركز ثقل ديجرام عزم الانحناء المثبت والطرف A).

ولكن:

$$\bar{x} = \frac{l + a}{3} \text{ from } A$$

كما أن:

$$\bar{x}' = \frac{M_A + 2\,M_B}{M_A + M_B} \times \frac{l}{3}$$

إذن:

$$\frac{l + a}{3} = \frac{M_A + 2\,M_B}{M_A + M_B} \times \frac{l}{3}$$

أو:

$$M_A + 2\,M_B = \left(\frac{M_A + M_B}{l}\right)(l + a)$$

ولكن من المعادلة رقم (i) نجد أن:

$$M_A + M_B = \frac{Wab}{l}$$

إذن:

$M_A + 2M_B = \frac{Wab}{l^2}\ (l + a)$	(ii)

بالتعويض في المعادلة (i) من المعادلة (ii) نحصل على الآتي:

$$M_B = \frac{Wab}{l^2}(l + a) - \frac{Wab}{l} = \frac{Wab}{l^2}(l + a - l) = \frac{Wa^2b}{l^2}$$

وبوضع هذه القيمة لـ (M_B) في المعادلة (i)، نحصل على الآتي:

$$M_A + \frac{Wa^2b}{l^2} = \frac{Wab}{l}$$

وبما إن $l - a = b$، إذن:

$$M_A = \frac{Wab}{l} - \frac{Wa^2b}{l^2} = \frac{Wab}{l^2}\,(l - a) = \frac{Wab^2}{l^2}$$

ومن ثم، عزوم التثبيت عند A وB تكون:

$M_A = \frac{Wab^2}{l^2}$	**(9-6)**
$M_B = \frac{Wa^2b}{l^2}$	**(9-7)**

يمكن ملاحظة أنه لو كانت a أكبر من b، إذن تكون (M_B) أكبر من (M_A).

الميل والترخيم:

عزم الانحناء عند أي مقطع، على مسافة x من الطرف A، يُعطى بواسطة العلاقة التالية:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M_x - M'_x$$

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wb}{l}\,x - \left[M_A + \frac{M_B - M_A}{l}\,.\,x\right] \Bigg| - W\,(x - a)$$

ولكن:

$$M_A + \frac{M_B - M_A}{l}\,.\,x = \frac{Wab^2}{l^2} + \frac{\frac{Wa^2b}{l^2} - \frac{Wab^2}{l^2}}{l}\,.\,x$$

$$M_A + \frac{M_B - M_A}{l}\,.\,x = \frac{Wab^2}{l^2} + \frac{Wab}{l^3}\,(a - b)\,.\,x$$

إذن:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wb}{l}\,.\,x - \frac{Wab^2}{l^2} - \frac{Wab}{l^3}\,(a - b)\,x \,\Bigg|\, - W\,(x - a)$$

أو:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wb}{l}\,(l^2 - a^2 + ab)\,x - \frac{Wab^2}{l^2} \,\Bigg|\, - W\,(x - a)$$

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wb}{l^3}\left[(a + b)^2 - (a^2 - ab)\right]x - \frac{Wab^2}{l^2} \,\Bigg|\, - W\,(x - a)$$

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wb}{l^3}\,(a^2 + b^2 + 2ab - a^2 + ab)\,x - \frac{Wab^2}{l^2} \,\Bigg|\, - W\,(x - a)$$

$$EI\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Wb}{l^3}(3ab+b^2)\ x-\frac{Wab^2}{l^2}\ \Big|\ -W(x-a)$$

أو:

$$EI\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Wb^2}{l^3}(3a+b)\ x-\frac{Wab^2}{l^2}\ \Big|\ -W(x-a)$$

وبتكامل كلا الطرفين، نحصل على معادلة الميل التالية:

$$EI\ \frac{dy}{dx}=\frac{Wb^2(3a+b)\ x^2}{2l^3}-\frac{Wab^2}{l^2}\ x+C_1\ \Big|\ -W\frac{(x-a)^2}{2}$$

عندما (x=0) و(dy/dx=0)، إذن ($C_1=0$).

وبعمل تكامل مرة أخرى نحصل على معادلة الترخيم التالية:

$$EIy=\frac{Wb^2(3a+b)\ x^3}{6l^3}-\frac{Wab^2\ x^2}{2l^2}+C_2\ \Big|\ -\frac{W(x-a)^3}{6}$$

عندما (x=0) و(y=0)، إذن ($C_2=0$).

التر خيم تحت الحمل:

بالتعويض عن x بـ a في معادلة الترخيم، نحصل على الآتي:

$$EIy_C=\frac{Wb^2(3a+b)\ a^3}{6l^3}-\frac{Wab^2\times a^2}{2l^2}$$

$$EIy_C=-\frac{Wa^3\ b^2}{6l^3}(-3a-b+3l)$$

بما إن $l=(a+b)$، إذن:

$$EIy_C=-\frac{Wa^3\ b^2}{6l^3}[-3a-b+3(a+b)]$$

$$EIy_C=-\frac{Wa^3\ b^2}{6l^3}(-3a-b+3a+3b)$$

$$EIy_C=-\frac{Wa^3\ b^2}{6l^3}\times 2b=-\frac{Wa^3b^3}{3l^3}$$

إذن:

$y_C=-\dfrac{Wa^3\ b^3}{3l^3\ EI}$	(9-8)

أقصى ترخيم:

لنجعل a أكبر من b.

أقصى ترخيم سوف يحدث بين A وC. ولتحقيق هذا الوضع سنساوي الميل بالصفر.

$$\frac{Wb^2(3a+b)\,x^2}{2l^3} - \frac{Wab^2}{l^2}\,x = 0$$

وبالتبسيط، نحصل على الآتي:

$$x = \frac{2al}{3a+b}$$

وبوضع هذه القيمة في معادلة الترخيم، نحصل على الآتي:

$$EIy_{max} = \frac{Wb^2(3a+b)}{6l^3}\left(\frac{2al}{3a+b}\right)^3 - \frac{Wab^2}{2l^2}\left(\frac{2al}{3a+b}\right)^2$$

$$EIy_{max} = -\frac{Wb^2}{6l^3}\left(\frac{2al}{3a+b}\right)^2\left[3al - \frac{(3a+b)(2al)}{3a+b}\right]$$

$$EIy_{max} = -\frac{Wb^2}{6l^3} \times \frac{4a^2l^2}{(3a+b)^2} \times (al) = -\frac{2}{3} \times \frac{Wa^3b^2}{(3a+b)^2}$$

إذن:

$y_{max} = -\dfrac{2}{3}\,\dfrac{Wa^3b^2}{(3a+b)^2\,EI}$	**(9-9)**

نقط الانقلاب:

- بالنسبة لنقطة الانقلاب في AC:

$$M = \frac{Wb^2}{l^3}(3a+b)\,x - \frac{Wab^2}{l^2} = 0$$

أو:

$$\frac{Wb^2}{l^3}(3a+b)\,x = \frac{Wab^2}{l^2}$$

أو $x = \dfrac{al}{3a+b}$ وهي مسافة نقطة الانقلاب من الطرف A.

- بالنسبة لنقطة الانقلاب في BC:

$$M = \frac{Wb^2}{l^3}(3a+b)\,x - \frac{Wab^2}{l^2} - W(x-a) = 0$$

$$\frac{Wb^2}{l^3}(3a+b)\,x = \frac{Wab^2}{l^2} + W(x-a)$$

$$\frac{b^3(3a+b)\,x}{l^3} = \frac{ab^2}{l^2} + (x-a) \quad \text{or} \quad x\left[\frac{b^2(3a+b)}{l^3} - 1\right] = \frac{ab^2}{l^2} - a$$

$$x\left[\frac{3ab^2+b^3-l^3)}{l^3}\right]=\frac{ab^2-al^2}{l^2} \quad \text{or} \quad x\,(3ab^2+b^3-l^3)=ab^2l-al^3$$

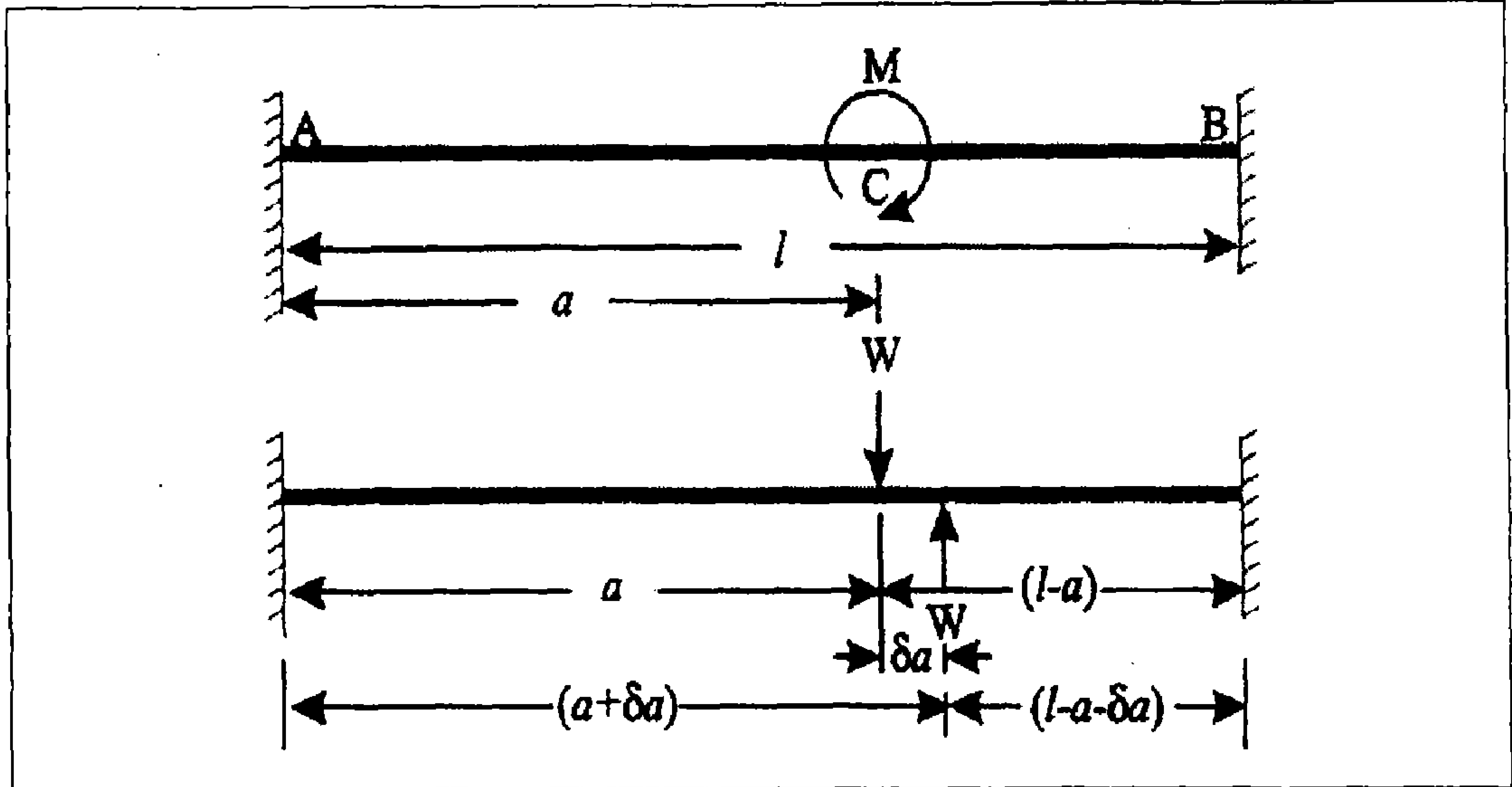
وبما إن $l=(a+b)$، إذن:

$$x\,[3ab^2+b^3-(a+b)^3]=al\,(b^2-l^2)$$
$$x\,[3ab^2+b^3-a^3-b^3-3a^2b-3ab^2]=al\,[b^2-(a+b)^2]$$
$$x\,(-a^3-3a^2b)=al\,(b^2-a^2-b^2-2ab)$$

أي أن $x=\dfrac{l\,(a+2b)}{(a+3b)}$ ، وهي مسافة نقطة الانقلاب من الطرف A.

الحالة (III): كمرة مثبتة عند الأطراف ومعرضة لعزم M مطبق بعيداً عن منتصف البحر

في الشكل التالي نشاهد كمرة AB مثبتة عند الطرفين وبحرها (l) ومعرضة لعزم مركز في نقطة C وهي توجد على مسافة a من الطرف A.



لنجعل الازدواج M يتألف من حملين متساوين في المقدار W ومختلفين في الاتجاه وبينهما مسافة صغيرة (δa).

والآن، عزم التثبيت عند A يكون:

$M_A=-\dfrac{Wa\,(l-a)^2}{l^2}+\dfrac{W\,(a+\delta a)\,(l-a-\delta a)^2}{l^2}$	(9-10)

بتجاهل $[(\delta a)^2]$ في التعبير الرياضي الخاص بالمعادلة رقم (٩-١٠)، نحصل على الآتي:

$$M = -\frac{Wa\,(l-a)^2}{l^2} + \frac{W}{l^2}\left[a\,(l-a)^2 - 2a\,(l-a)\,\delta a + \delta a\,(l-a)^2\right]$$

$$M = -\frac{Wa\,(l-a)^2}{l^2} + \frac{W}{l^2}\left[a\,(l-a)^2 + \delta a\,\{-2a\,(l-a) + (l-a)^2\}\right]$$

$$M = -\frac{Wa\,(l-a)^2}{l^2} + \frac{W}{l^2}\left[a\,(l-a)^2 - \delta a\,\{-2al + 2a^2 + l^2 + a^2 - 2al\}\right]$$

$$M = -\frac{Wa\,(l-a)^2}{l^2} + \frac{W}{l^2}\left[a\,(l-a)^2 + \delta a\,\{l^2 + 3a^2 - 4al\}\right]$$

$$M = -\frac{Wa\,(l-a)^2}{l^2} + \frac{W}{l^2}\left[a\,(l-a)^2 + \delta a\,(l-a)\,(l-3a)\right]$$

$$M = \frac{W}{l^2}\left[-a\,(l-a)^2 + a\,(l-a)^2 + \delta a\,(l-a)\,(l-3a)\right]$$

$$M = \frac{W\delta a}{l^2}\,(l-a)\,(l-3a)$$

عندما تكون (δa) صغيرة، فإن M تساوي الازدواج (W*δa)، إذن:

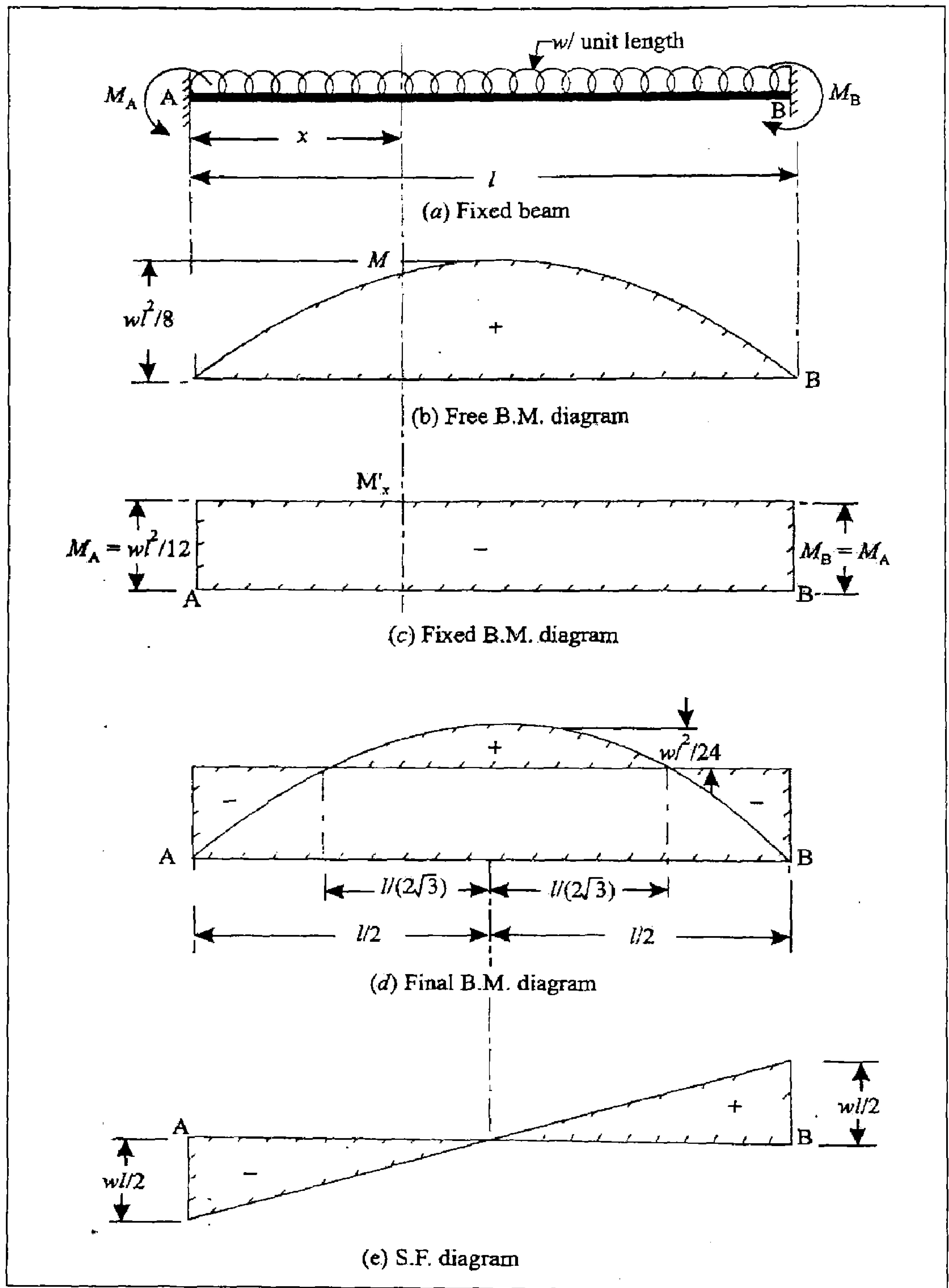
$M_A = \frac{M}{l^2}\,(l-a)\,(l-3a)$	(9-11)

وبالمثل، يمكن إثبات أن:

$M_B = \frac{M}{l^2}\,a\,(2l-3a)$	(9-12)

الحالة (IV): كمرة مثبتة عند الطرفين ومحملة بحمل موزع بانتظام

في الشكل التالي نشاهد كمرة مثبتة عند الطرفين AB وطولها (l) وتحمل حمل موزع بانتظام (w) لكل وحدة طول عبر الكمرة بأكملها.



لو أن الكمرة بسيطة الارتكاز، حينئذ يحدث عزم الانحناء الأقصى عند المنتصف

ويكون $M_{max} = \dfrac{wl^2}{8}$ ؛ وديجرام عزم الانحناء نشاهده في الجزء (b) بالشكل السابق. أما

ديجرام عزم الانحناء الناتج عن ازدواجيات التثبيت (M_A) و(M_B) فنشاهده في الجزء (c) بالشكل السابق. وحيث أن الكمرة محمل بتماثل حول منتصفها، إذن تكون ردود الأفعال كالآتي:

$R_A = R_B = \dfrac{wl}{2}$ and fixing couples,

$M_A = M_B$

بمساواة مساحة ديجرام عزم الانحناء الحر (a) مع مساحة ديجرام عزم الانحناء المثبت (a')، نحصل على الآتي:

a = a'

$$2/3 \times l \times \frac{wl^2}{8} = M_A \times l$$

إذن:

$M_A = \dfrac{wl^2}{12} \; (= M_B)$	**(9-13)**

في الجزء (d) بالشكل السابق نشاهد ديجرام عزم الانحناء النهائي.

<u>نقطة الانقلاب:</u>

لتحديد مواضع نقط الانقلاب سنقوم سويًا بدراسة مقطع عرضي XX على مسافة x من الطرف A.

عزم الانحناء:

$$M = M_x - M'_x$$

$$\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wl^2}{12} = 0$$

$$6x^2 - 6lx + l^2 = 0$$

إذن:

$$x = \frac{6l \pm \sqrt{36l^2 - 24l^2}}{12} = \frac{6l \pm 2\sqrt{3}\,l}{12}$$

أو:

$x = \dfrac{l}{2} \pm \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$	**(9-14)**

أي أن نقط الانقلاب تقع على مسافة قدرها $\dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ على جانبي منتصف المركز.

عزم الانحناء عند المنتصف:

$= \frac{wl^2}{8} - \frac{wl^2}{12} = \frac{wl^2}{24}$	**(9-15)**

<u>الميل والترخيم:</u>

لإيجاد كل من الميل والترخيم سنقوم بدراسة مقطع XX على مسافة x من الطرف A.

عند هذا المقطع يتم حساب عزم الانحناء كالآتي:

$$M = M_x - M'_x = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wl^2}{12}$$

أو من خلال العلاقة التالية:

$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wl^2}{12}$	**(i)**

بعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على الآتي:

$$EI\,\frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wl^2 x}{12} + C_1 \quad \text{(constant of integration)}$$

عندما (x=0) و(dy/dx=0) (عند الطرف المثبت)، إذن (C_1=0).

$EI\,\frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wl^2 x}{12}$	**(ii)**

بعمل تكامل للمعادلة (ii)، نحصل على الآتي:

$$EIy = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^2x^2}{24} + C_2 \quad \text{(constant of integration)}$$

عندما (x=0) و(y=0) (الطرف المثبت)، إذن (C_2=0) ومن ثم:

$$EIy = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^2x^2}{24}$$

أقصى ترخيم يحدث عند المنتصف، $x = l/2,\ y = y_{max}$ (حيث أن الكمرة محمل بتماثل حول المنتصف). إذن:

$$EIy_{max} = \frac{wl \times (l/2)^3}{12} - \frac{w\,(l/2)^4}{24} - \frac{wl^2\,(l/2)^2}{24}$$

$$EIy_{max} = \frac{wl^4}{96} - \frac{wl^4}{384} - \frac{wl^4}{96}$$

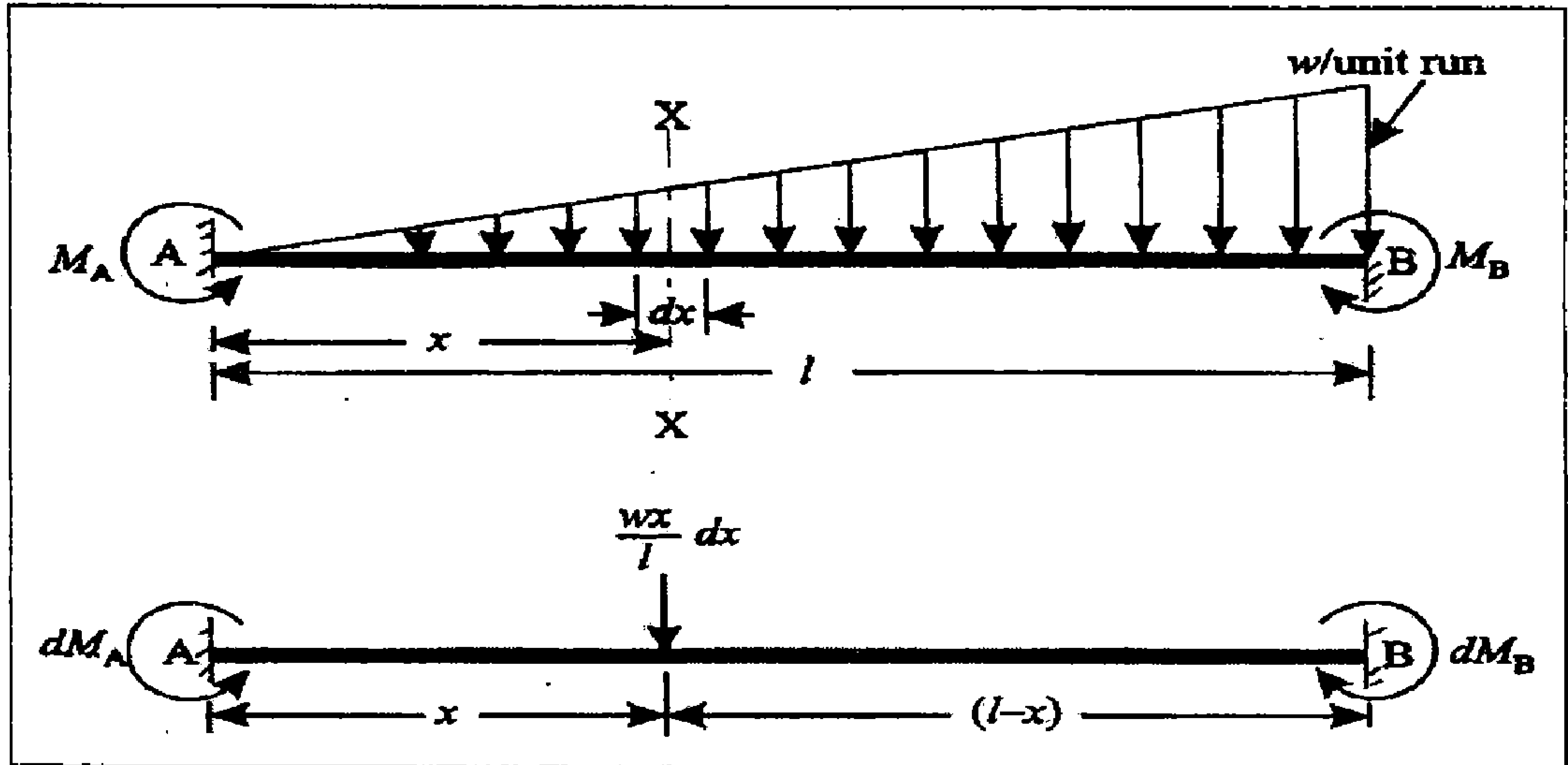
$y_{max} = -\frac{wl^4}{384\,EI}$	**(9-16)**

(الإشارة السالبة تدل على أن الترخيم لأسفل).

هذا الترخيم عبارة عن ٢٠% من ترخيم كمرة بسيطة الارتكاز محملة بحمل موزع بانتظام.

الحالة (V): كمرة مثبتة من الطرفين وتحمل حمل مثلث الشكل تتغير شدته من الصفر عند طرف إلى w لكل وحدة طول عند الطرف الآخر

في الشكل التالي نشاهد كمرة مثبتة AB بحرها (l) وتحمل حمل مثلث الشكل تتغير شدته من الصفر عند الطرف A إلى w لكل وحدة طول عند الطرف B.



لندرس سويًا أي مقطع XX على مسافة x من الطرف A. شدة التحمل عند المقطع XX = (w*x/l). إذن، الحمل المؤثر بالنسبة لمسافة عنصرية (dx) = dx * (dx/l). العزوم عند الأطراف المثبتة الناتجة عن هذا الحمل العنصري تكون:

$$dM_A = \left(\frac{wx}{l}\,dx\right)\frac{x\,(l-x)^2}{l^2} = \frac{wx^2\,(l-x)^2\,dx}{l^3}$$

$$dM_B = \left(\frac{wx}{l}\,dx\right)\frac{x^2\,(l-x)}{l^2} = \frac{wx^3\,(l-x)\,dx}{l^3}$$

إذن يمكن حساب عزم التثبيت عند A كالآتي:

$$M_A = \int_0^l \frac{wx^2\,(l-x)^2}{l^2}\,dx = \frac{w}{l^2}\int_0^l x^2\,(l^2+x^2-2lx)\,dx$$

$$M_A = \frac{w}{l^3}\int_0^l \left(x^2l^2+x^4-2lx^3\right)dx = \frac{w}{l^3}\left[l^2\times\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-2l\,.\,\frac{x^4}{4}\right]_0^l$$

$$M_A = \frac{w}{l^3}\left[l^2 \times \frac{l^3}{3} + \frac{l^5}{5} - 2l \times \frac{l^4}{4}\right] = \frac{w}{l^3}\left[\frac{l^5}{3} + \frac{l^5}{5} - \frac{l^5}{2}\right] = \frac{w}{l^3} \times \frac{l^5}{30} = \frac{wl^2}{30}$$

أي أن:

$M_A = \frac{wl^2}{30}$	(9-17)

وبالمثل:

$$M_B = \int_0^l \frac{wx^3 (l - x)\, dx}{l^3} = \frac{w}{l^3} \int_0^l x^3 (l - x)\, dx$$

$$M_B = \frac{w}{l^3} \int_0^l (x^3 l - x^4)\, dx = \frac{w}{l^3}\left[\frac{x^4}{4} . l - \frac{x^5}{5}\right]_0^l$$

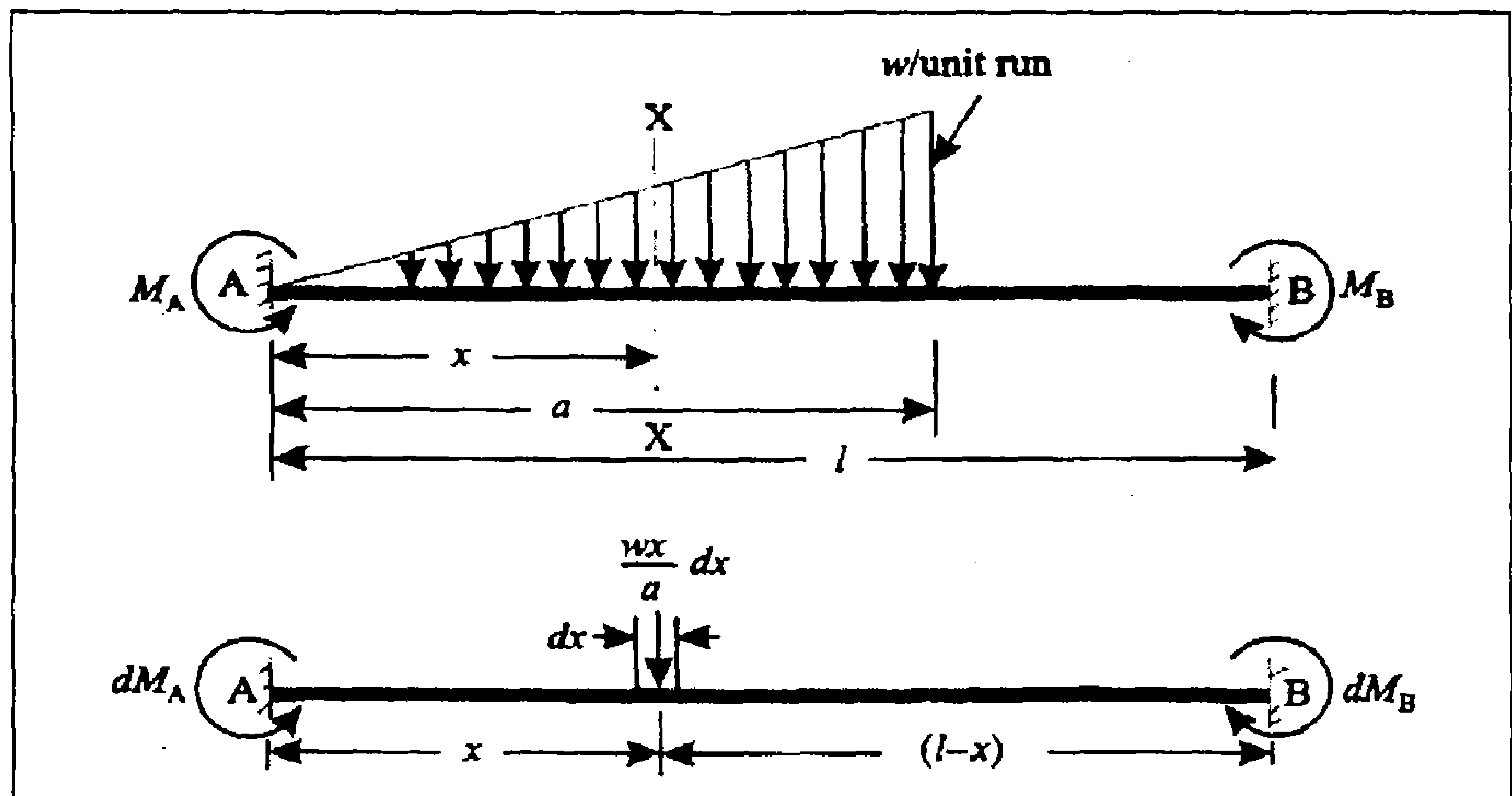
$$M_B = \frac{w}{l^3}\left(\frac{l^4}{4} . l - \frac{l^5}{5}\right) = \frac{w}{l^3} \times \frac{l^5}{20} = \frac{wl^2}{20}$$

أي أن:

$M_B = \frac{wl^2}{20}$	(9-18)

الحالة (VI): كمرة مثبتة عند الأطراف وتحمل حمل مثلث عبر مسافة معينة من أحد الأطراف

في الشكل التالي، نشاهد كمرة مثبتة AB بحرها (l) وتحمل حمل مثل يغطي مسافة قدرها a من الطرف A. لنجعل كثافة أو شدة الحمل تتغير من صفر إلى w لكل وحدة طول.



لندرس سويًا أي مقطع XX على مسافة x من الطرف A في نطاق التحميل.

شدة التحميل عند w*x/a = XX.

إذن، الحمل المؤثر بالنسبة لمسافة عنصرية (dx) يكون [(w*x/a)*dx].

عزوم التثبيت الناتجة عن هذا الحمل العنصري تكون:

$$dM_A = \left(\frac{wx}{a}\,dx\right)\frac{x\,(l-x)^2}{l^2} = \frac{wx^2\,(l-x)^2}{al^2}\,dx$$

$$dM_B = \left(\frac{wx}{a}\,dx\right)\frac{x^2\,(l-x)}{l^2} = \frac{wx^3\,(l-x)}{al^2}\,dx$$

عزم التثبيت الكلي عند A:

$$M_A = \int_0^a \frac{wx^2\,(l-x)^2}{al^2}\,dx = \frac{w}{al^2}\int_0^a x^2\,(l^2 + x^2 - 2lx)\,dx$$

$$M_A = \frac{w}{al^2}\int_0^a (x^2\,l^2 + x^4 - 2lx^3)\,dx = \frac{w}{al^2}\left[\frac{x^3}{3}.l^2 + \frac{x^5}{5} - \frac{2lx^4}{4}\right]_0^a$$

$$M_A = \frac{w}{al^2}\left[\frac{a^3.\,l^2}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{2la^4}{4}\right] = \frac{w}{al^2}\cdot\frac{a^3}{30}\,(10l^2 + 6a^2 - 15la)$$

أو:

$M_A = \frac{wa^2}{30l^2}\,(10l^2 + 6a^2 - 15la)$	**(9-19)**

وبالمثل، يتم حساب عزم التثبيت الكلي عند B كالآتي:

$$M_B = \int_0^a \frac{wx^3\,(l-x)}{al^2}\,dx = \frac{w}{al^2}\int_0^a x^3\,(l-x)\,dx$$

$$M_B = \frac{w}{al^2}\int_0^a (x^3 l - x^4)\,dx = \frac{w}{al^2}\left[\frac{x^4}{4}\,l - \frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

$$M_B = \frac{w}{al^2}\left(\frac{a^4}{4}.\,l - \frac{a^5}{5}\right) = \frac{w}{al^2}\cdot\frac{a^4}{20}\,(5l - 4a) = \frac{w}{al^2}\cdot\frac{a^4}{20}\,(5l - 4a)$$

أي أن:

$M_B = \frac{wa^3}{20l^2}\,(5l - 4a)$	**(9-20)**

ملاحظة

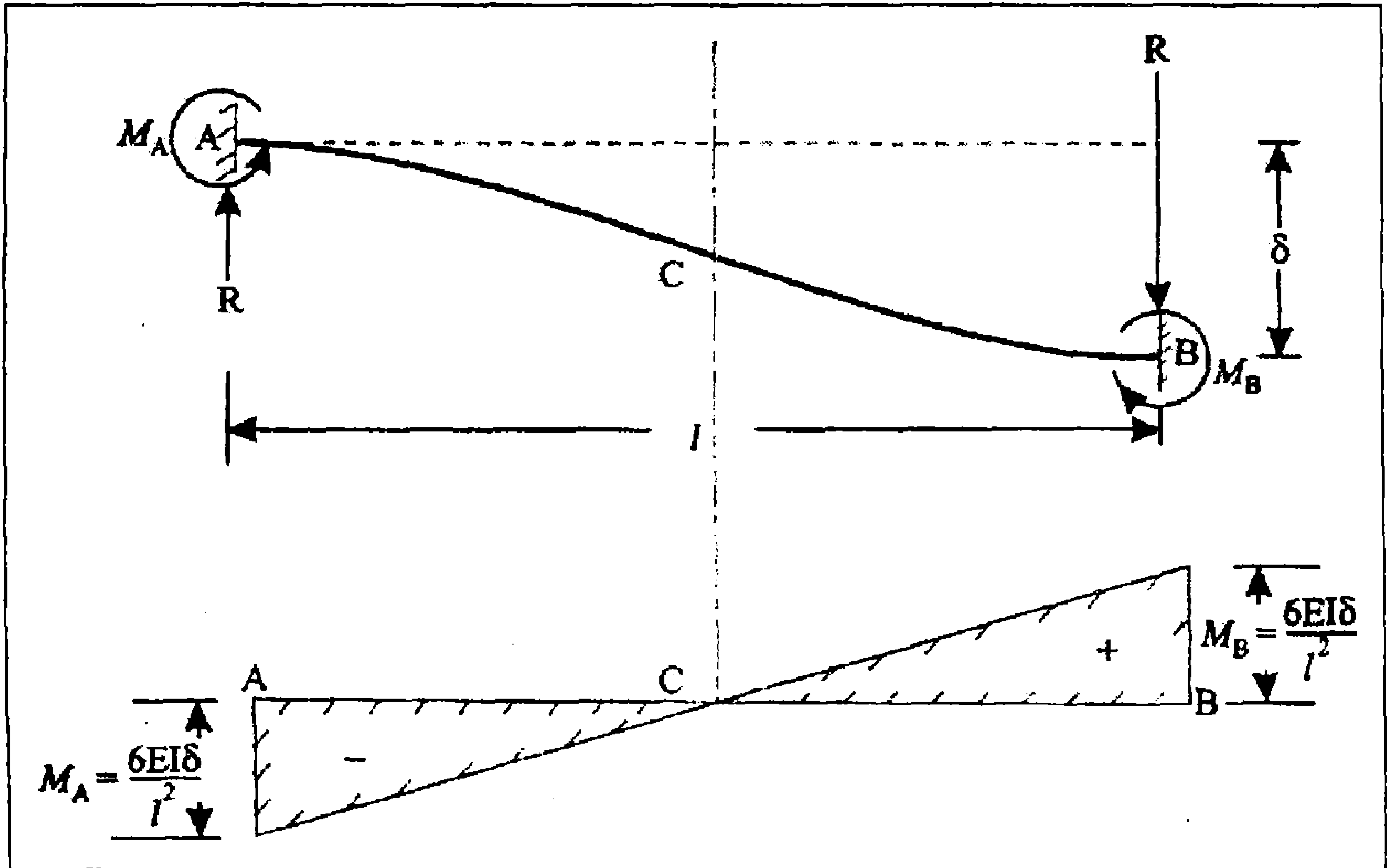
في حالة كون التحميل الثلثي يغطي البحر بأكمله، وبوضع (a=l) في التعبيرات الرياضية الخاصة بكل من (M_A) و(M_B)، نحصل على الآتي:

$$M_A = \frac{w}{l \times l^2} \cdot \frac{l^3}{30}\left(10l^2 + 6l^2 - 15l^2\right) = \frac{wl^2}{30}$$

$$M_B = \frac{w}{l^2 \times l^2} \times \frac{l^4}{20}(5l - 4l) = \frac{wl^2}{20}$$

٩-٢-٢ الكمرات المثبتة عند الأطراف مع كون الأطراف مختلفة المناسيب (تأثير هبوط الدعامات)

في الشكل التالي، نشاهد كمرة مثبتة AB بحرها (l) حيث أن الأطراف A, B عند مناسيب مختلفة؛ والفرق في المنسوب بينها عبارة عن δ.



لنجعل الطرف A عند منسوب أعلى من منسوب الطرف B. ولنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
M_A	عزم التثبيت عند الطرف A.
M_B	عزم التثبيت عند الطرف B.
R	رد الفعل عند كل دعامة.

(من الواضح، بالنسبة لهذه الحالة، أن (M_A) سالبة (تقوس hogging) وأن (M_B) موجبة (وكلاهما متساويان عدديًا)).

لندرس أي مقطع على مسافة x من الطرف A. وحيث أن معدل التحميل عبارة عن صفر، إذن نحن لدينا الآتي:

$EI\ \frac{d^4y}{dx^4} = 0$	(i)

بالتكامل، نحصل على معادلة قوة القص بالصورة التالية:

$$= EI\ \frac{d^3y}{dx^3} = C_1$$

(حيث أن (C_1) ثابت التكامل).

عند (x=0) و(S.F.=+R) إذن (C_1=R)، ومن ثم:

$EI\ \frac{d^3y}{dx^3} = R$	(ii)

بالتكامل مرة أخرى، نحصل على عزم الانحناء عند أي مقطع:

$$= EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = Rx + C_2$$

(حيث أن (C_2) ثابت التكامل).

عند (x=0)، و(B.M.=$-M_A$)، إذن ($C_2=-M_A$)، ومن ثم:

$EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = R.x - M_A$	(iii)

وبالتكامل مرة أخرى، نحصل على معادلة الميل التالية:

$$EI\ \frac{dy}{dx} = R\ .\ \frac{x^2}{2} - M_A x + C_3$$

(حيث أن (C_3) ثابت التكامل).

عند (x=0) و(dy/dx=0) فإن (C_3=0) ومن ثم:

$EI\ \frac{dy}{dx} = \frac{R}{2}\ x^2 - M_A x$	(iv)

بعمل التكامل مرة أخرى، نحصل على معادلة الترخيم التالية:

$$EIy = \frac{R}{2}\ .\ \frac{x^3}{3} - M_A \frac{x^2}{2} + C_4$$

(حيث أن (C_4) ثابت التكامل).

عند (x=0) و(y=0) إذن (C_4=0)، ومن ثم:

$EIy = \frac{R}{2}\frac{x^3}{3} - M_A \cdot \frac{x^2}{2}$	(v)

وعند (x=l) و(y=-δ)، إذن:

$-EI\delta = \frac{Rl^3}{6} - \frac{M_A l^2}{2}$	(vi)

وأيضًا، نحن نعلم أنه عند B، فإن (x=l) و(dy/dx=0).

بالتعويض بتلك القيم في المعادلة (iv)، نحصل على الآتي:

$$0 = \frac{R}{2} \cdot l^2 - M_A l$$

إذن:

$R = \frac{2M_A}{l}$	(vii)

وبالتعويض بهذه القيمة لـ R في المعادلة (vi)، نحصل على الآتي:

$$-EI\delta = \frac{2M_A}{l} \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{M_A l^2}{2} = \frac{M_A l^2}{3} - \frac{M_A l^2}{2}$$

$$EI\delta = \frac{M_A l^2}{6}$$

إذن:

$M_A = \frac{6EI\delta}{l^2}$	(9-21)

وأيضًا:

$R_A = \frac{2M_A}{l} = \frac{12EI\delta}{l^3}$	(9-22)

ومن ثم، عزم الانحناء عند أي مقطع على مسافة x من A يُعطى من خلال العلاقة التالية:

$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = R \cdot x - M_A$	(iii)

أو من خلال العلاقة التالية:

$M = \frac{2M_A}{l} \cdot x - \frac{6EI\delta}{l^2}$	(9-23)

إذن، عزم الانحناء عند B (بوضع (x=l) في المعادلة رقم (٩-٢٣)) يكون:

$$M_B = \frac{2M_A}{l} . l - \frac{6EI\delta}{l^2} = \frac{2 \times 6EI\delta}{l^2} - \frac{6EI\delta}{l^2} = \frac{6EI\delta}{l^2}$$

أي أن:

$M_B = \frac{6EI\delta}{l^2}$	(9-24)

ومن ثم، يمكن استنتاج أنه عندما تكون أطراف أي كمرة مثبتة على مناسيب مختلفة، فإن عزم التثبيت عند كل طرف يساوي عدديًا $\frac{6EI\delta}{l^2}$. وعند الطرف المرتفع يكون عزم تقوس **hogging moment** وعند الطرف المنخفض يكون العزم عبارة عن عزم ارتخاء **sagging moment**.

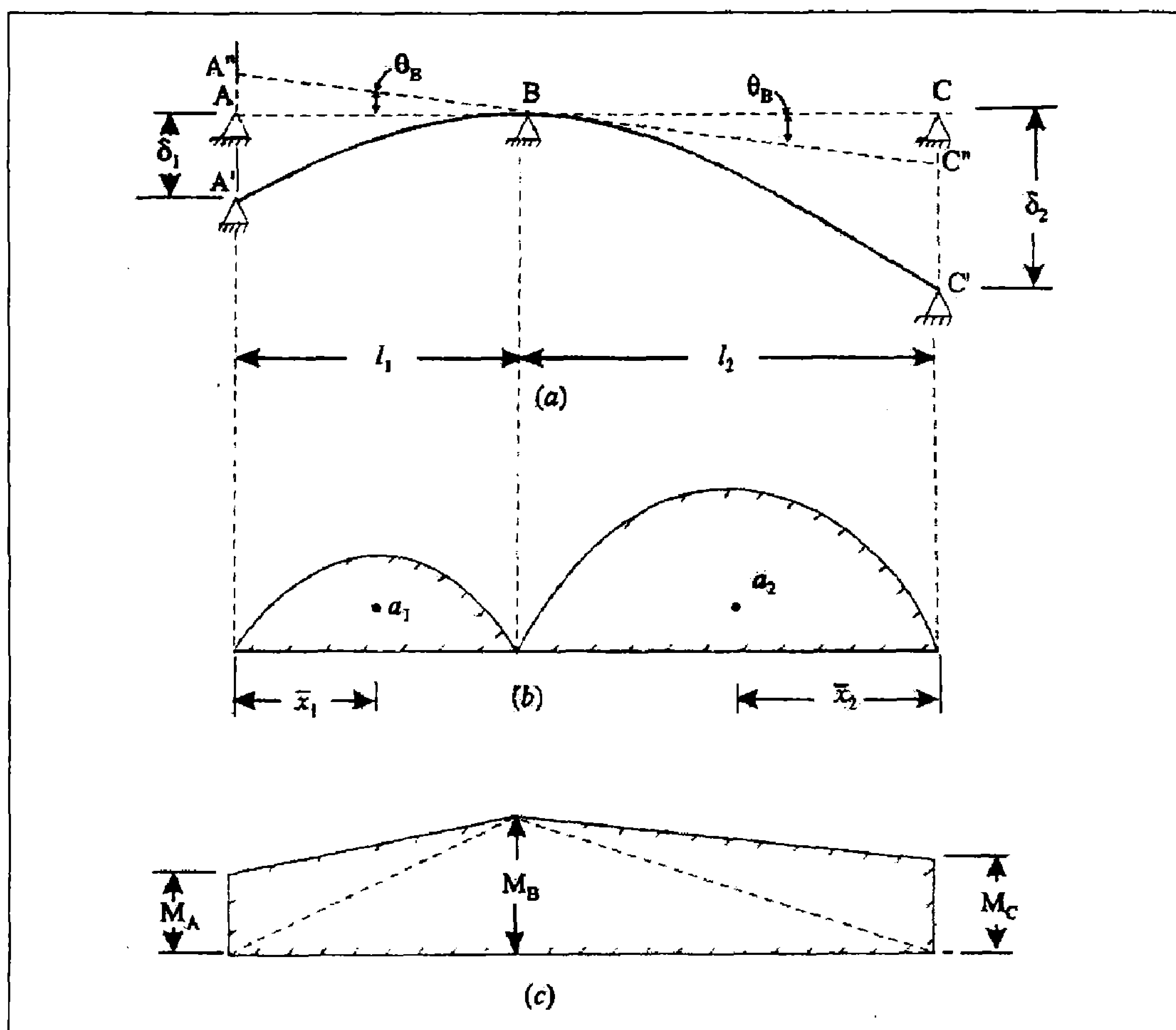
٩-٣ الكمرات المستمرة Continuous Beams

٩-٣-١ مقدمة عامة

الكمرة المستمرة Continuous Beam عبارة عن كمرة ترتكز على أكثر من دعامتين. الكمرة المستمرة غير معرفة استاتيكيًا ويمكن تحليلها من خلال طرق عديدة؛ ونحن هنا سوف ندرس طريقة واحدة فقط وهي نظرية العزوم الثلاثة **theorem of three moments** أو نظرية **Clapeyron**.

٩-٣-٢ نظرية Clapeyron للعزوم الثلاثة

في الجزء (a) بالشكل التالي نشاهد كمرة مستمرة لها بحران فقط وهما AB وBC. هذه البحور يمكن أن تكون معرضة لأي نموذج تحميل. أما في الجزء (b) بالشكل التالي فنشاهد ديجرام عزم الانحناء لكلا البحرين حيث تم التعامل معهما على إن كل منهما عبارة عن كمرة حرة الارتكاز ومستقلة عن الأخرى.



تحت تأثير الأحمال المطبقة سنجعل الكمرة ABC تتخذ الشكل A'B'C' (الدعامات A وC تهبط بمقادير مختلفة بالنسبة للدعامة B). ارسم "A"BC" مماس لمنحنى المرونة عند B واجعل "AA" و"CC" الأجزاء المحصورة عن طريق هذا المماس على الخطوط الرأسية المرسومة عبر كل من A وB.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
l_1	طول البحر **AB**.
l_2	طول البحر **BC**.
a_1	مساحة ديجرام عزم الانحناء بالنسبة للبحر **AB** (البسيط الارتكاز).
a_2	مساحة ديجرام عزم الانحناء بالنسبة للبحر **BC** (البسيط الارتكاز).
$\bar{x}_1$	مسافة مركز ثقل المساحة (a_1) من **A**.

$\bar{x}_2$	مسافة مركز ثقل المساحة (a_2) من **C**.
E_1I_1	الجساءة الانثنائية للبحر **AB**.
E_2I_2	الجساءة الانثنائية للبحر **BC**.
δ_1	مقدار هبوط الدعامة **A** بالنسبة للدعامة **B**.
δ_2	مقدار هبوط الدعامة **C** بالنسبة للدعامة **B**.
θ_B	الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى المرونة عند **B** مع الاتجاه الأفقي.

والآن:

$$\theta_B = \frac{AA''}{l_1} = \frac{1}{l_1}\,(A'A'' - \delta_1)$$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
A'A"	مقدار ترخيم النقطة **A** بالنسبة للماس لمنحنى المرونة عند **B** وهو يساوي عزم الديجرام (**M/EI**) بين **A** و**B** حول **A**. (بناءًا على نظرية العزم الثاني للمساحة).

إذن:

$$A'A'' = \frac{a_1\bar{x}_1}{E_1I_1} + \frac{1}{E_1I_1}\left(\frac{1}{2}\,M_A \times l_1 \times \frac{l_1}{3}\right) + \frac{1}{E_1I_1}\left(\frac{1}{2}\,M_B \times l_1 \times \frac{2}{3}\,l_1\right)$$

$$A'A'' = \frac{1}{E_1I_1}\left[a_1\,\bar{x}_1 + (M_A + 2M_B)\,\frac{l^2}{6}\right]$$

إذن:

(i)	$\theta_B = \frac{1}{l_1}\,(A'A'' - \delta_1) = \frac{a_1\,\bar{x}_1}{l_1EI_1} + \frac{1}{6E_1I_1}\,(M_A + 2M_B) - \frac{\delta_1}{l_1}$

وأيضًا:

$$\theta_B = \frac{CC''}{l_2} = \frac{1}{l_2}\,(\delta_2 - C'C'')$$

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
C'C"	مقدار ترخيم النقطة **C** بالنسبة للماس لمنحنى المرونة عند **B** وهو

يساوي عزم الديجرام (M/EI) بين B و C حول C. (بناءًا على نظرية العزم الثاني للمساحة).	

إذن:

$$C'C'' = \frac{a_2\bar{x}_2}{E_2I_2} + \frac{1}{E_2I_2}\left(\frac{1}{2}\times M_C \times l_2 \times \frac{l_2}{3}\right) + \frac{1}{E_2I_2}\left(\frac{1}{2}\times M_B \times l_2 \times \frac{2}{3}\, l_2\right)$$

$$C'C'' = \frac{1}{E_2I_2}\left[a_2\,\bar{x}_2 + (2M_B + M_C)\,\frac{l^2}{6}\right]$$

إذن:

$$\theta_B = \frac{1}{l_2}\,(\delta_2 - C'C'')$$

$\theta_B = \frac{\delta_2}{l_2} - \frac{a_2\bar{x}_2}{l_2E_2I_2} - \frac{l_2}{6E_2I_2}(2M_B + M_C)$	**(ii)**

وبمساواة المعادلتين (i) و(ii) معًا، نحصل على الآتي:

$$\frac{a_1\bar{x}_1}{l_1E_1I_1} + \frac{l_1}{6E_1I_1}(M_A + 2M_B) - \frac{\delta_1}{l_1} = \frac{\delta_2}{l_2} - \frac{a_2\,\bar{x}_2}{l_2E_2I_2} - \frac{l_2}{6E_2I_2}(2M_B + M_C)$$

أو:

$$\frac{M_Al_1}{6E_1I_1} + \frac{2M_B}{6}\left(\frac{l_1}{E_1I_1} + \frac{l_2}{E_2I_2}\right) + \frac{M_Cl_2}{6E_2I_2} + \frac{a_1\bar{x}_1}{l_1E_1I_1} + \frac{a_2\bar{x}_2}{l_2E_2I_2} = \frac{\delta_1}{l_1} + \frac{\delta_2}{l_2}$$

أو:

$\frac{M_Al_1}{E_1I_1} + 2M_B\left(\frac{l_1}{E_1I_1} + \frac{l_2}{E_2I_2}\right) + \frac{M_Cl_2}{E_2I_2} + \frac{6a_1\bar{x}_1}{l_1E_1I_1} + \frac{6a_2\bar{x}_2}{l_2E_2I_2} = \frac{6\delta_1}{l_1} + \frac{6\delta_2}{l_2}$	**(9-25)**

المعادلة رقم (٩-٢٥) تعتبر الصورة العامة لنظرية العزوم الثلاثة.

من المفيد جدًا أخذ النقاط التالية في الاعتبار:

(i) كل عزوم الارتخاء تُؤخذ على إنها موجبة وكل عزوم التقوس تُؤخذ على إنها سالبة.

(ii) كل من (δ_1) و(δ_2) تؤخذان موجبة لو أنه بعد هبوط الدعامات A و C فإنها تقع أسفل الدعامة المرجعية B.

(iii) بالنسبة لأي بحرين متتابعين، لو أن الدعامات الطرفية تقع أسفل الدعامة المركزية (التي في المنتصف) فإن قيمة (δ) بالنسبة لدعامة معينة تكون موجبة الإشارة والعكس بالعكس.

فيما يلي عبارة عن الحالات الخاصة لنظرية العزوم الثلاثة.

الحالة (I): عندما تظل كل الدعامات في نفس المستوى (المنسوب)

في حالة بقاء كل الدعامات في نفس المنسوب حينئذ تكون كل من (δ_1) و(δ_2) أصفار والمعادلة رقم (٩-٢٥) تصبح بالصورة التالية:

$\frac{M_A l_1}{E_1 I_1} + 2M_B\left(\frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 I_2}\right) + \frac{M_C l_2}{E_2 I_2} + \frac{6a_1\bar{x}_1}{l_1 E_1 I_1} + \frac{6a_2\bar{x}_2}{l_2 E_2 I_2} = 0$	(9-26)

الحالة (II): عندما تتساوي الجساءة الانثنائية في كل البحور (والدعامات في نفس المنسوب)

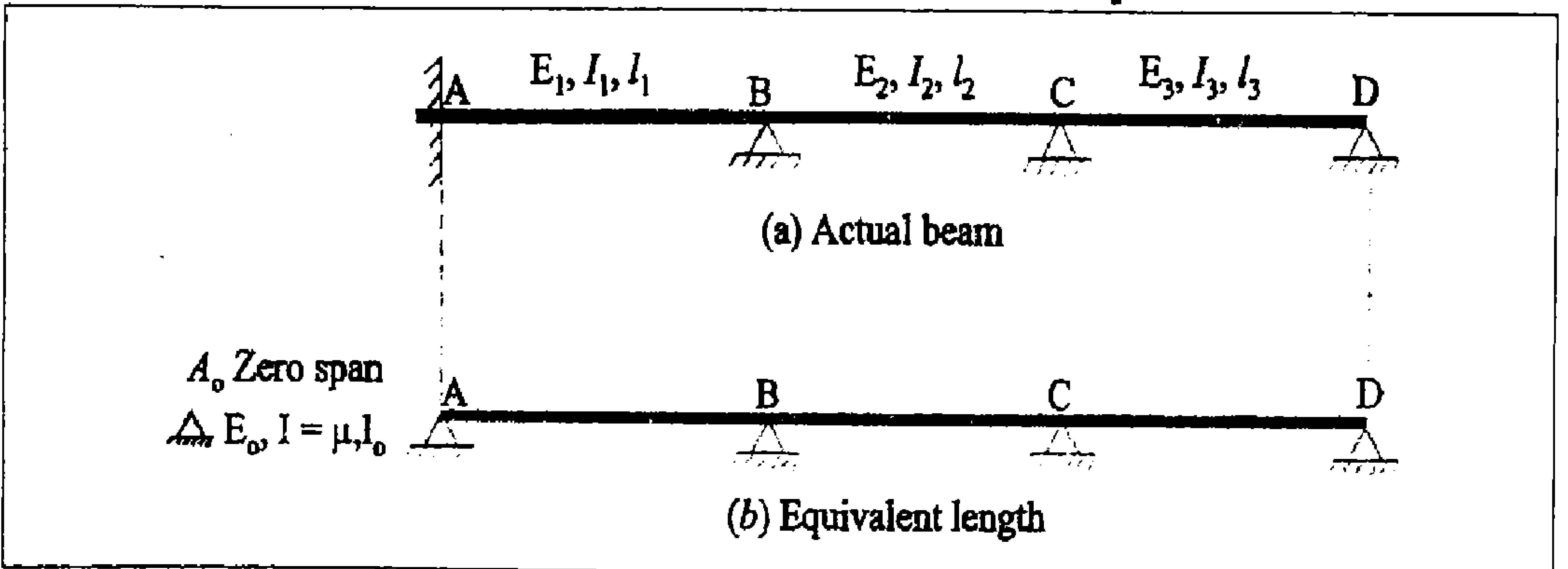
في حالة عدم تغير الجساءة الانثنائية للبحر أي لو أن ($E_1I_1=E_2I_2$) مع كون الدعامات في نفس المنسوب، حينئذ تصبح المعادلة رقم (٩-٢٥) بالصورة التالية:

$M_A l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C l_2 + \frac{6a_1\bar{x}_1}{l_1} + \frac{6a_2\bar{x}_2}{l_2} = 0$	(9-27)

المعادلة رقم (٩-٢٧) يمكن تبسيطها أكثر لو أن هناك بحران فقط والكمرة حرة الارتكاز عند A وC، ومن ثم ($M_A=M_C=0$).

الحالة (III): عندما يوجد طرف مثبت في الكمرة المستمرة

نظرية العزوم الثلاثة، بالنسبة لكمرة بها طرف مثبت، يمكن تعديلها عن طريق تصور بحر طوله (l_0) وعزم قصور ذاتي قدره (∞) بعد الدعامة ثم يتم تطبيق نظرية العزوم الثلاثة كالمعتاد (انظر الشكل التالي).



(a) Actual beam

(b) Equivalent length

٩-٣-٣ الكمرات المستمرة ذات الأطناب Beam with Overhangs

عندما تشتمل الكمرة المستمرة على أطناب على جانب واحد أو على كلا الجانبين إذن العزم الخاص بالدعامة التي تمتد عندها الكمرة يتم تحديده عن طريق التعامل مع الجزء الممتد خارج الدعامة على إنه كابولي. وباقي التحليل يتم عن طريق تطبيق نظرية العزوم الثلاثة بالإجراءات المعتادة.

٩-٣-٤ هبوط الدعامات في الكمرات المستمرة

عزم الانحناء وقوة القص عبر كمرة مستمرة يحدث لهما تعديل عندما يُؤخذ في الاعتبار هبوط الدعامة. وفي أثناء تطبيق المعادلة العامة رقم (٩-٢٥) حينئذ ينبغي الاعتناء بصفة خاصة بضبط الإشارات.

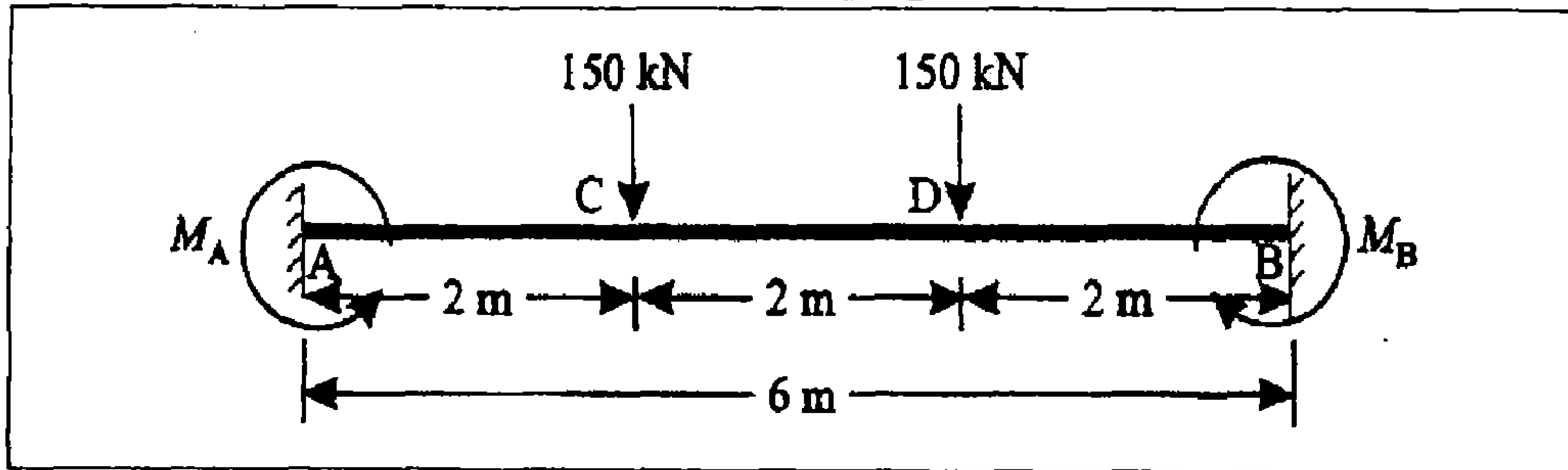
٩-٣-٥ الكمرات المستمرة ذات الأطراف المثبتة

لكي يتم تحليل كمرة مستمرة بها طرف مثبت أو طرفان مثبتان، في هذه الحالة يمكن إتباع الإجراء المذكور في الفقرة رقم ٩-٣-٢ (الحالة (III)).

٩-٤ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

كمرة مثبتة طولها ٦ متر ومحملة بأحمال نقطية قدرها ١٥٠ كيلونيوتن على مسافة ٢ متر من كل دعامة، كما هو موضح في الشكل التالي:



ارسم كل من ديجرام عزم الانحناء وديجرام قوة القص. وأوجد أيضًا أقصى ترخيم.

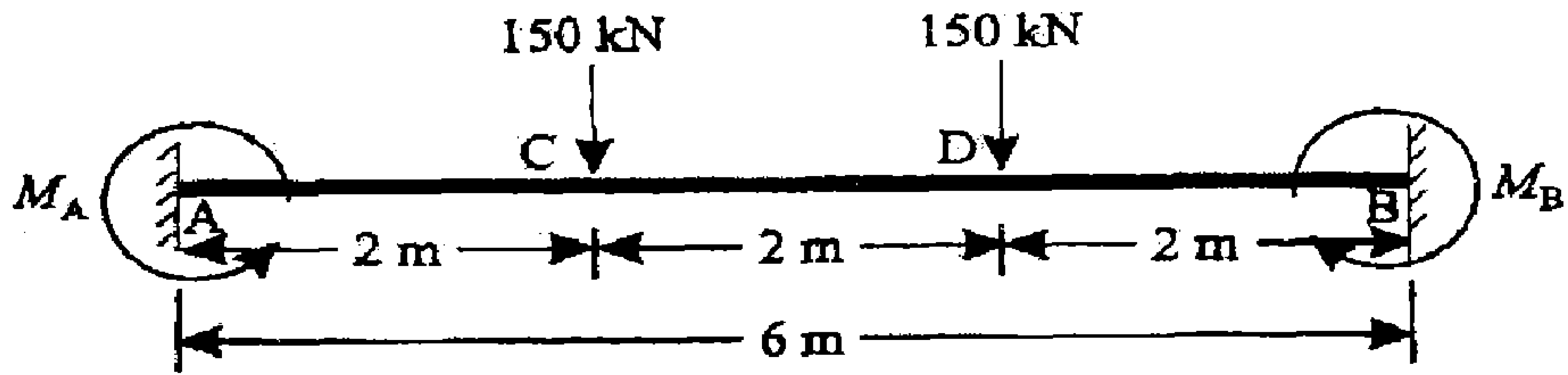
خذ البيانات التالية:

$E = 2 * 10^8 \ kN/m^2$
$I = 8 * 10^8 \ mm^4$

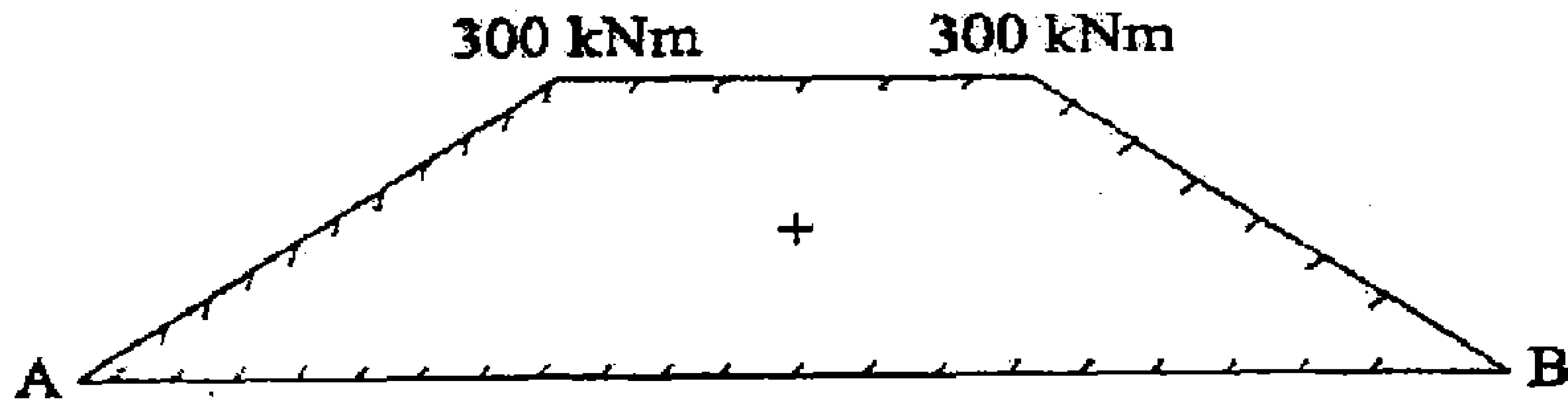
الحل

في الجزء (a) بالشكل التالي نشاهد الكمرة المثبتة AB وهي تحمل أحمال نقطية

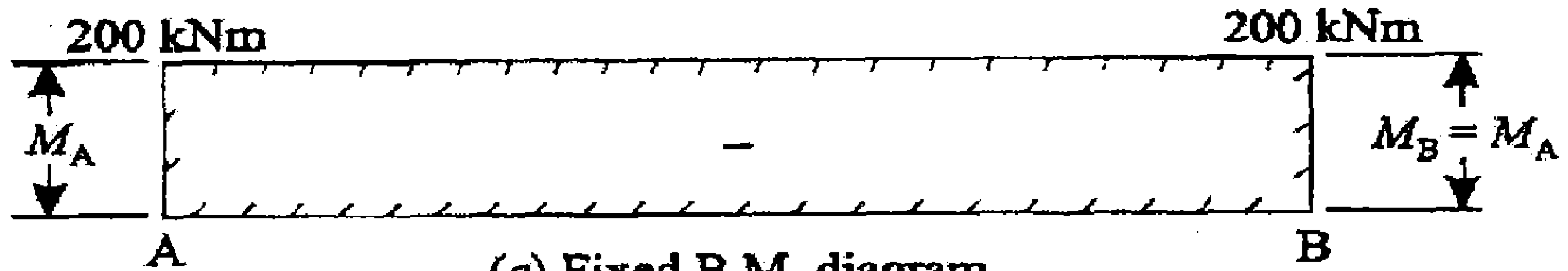
قدرها ١٥٠ كيلونيوتن. عزوم التثبيت (M_A) و(M_B) متساوية (بسبب التماثل). وأيضًا في الجزء (b) بهذا الشكل نشاهد ديجرام عزم الانحناء الحر وفي الجزء (c) بالشكل نفسه نشاهد ديجرام عزم الانحناء المثبت.



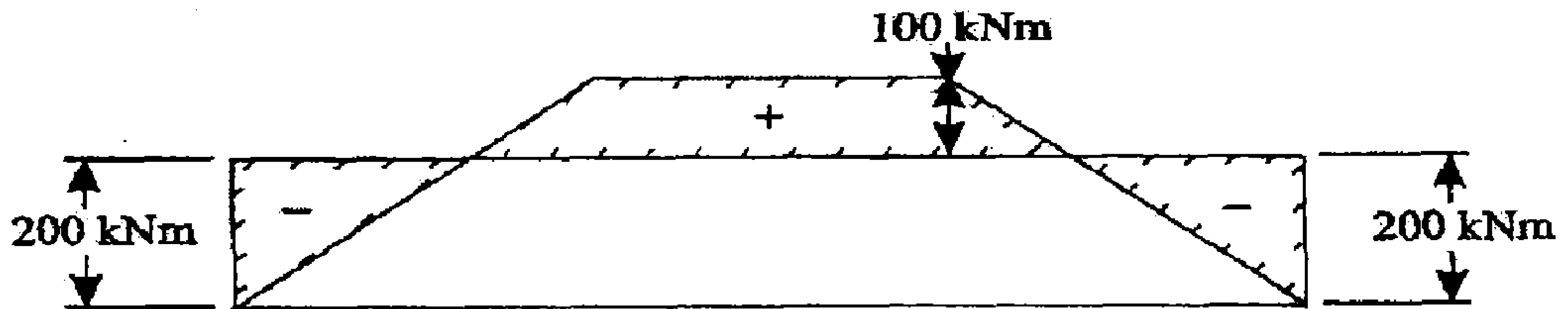
(a) Fixed beam



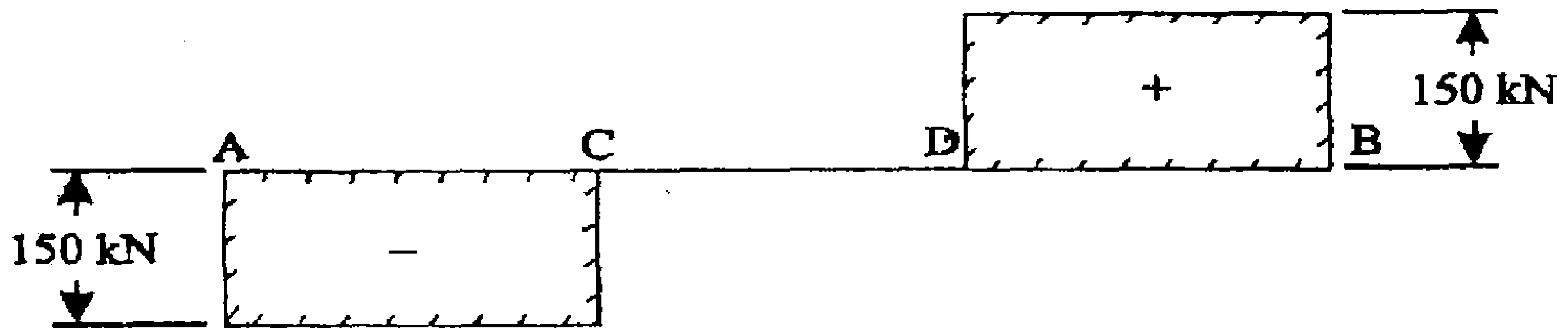
(b) Free B.M. diagram



(c) Fixed B.M. diagram



(d) Final B.M. diagram



(e) S.F. diagram

عن طريق مساواة مساحة ديجرام عزم الانحناء الحر مع مساحة ديجرام عزم الانحناء المثبت، نحصل على الآتي:

$$M_A \times 6 = 1/2\ (6 + 2) \times 300$$

أو (M_A) = ٢٠٠ كيلونيوتن.متر.

إذن، عزم الانحناء عند المنتصف = ٣٠٠ - ٢٠٠ = ١٠٠ كيلونيوتن.متر.

نقط الانقلاب الإنثنائي:

عزم الانحناء (الفعلي) عند أي مقطع في الجزء AC على مسافة x من A يتم إعطاؤه من العلاقة التالية:

M = العزم الحر - العزم المثبت = ١٥٠ × x - ٢٠٠.

للحصول على نقطة الانقلاب الانثنائي نجعل M = صفر، أي أن:

150*x - 200 = 0

إذن، (x) = ٤/٣ متر من أي طرف.

الميل والترخيم:

عزم الانحناء عند أي مقطع بين A وD على مسافة x من الطرف A يتم حسابه كالآتي:

$$EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = 150 \times x - 200 \ \Big| - 150\ (x - 2)$$

وبعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على معادلة الميل بالصورة التالية:

$$EI\ \frac{dy}{dx} = 75x^2 - 200x + C_1 \ \Big| - 75\ (x - 2)^2$$

وعندما (x=0) و(dy/dx=0)، إذن ($C_1=0$).

وبعمل تكامل مرة أخرى نحصل على معادلة الترخيم بالصورة التالية:

$$EIy = 25x^3 - 100x^2 + C_2 \ | - 25\ (x - 2)^3$$

وعندما (x=0) و(y=0)، إذن ($C_2=0$).

للحصول على أقصى ترخيم والذي يحدث عند المنتصف في هذه الحالة، نضع (x=3 m) في معادلة الترخيم لنحصل على الآتي:

$$EIy_{max} = 25 \times 3^3 - 100 \times 3^2 - 25\ (3 - 2)^3 = 25 \times 27 - 900 - 25 = -250$$

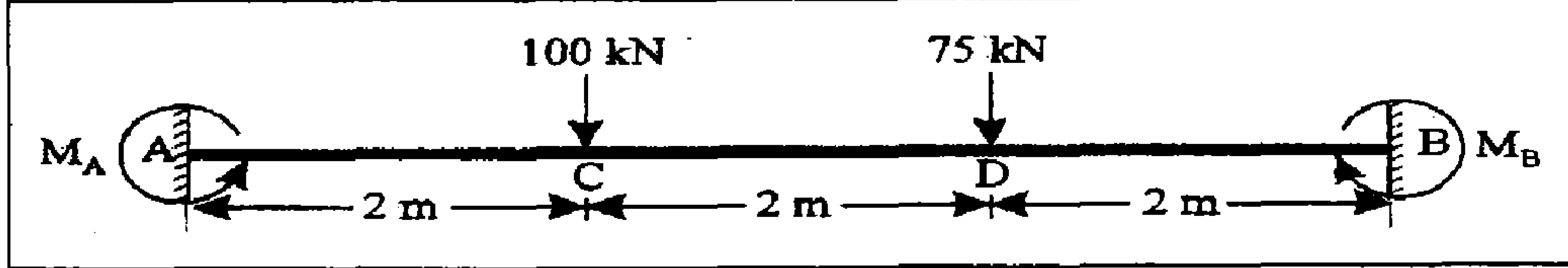
إذن:

$$y_{max} = -\frac{250}{EI} = -\frac{250}{2 \times 10^8 \times 8 \times 10^8 \times 10^{-12}}\ \text{m}$$

$$y_{max} = -15{\cdot}6 \times 10^{-4}\ \text{m} = -1{\cdot}56\ \text{mm} = -1{\cdot}56\ \text{mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٢)

كمرة مثبتة طولها ٦ متر وتحمل حملين مركزين في نقطتين أحدهما ١٠٠ كيلونيوتن والآخر ٧٥ كيلونيوتن، كما هو موضح في الشكل التالي:



أوجد الآتي:

(i) عزوم التثبيت عند الأطراف.

(ii) ردود الأفعال عند الدعامات.

وأيضًا، ارسم كل من ديجرام عزم الانحناء وديجرام قوة القص.

الحل

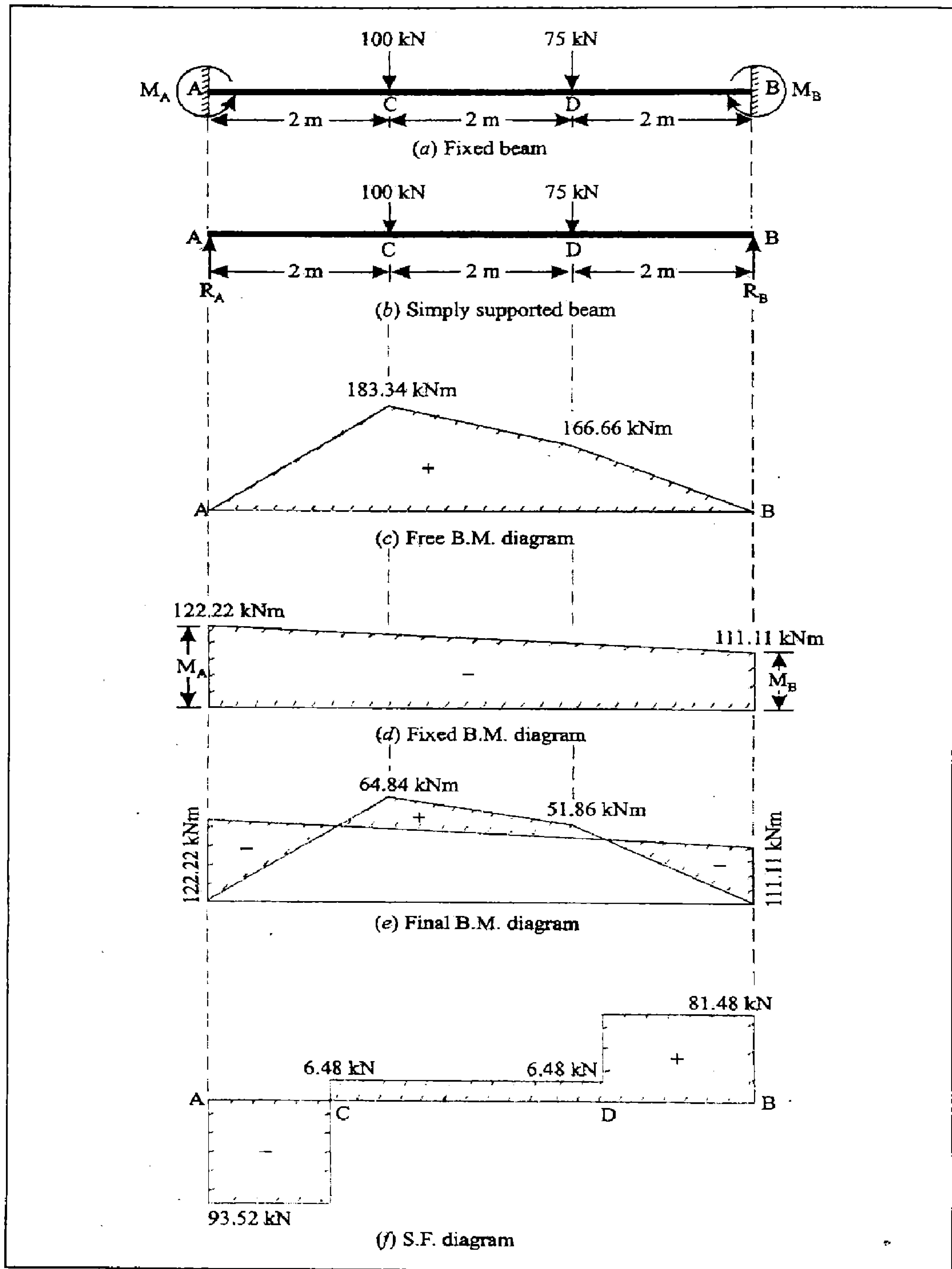
(i) عزوم التثبيت:

عزم التثبيت عند الطرف الأيسر A:

$$M_A = \sum \frac{Wab^2}{l^2} = \frac{100 \times 2 \times 4^2}{6^2} + \frac{75 \times 4 \times 2^2}{6^2} = \mathbf{122{\cdot}22\ kNm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

عزم التثبيت عند الطرف الأيمن B:

$$M_B = \sum \frac{Wa^2b}{l^2} = \frac{100 \times 2^2 \times 4}{6^2} + \frac{75 \times 4^2 \times 2}{6^2} = \mathbf{111{\cdot}11\ kNm} \quad \textbf{(Ans.)}$$



(ii) ردود الأفعال عند الدعامات:

لنأخذ في الاعتبار الكمرة البسيطة الارتكاز الموضحة في الجزء (b) بالشكل التوضيحي السابق.

وبأخذ العزوم حول A، نحصل على الآتي:

$$R_B \times 6 = 100 \times 2 + 75 \times 4 = 500$$

RB = 83.33 kN

وأيضًا:

$$R_A + R_B = 100 + 75 = 175 \text{ kN}$$

إذن:

$$R_A = 175 - 83{\cdot}33 = 91{\cdot}67 \text{ kN}$$

عزم الانحناء عند C = ٩١.٦٧ × ٢ = ١٨٣.٣٤ كيلونيوتن.متر

عزم الانحناء عند D = ٨٣.٣٣ × ٢ = ١٦٦.٦٦ كيلونيوتن.متر

رد الفعل R عند كل دعامة الناتج عن العزوم الطرفية:

$$R = \frac{122{\cdot}22 - 111{\cdot}11}{6} = 1{\cdot}85 \text{ kN}$$

حيث أن MA أكبر من MB فإن رد الفعل R عند A يكون لأعلى ورد الفعل R عند B يكون لأسفل. إذن رد الفعل النهائي عند A يكون:

$$R_{fA} = R_A + R = 91{\cdot}67 + 1{\cdot}85 = 93{\cdot}52 \text{ kN}$$

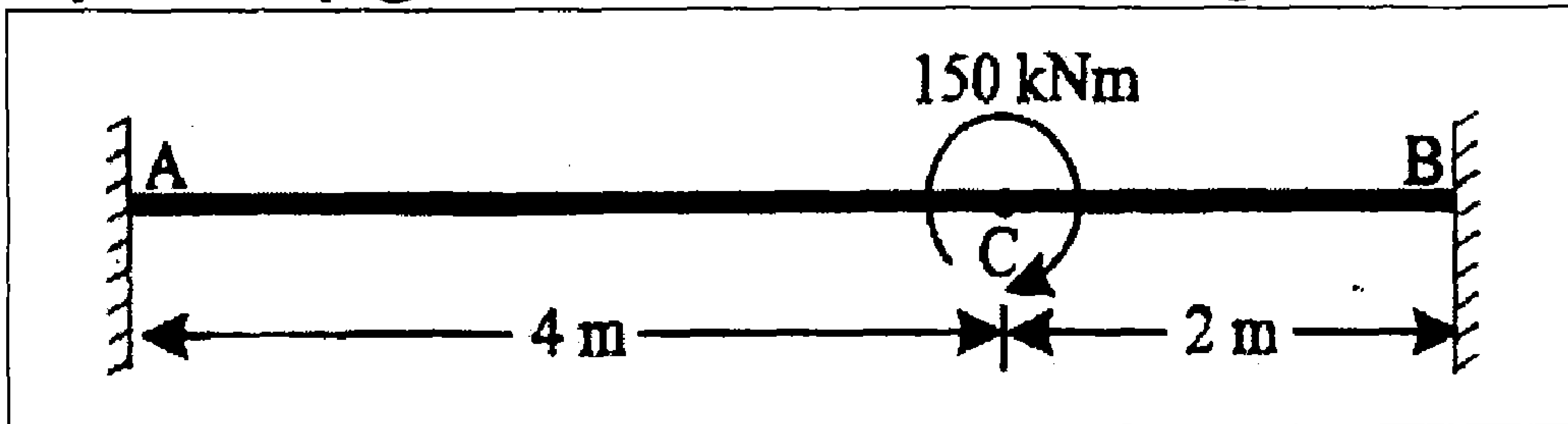
ورد الفعل النهائي عند B يكون:

$$R_{fB} = R_B - R = 83{\cdot}33 - 1{\cdot}85 = 81{\cdot}48 \text{ kN}$$

بدمج ديجرام عزم الانحناء الحر مع ديجرام عزم الانحناء المثبت يتم رسم ديجرام عزم الانحناء النهائي كما هو موضح في الجزء (e) بالشكل التوضيحي السابق. أما ديجرام قوة القص فنشاهده في الجزء (f) بنفس الشكل التوضيحي.

المثال رقم (٣)

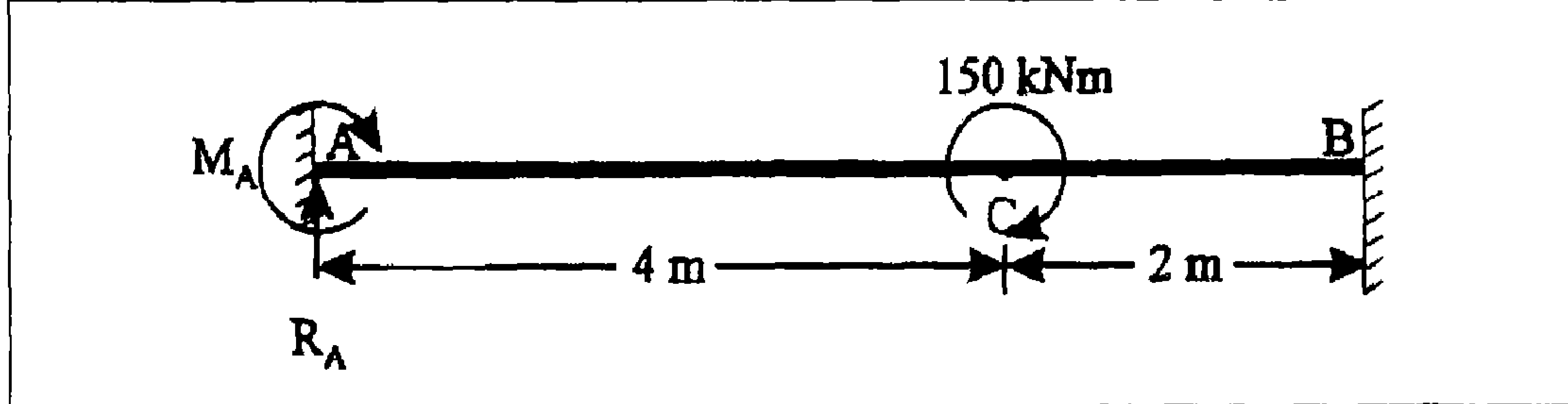
كمرة مثبتة طولها ٦ متر ومعرضة لازدواج في نقطة مقداره ١٥٠ كيلونيوتن.متر وهو مطبق عند مقطع يبعد ٤ متر عن الطرف الأيسر، كما هو موضح في الشكل التالي:



أوجد عزوم الأطراف من خلال المبادئ الأولى وقم أيضًا برسم كل من ديجرام عزم الانحناء وديجرام قوة القص.

الحل

بافتراض أن A هي نقطة الأصل، حينئذ تكون المجاهيل عبارة عن رد الفعل (R_A) والعزم الطرفي (M_A)؛ ولنجعل اتجاهاتهما كما هو موضح في الشكل التالي:



ملاحظة	بعد العمليات الحسابية، لو أن هذه المجاهيل كانت سالبة فإن هذا سيعني أنها تؤثر في اتجاهات مضادة للاتجاهات المفترضة.

الانثناء عند أي مقطع، على مسافة x من الطرف A، يتم حسابه كالآتي:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x + M_A \;\Big|\; +150$$

هذا التعبير الرياضي، لكي يُسهل تطبيق طريقة Macaulay، فإنه يُعاد ترتيبه ليصبح بالصورة التالية:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x + M_A \;\Big|\; +150\,(x-4)^0 \qquad \text{(i)}$$

وبعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على معادلة الميل التالية:

$$EI\,\frac{dy}{dx} = \frac{R_A \cdot x^2}{2} + M_A \cdot x + C_1 \;\Big|\; +150\,(x-4) \qquad \text{(ii)}$$

عندما ($x=0$) و($dy/dx=0$)، إذن ($C_1=0$).

وبعمل تكامل مرة أخرى، نحصل على معادلة الترخيم التالية:

$$EIy = \frac{R_A \cdot x^3}{6} + \frac{M_A \cdot x^2}{2} + C_2 \;\Big|\; +75\,(x-4)^2 \qquad \text{(iii)}$$

عندما ($x=0$) و($y=0$)، إذن ($C_2=0$).

وعندما ($x=6$ m) فإن ($dy/dx=0$) (بما إنه عند B تكون (dy/dx) = صفر).

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة رقم (ii)، نحصل على الآتي:

$$0 = \frac{R_A \times 6^2}{2} + M_A \times 6 + 150\,(6-4)$$

أو:

$$18R_A + 6M_A + 300 = 0$$

أو:

$3R_A + M_A = -50$	(iv)

عند B، الترخيم يكون صفرًا.

إذن، عندما تكون (x=6m) و(y=0) يكون الترخيم صفرًا.

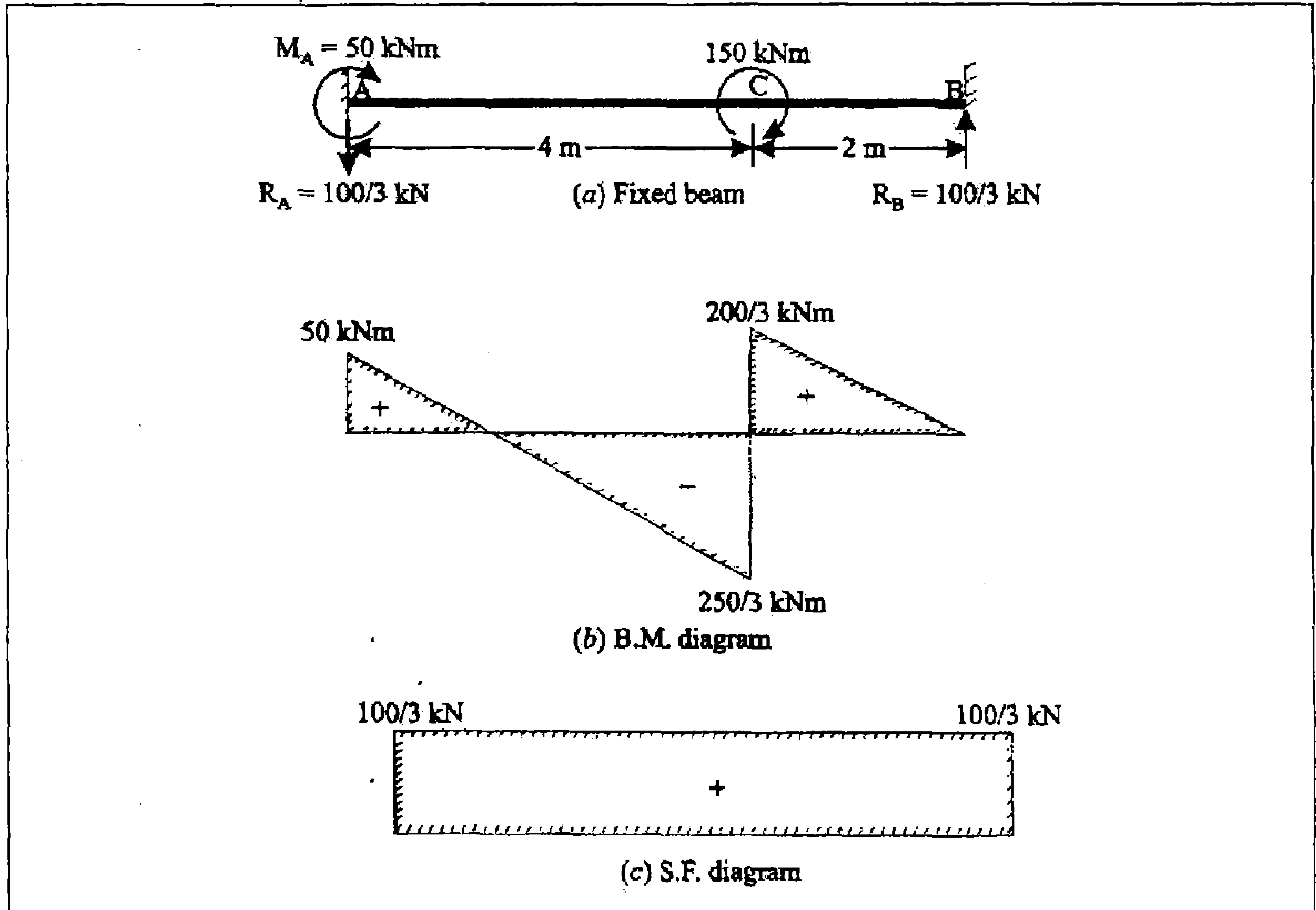
وبالتعويض بتلك القيم في المعادلة رقم (iii)، نحصل على الآتي:

$$0 = \frac{R_A \times 6^3}{6} + \frac{M_A \times 6^2}{2} + 75\ (6-4)^2 = 36R_A + 18M_A + 300$$

أو:

$6R_A + 3M_A = -50$	(v)

وبحل كل من المعادلة (iv) والمعادلة (v)، نجد أن (M_A) = ٥٠ كيلونيوتن.متر وأن (R_A) = −١٠٠/٣ كيلونيوتن، وهذه القيم نشاهدها في الجزء (a) بالشكل التالي:



(a) Fixed beam

(b) B.M. diagram

(c) S.F. diagram

حسابات عزم الانحناء:

$M_A = +50$ kNm (*sagging*)

$M_C^A = 50 - \frac{100}{3} \times 4 = \frac{-250}{3}$ kNm (*hogging*)

$$M_C^B = -\frac{250}{3} + 150 = +\frac{200}{3}\ \text{kNm} \quad (sagging)$$

$$M_B = 50 - \frac{100}{3} \times 6 + 150 = 0$$

في الجزء (b) بالشكل السابق نشاهد ديجرام عزم الانحناء للكمرة.

ديجرام قوة القص:

قوة القص عند أي مقطع بالكمرة = ١٠٠/٣ كيلونيوتن.

في الجزء (c) بالشكل السابق نشاهد ديجرام قوة القص للكمرة.

المثال رقم (٤)

كمرة مثبتة طولها ٦ متر وتحمل حمل موزع بانتظام قدره ٢ كيلونيوتن/المتر الطولي.

لو أن:

$E = 2 * 10^8\ kN/m^2$
$I = 0.48 * 10^{-4}\ m^4$

إذن أوجد الآتي:

(i) عزم الانحناء عند المنتصف.

(ii) أقصى ترخيم.

الحل

طول بحر الكمرة (l) = ٦ متر.

معدل التحميل (w) = ٢ كيلونيوتن/متر.

$E = 2 * 10^8\ kN/m^2$
$I = 0.48 * 10^{-4}\ m^4$

(i) عزم الانحناء عند المنتصف:

نحن نعلم أن عزم الانحناء (النهائي) عند منتصف الكمرة يكون:

$$= \frac{wl^2}{24} = \frac{5 \times 6^2}{24} = \mathbf{7{\cdot}5\ kNm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

(ii) أقصى ترخيم (y_{max}):

$$y_{max} = -\frac{wl^4}{384\,EI}$$

$$y_{max} = -\frac{2 \times 6^4}{384 \times 2 \times 10^8 \times 0{\cdot}48 \times 10^{-4}} \times 10^3\ \text{mm} = \mathbf{-\,0{\cdot}703\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٥)

كمرة مثبتة طولها ٨ متر وتحمل حمل موزع بانتظام قدره ٤٠ كيلونيوتن/متر طولي عبر

جزء قدره ٤ متر من طولها بداية من الطرف الأيسر للكمرة كما إنها تحمل حمل مركز في نقطة قدره ٨٠ كيلونيوتن على مسافة ٦ متر من الطرف الأيسر للكمرة.

المطلوب

إيجاد التالي:

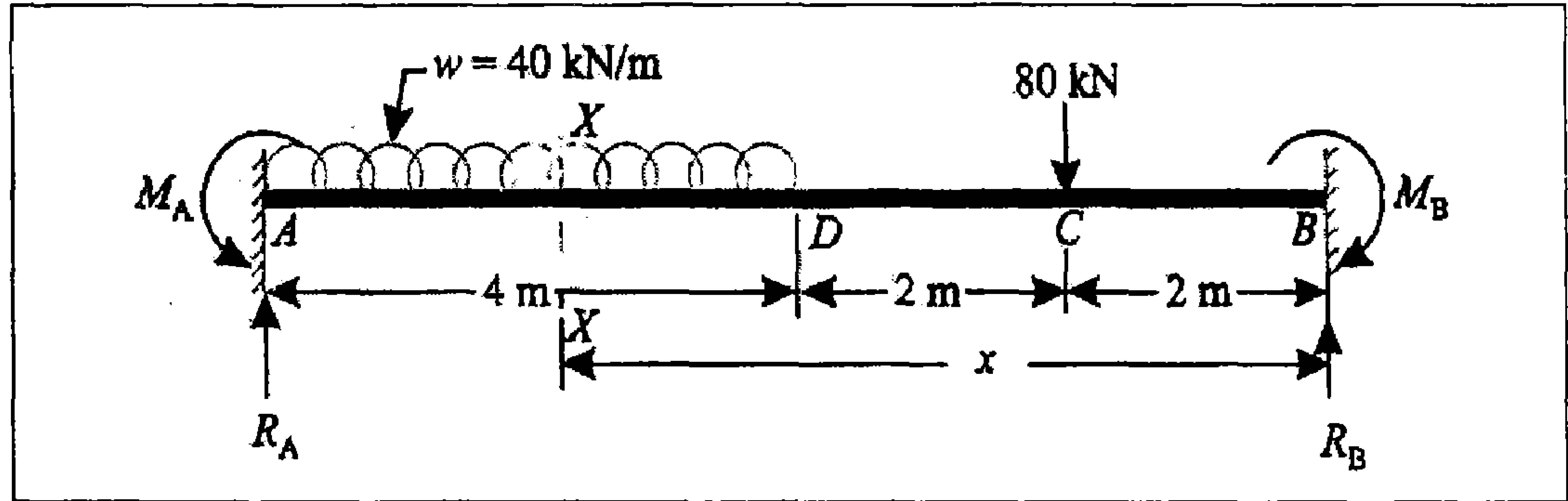
(i) العزوم عند الدعامات.

(ii) الترخيم عند منتصف الكمرة.

$EI = 15000\ kNm^2$

الحل

في الشكل التالي نشاهد الكمرة المثبتة AB التي بحرها ٨ متر وتحمل حمل موزع بانتظام وحمل مركز في نقطة.



لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
R_A	رد الفعل عند الدعامة **A**.
R_B	رد الفعل عند الدعامة **B**.
M_A	العزم عند الدعامة **A**.
M_B	العزم عند الدعامة **B**.

(i) العزوم عند الدعامات (M_A) و(M_B):

بأخذ نقطة الأصل عند B والمسافة x في الاتجاه الموجب ناحية اليسار، ولندرس سويًا مقطع XX على مسافة x من الطرف B في الجزء DA من الكمرة.

لنجعل اتجاه كل من (R_B) و(M_B) كما هو موضح (الاتجاه السالب الذي ينتج في أي حالة قد يعني أن الاتجاه الفعلي يكون عكس الاتجاه المفترض).

عزم الانحناء عند المقطع XX:

$$M = -M_B + R_B \times x - 80\,(x-2) - \frac{w\,(x-4)^2}{2}$$

وبما إن w = ٤٠ كيلونيوتن/متر، إذن:

$$M = -M_B + R_B \times x - 80\,(x-2) - 20\,(x-4)^2$$

أو:

$EI\,\dfrac{d^2y}{dx^2} = -M_B + R_B \times x - 80\,(x-2) - 20\,(x-4)^2$	(i)

وبعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على الآتي:

$$EI\,\frac{dy}{dx} = -M_B\,.\,x + R \times \frac{x^2}{2} - 40\,(x-2)^2 - \frac{20\,(x-4)^3}{3} + C_1$$

حيث أن (C_1) = ثابت التكامل.

عندما (x=0) و(dy/dx=0) عند الطرف المثبت B، إذن (C_1=0).

إذن:

$EI\,\dfrac{dy}{dx} = -M_B\,.\,x + R_B \times \dfrac{x^2}{2} - 40\,(x-2)^2 - \dfrac{20\,(x-4)^3}{3}$	(ii)

وبعمل تكامل المعادلة (ii)، نحصل على الآتي:

$$EIy = -M_B\,.\,\frac{x^2}{2} + R_B\,.\,\frac{x^3}{6} - \frac{40\,(x-2)^3}{3} - \frac{20\,(x-4)^4}{12} + C_2$$

حيث أن (C_2) = ثابت التكامل.

عندما (x=0) و(y=0) عند الطرف المثبت D، إذن (C_2=0).

$EIy = -M_B\,.\,\dfrac{x^2}{2} + R \times \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{40\,(x-2)^3}{3} - \dfrac{20\,(x-4)^4}{12}$	(iii)

عندما (x=8m) (عند الطرف A)، فإن (dy/dx=0) و(y=0).

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة رقم (ii) والمعادلة رقم (iii)، نحصل على الآتي:

$$0 = -8M_B + 32\,R_B - 1440 - \frac{1280}{3}$$

أو:

$$0 = M_B - 4R_B + 180 + \frac{160}{3}$$

أو:

$M_B - 4R_B + \dfrac{700}{3} = 0$	(iv)

كما أن:

$$0 = -32\,M_B + \frac{512}{6}\,R_B - 2880 - \frac{1280}{3}$$

أو:

$$0 = M_B - 8/3\,R_B + 90 + 40/3$$

أو:

$M_B - \frac{8}{3}\,R_B + \frac{310}{3} = 0$	(v)

بحل المعادلتين (iv) و(v)، نحصل على الآتي:

R_B = 97.5 kN
M_B = 156.6 kNm (-)

وأيضًا:

$$R_A + R_B = 40 \times 4 + 80 = 240 \text{ kN}$$

إذن:

$$R_A = 240 - 97{\cdot}5 = 142{\cdot}5 \text{ kN}$$

المعادلة الخاصة بعزم الانحناء:

$$M = -M_B + R_B\,.\,x - 80\,(x-2) - 20\,(x-4)^2$$
$$M = -156{\cdot}6 + 97{\cdot}5 \times x - 80\,(x-2) - 20\,(x-4)^2$$

عندما (x=8m) و($M=M_A$)، إذن:

$$M_A = -156{\cdot}6 + 97{\cdot}5 \times 8 - 80\,(8-2) - 20\,(8-4)^2$$
$$M_A = -156{\cdot}6 + 780 - 480 - 320 = \mathbf{176{\cdot}6\ kNm\ (-)} \quad \mathbf{(Ans.)}$$

(**ii**) الترخيم عند المنتصف (**y_D**):

من المعادلة رقم (iii)، وبوضع (x=4m)، نحصل على الآتي:

$$EIy_D = -M_B \times \frac{4^2}{2} + R_B \times \frac{4^3}{6} - \frac{40\,(4-2)^3}{3} - 0$$
$$EIy_D = -156{\cdot}6 \times 8 + 97{\cdot}5 \times \frac{64}{6} - \frac{320}{3}$$
$$EIy_D = -1252{\cdot}8 + 1040 - 106{\cdot}66 = -319{\cdot}46$$

إذن:

$$y_D = -\frac{319{\cdot}46}{EI} = \frac{319{\cdot}46}{15000} = -0{\cdot}02129 \text{ m} = -21{\cdot}29 \text{ mm}$$

ومن ثم، الترخيم عند المنتصف = ٢١.٢٩ مم (لأسفل).

الفصل العاشر

العناصر الإنشائية القشرية الرقيقة
Thin Shells

في هذا الفصل

- مقدمة عامة.
- العناصر القشرية الاسطوانية الرقيقة.
- العناصر القشرية الكروية الرقيقة.
- الأمثلة العملية.

١٠-١ مقدمة عامة

من أجل تحقيق العديد من المتطلبات، فإنه يتم تخزين الموائع تحت ضغط في أوعية ضغط أو عناصر قشرية وتُنقل من مكان لآخر عبر شبكة من الأنابيب أو المواسير. أوعية الضغط تُصنع من الـ cast iron، وألواح من الصلب وسبائك nonferrous. يتم استخدام مادة خاصة من أجل الأوعية الكيميائية. الأوعية الكروية أو الاسطوانية الشكل يتم استخدامها من أجل تخزين موائع تحت ضغط مثل غلايات البخار، وضواغط الهواء، والخزانات بصفة عامة وخزانات المياه بصفة خاصة. يتم استخدام الأوعية الكروية من أجل احتواء غاز تحت ضغط. والسوائل والغازات التي تحدث ضغط داخلي في وعاء مغلق تسمى موائع fluids. وعندما يكون المائع غازًا، فإن الضغط يكون ثابت في كل أجزاء الوعاء. وفي حالة كون المائع سائل، فإن الضغط يكون منخفض عند القمة ويزداد مع العمق. وعندما تكون الأوعية فارغة، فإنها تكون معرضة لضغط جوي داخليًا وخارجيًا ومن ثم يكون التأثير المحصلة للضغط الجوي معدومًا.

١٠-٢ العناصر القشرية الاسطوانية الرقيقة

أي وعاء اسطواني أو أي عنصر قشري اسطواني يمكن أن يكون رقيقًا أو سميكًا وذلك بناءًا على سمك اللوح بالنسبة للقطر الداخلي للاسطوانة. إن نسبة $\frac{t}{d} = \frac{1}{20}$ تعتبر حد فاصل معقول بين الاسطوانات الرقيقة والاسطوانات السميكة.

في الاسطوانات الرقيقة، يمكن افتراض أن الإجهاد يتوزع بانتظام عبر سمك الجدار. الغلايات، والخزانات، ومواسير البخار، ومواسير الماء وخلافه تعتبر بصفة عامة اسطوانات رقيقة. الاسطوانات الرقيقة تُطلب دائمًا للتشغيل تحت ضغوط تصل إلى ٣٠ ميجانيوتن/م٢ أو أكثر، وبالنسبة للضغوط العالية مثل ٢٥٠ ميجانيوتن/م٢ أو أكثر، يتم استخدام الاسطوانات السميكة.

عندما تتعرض تلك الاسطوانات إلى ضغوط موائع داخلية حينئذ يتم تكوين النوعين التاليين من الإجهادات:

(١) إجهادات حلقية أو محيطية Hoop or circumferential stresses. هذه الإجهادات تؤثر في اتجاه يمس محيط العنصر القشري.

(٢) إجهادات طولية Longitudinal stresses. تلك الإجهادات تؤثر في اتجاه يوازي المحور الطولي للعنصر القشري.

(٣) إجهادات قطرية Radial stresses. هذه الإجهادات تؤثر قطريًا وهي صغيرة جدًا وبالتالي يمكن تجاهلها.

هذه الإجهادات الثلاثة متعامدة على بعضها البعض وتسمى الإجهادات الأساسية.

١٠-٢-١ الإجهادات المحيطية أو الحلقية

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
d	القطر الداخلي للاسطوانة.
t	سمك جدار الاسطوانة.
p	الضغط الداخلي (gauge) في الاسطوانة.
σ_c	الإجهاد المحيطي أو الحلقي.

قوة السحق (الضغط) = قوة المقاومة

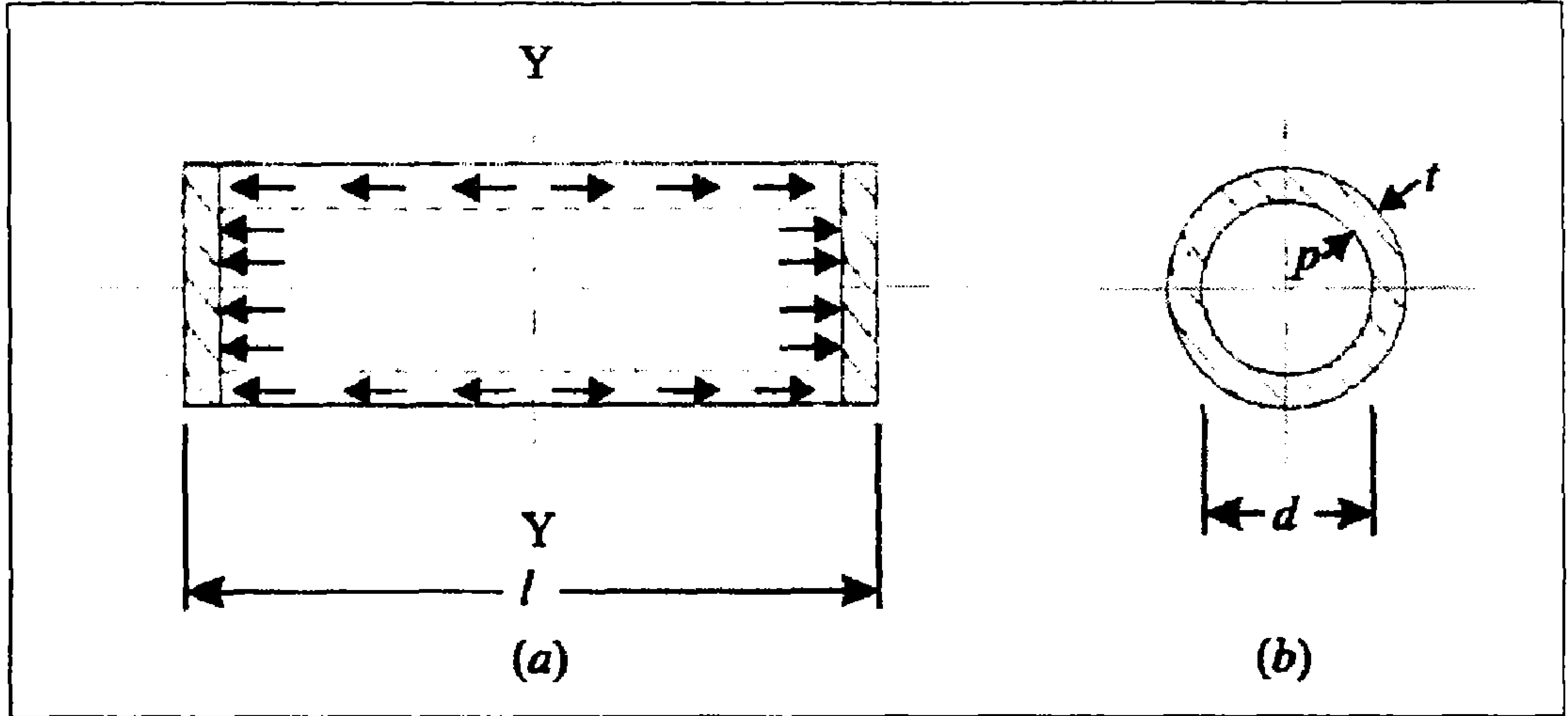
$$pdl = 2lt\,\sigma_c$$

أو، كما هو موضح في الشكل التالي:

$\sigma_c = \dfrac{pd}{2t}$	(10-1)

١٠-٢-٢ الإجهادات الطولية

الآن، لنفترض أن الاسطوانة محل الدراسة مغطاة من كلا الجانبين بألواح، كما هو موضح في الشكل التالي:



لنجعل (σ_l) = الإجهاد الطولي الناتج في العنصر القشري.

والآن، الضغط الواقع على الأطراف = قوة المقاومة

$$p \times \frac{\pi}{4} d^2 = \pi d t . \sigma_l$$

ومنها نحصل على العلاقة التالية:

$\sigma_l = \dfrac{pd}{4t}$	(10-2)

ومن ثم، الإجهاد المحيطي أو الحلقي (σ_c) يكون ضعف الإجهاد الطولي (σ_l) ولا يمكن أبدًا أن يكون الإجهاد الحلقي أكبر من الإجهاد المسموح به في مادة الاسطوانة.

١٠-٢-٣ إجهاد القص الأقصى

في أي عنصر قشري اسطواني، عند أي نقطة على محيطه، توجد مجموعة مؤلفة من إجهادين متعامدين على بعضهما وهما (σ_c) و(σ_l) والذين هما الإجهادات الأساسية ومثل تلك المستويات التي فيها تؤثر هذه الإجهادات تسمى المستويات الأساسية. إجهاد القص الأقصى (τ_{max}) يمكن إيجاده كالآتي:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_c - \sigma_l}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\frac{pd}{2t} - \frac{pd}{4t}}{2} = \frac{pd}{8t}$$

أي أن:

$\tau_{max} = \dfrac{pd}{8t}$	(10-3)

١٠-٢-٤ تصميم العناصر القشرية الاسطوانية الرقيقة

لو أنه يُطلب أن يتم تحديد سمك الجدار لأي عنصر قشري اسطواني بحيث أنه يمكن يقاوم ضغط داخلي محدد (p) إذن ينبغي علينا أن نتأكد من أن الإجهاد الأقصى المتكون في العنصر القشري لا يتعدى إجهاد الشد المسموح به (σ_t) لمادة العنصر القشري. وحيث أن الإجهاد المحيطي أو الحلقي يعتبر أعلى واحد، لذلك، يتم تصميم العنصر القشري على أساس هذا الإجهاد.

والآن:

$$\sigma_c = \frac{pd}{2t}$$

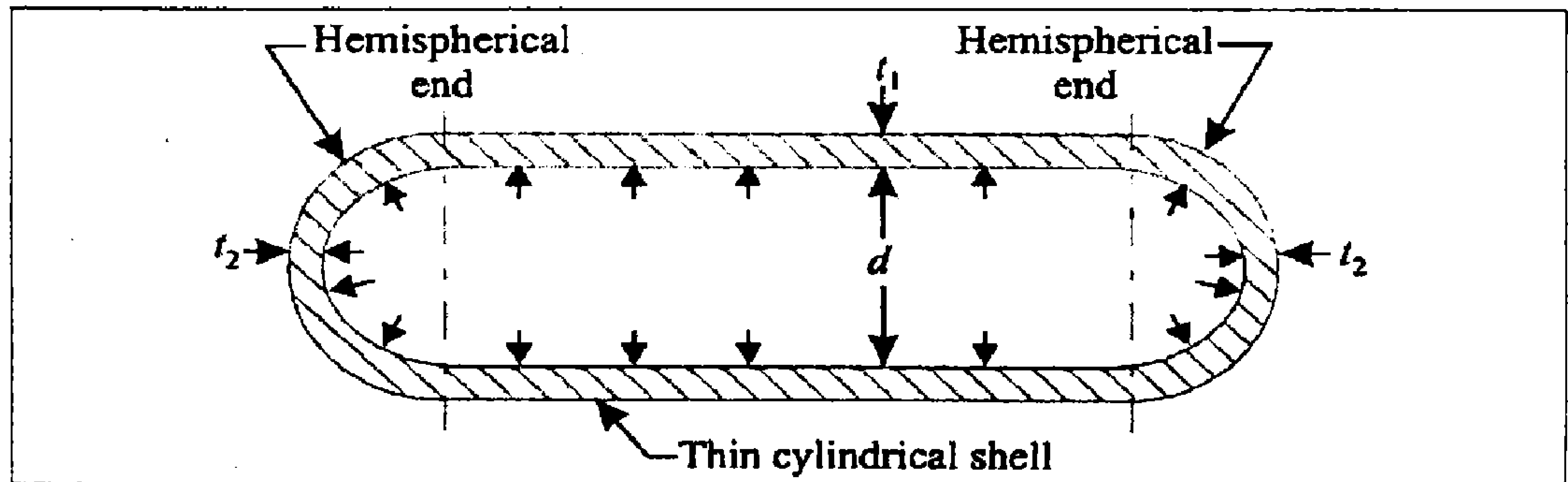
حيث أن (t) عبارة عن السمك المطلوب للعنصر القشري.

ولكن (σ_c) لا تتعدى (σ_t)، إذن:

$\dfrac{pd}{2t} \leq \sigma_t \;\; \text{or} \;\; t \geq \dfrac{pd}{2\sigma_t}$	(10-4)

١٠-٢-٥ عنصر قشري اسطواني ملحوم بطرفيه نصف كرة

في الشكل التالي نشاهد عنصر قشري اسطواني رقيق مزود بنهايات أو أطراف نصف كروية:



لنفترض الآتي:

المعنى والاستخدام	المعامل
القطر الداخلي للاسطوانة.	d
سمك الجدار للجزء الاسطواني.	t_1

سمك الجدار للجزء النصف كروي.	t_2

الإجهاد المحيطي المتكون في الجزء الاسطواني:

$$\sigma_{c_1} = \frac{pd}{2t_1}$$

الإجهاد الطولي في الجزء الاسطواني:

$$\sigma_{l_1} = \frac{pd}{4t_1}$$

الانفعال المحيطي في الجزء الاسطواني:

$$e_{c_1} = \frac{\sigma_{c_1}}{E} - \frac{\sigma_{l_1}}{mE} = \frac{2\sigma_{l_1}}{E} - \frac{\sigma_{l_1}}{mE}$$

أي أن:

$e_{c_1} = \frac{pd}{4t_1 E}\left(2 - \frac{1}{m}\right)$	(i)

الإجهاد المحيطي المتكون في الجزء النصف كروي:

$$\sigma_{c_2} = \frac{pd}{4t_2}$$

الانفعال المحيطي في الجزء النصف كروي:

$$e_{c_2} = \frac{\sigma_{c_2}}{E} - \frac{\sigma_{c_2}}{mE}$$

$e_{c_2} = \frac{pd}{4t_2 E}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$	(ii)

من أجل أنه لا يوجد أي تشوه عند منطقة التقاء الجزء الاسطواني بالجزء النصف كروي، إذن الانفعالات المحيطية ينبغي أن تكون متساوية في الاثنين، أي أن:

$$e_{c_1} = e_{c_2}$$

$$\frac{pd}{4t_1 E}\left(2 - \frac{1}{m}\right) = \frac{pd}{4t_2 E}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

إذن:

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{\left(2 - \frac{1}{m}\right)} = \frac{m-1}{2m-1}$	(10-5)

حيث أن (m-1) تكون دائمًا أقل من (2m-1)، مهما كانت قيمة m، لذلك ستكون (t_2) دائمًا أقل من (t_1)، أي أن الطرف النصف كروي يكون دائمًا أسمك من الجزء الاسطواني.

لهذا، الإجهاد الأقصى قد يكون هو نفسه في كل من الجزء الاسطواني والجزء النصف كروي، ومن ثم يصبح لدينا الآتي:

$$\sigma_{c_1} = \sigma_{c_2}$$

$\frac{pd}{2t_1} = \frac{pd}{4t_2}$ or $\frac{t_2}{t_1} = 0.5$	**(10-6)**

١٠-٢-٦ العناصر القشرية الاسطوانية المبنية Built-up

الصيغ الرياضية التي تمت صياغتها من أجل كل من (σ_c) و(σ_l) يتم التحصل عليها مع الـ presumption بأن العنصر القشري الاسطواني عبارة عن seamless أي أنه solid drawn، ولكن في الواقع العملي، العناصر القشرية الاسطوانية التي بأقطار ضخمة، مثل الغلايات القشرية وغيرها، ليست seamless (بدون وصلات)، ولكن بدلاً من ذلك فإنها تُبنى عن طريق وصلات طولية ومحيطية. الوصلات الطولية تقلل قوة المقاومة للوح القشري ضد الـ bursting في حين أن الوصلات المحيطية تقلل قوة مقاومة للوح للـ tearing الناتج عن الضغط على الألواح الطرفية.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
η_l	فاعلية الوصلة الطولية.
η_c	فاعلية الوصلة المحيطية.

إذن، قوة السحق Bursting force = قوة المقاومة، أي أن:

$pdl = 2lt\ \sigma_c\ \eta_l$ or $\sigma_c = \frac{pd}{2t\eta_l}$	**(10-7)**

وبالمثل، الضغط الواقع على الأطراف = قوة المقاومة، أي أن:

$p \times \frac{\pi}{4} d^2 = \pi d.t.\sigma_l.\eta_c$ or $\sigma_l = \frac{pd}{4t\eta_c}$	**(10-8)**

١٠-٢-٧ التغير في أبعاد عنصر قشري اسطواني رقيق بسبب الضغط الداخلي

أي عنصر قشري اسطواني سوف يزداد طوله بسبب الإجهادات المحيطية والطولية بالإضافة إلى undergo تغير في الأبعاد ينتج عنه تغير في حجمه.

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
l	طول العنصر القشري.
d	قطر العنصر القشري.
t	سمك جدار العنصر القشري.
p	شدة الضغط.
1/m	نسبة بواسون = الانفعال العرضي / الانفعال الطولي

الانفعال المباشر الناتج عن الإجهاد المحيطي (σ_c) = (σ_c)/ E.

الانفعال المباشر الناتج عن الإجهاد الطولي (σ_l) = (σ_l)/ E.

الانفعال المحيطي الصافي (e_c) = الانفعال المباشر - الانفعال العرضي الناتج عن الانفعال المباشر [(σ_l)/ E]، أي أن:

$$e_c = \frac{\delta d}{d} = \frac{\sigma_c}{E} - \frac{1}{m}\frac{\sigma_l}{E} = \frac{\sigma_c}{E} - \frac{\sigma_c}{2mE}, \text{ since } \sigma_l = \frac{\sigma_c}{2}$$

$e_c = \frac{\sigma_c}{E}\left(1 - \frac{1}{2m}\right) = \frac{pd}{2tE}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)$	**(10-9)**

الانفعال الطولي الصافي:

$$e_l = \frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma_l}{E} - \frac{1}{m}\frac{\sigma_c}{E} = \frac{\sigma_l}{E} - \frac{2\sigma_l}{mE} \qquad (\because\ \sigma_c = 2\sigma_l)$$

$e_l = \frac{pd}{4tE}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$	**(10-10)**

الانفعال الحجمي (e_v) = المجموع الجبري للانفعالات الصافية في كل المحاور = الانفعال الطولي الصافي + ٢ × الانفعال المحيطي الصافي

$$e_v = e_l + 2e_c$$

تم أخذ ضعف الانفعال المحيطي الصافي لأنه يؤثر في تغيير قطر العنصر القشري، وعلى الأخص في اتجاه كل من محور XX ومحور YY. وأيضًا:

(e_v) = التغير في الحجم / الحجم الأصلي = δV/V، إذن:

$$\delta V = e_v \times V = (e_l + 2e_c)\, V$$

$$\delta V = \left[\frac{pd}{4tE}\left(1 - \frac{2}{m}\right) + 2 \times \frac{pd}{2tE}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\right] V$$

$$\delta V = \frac{pd}{2tE}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)+\left(2-\frac{1}{m}\right)\right]V$$

$$\delta V = \frac{pdV}{2tE}\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{m}\right)$$	(10-11)

حيث أن:

$$V = \frac{\pi}{4}d^2 l$$

التغيرات في كل من الطول (δl) والقطر (δd) يمكن إيجادها من المعادلتين رقم (١٠-٩) ورقم (١٠-١٠) كالآتي:

$$\delta d = e_1 \times d = \frac{pd}{2tE}\left(1-\frac{1}{2m}\right)\times d$$

$$\delta d = \frac{pd^2}{2tE}\left(1-\frac{1}{2m}\right)$$	(10-12)
$$\delta l = e_2 \times l = \frac{pd}{4tE}\left(1-\frac{2}{m}\right)l = \frac{pdl}{4tE}\left(1-\frac{2}{m}\right)$$	(10-13)

هذه الصيغ الرياضية تعطي نتائج جيدة عند استخدامها في حالة الـ seamless shells.	ملاحظة

١٠-٢-٨ الاسطوانات المطعمة بالسلك Wire Wound Cylinders

عندما يكون العنصر القشري الاسطواني الرقيق معرض لضغط مائع داخلي، حينئذ يتم تكوين إجهاد شد محيطي، ويكون ضعف الإجهاد الطولي. ومن ثم، التغييرات في الضغط على الاسطوانة طوليًا تكون أكبر من التغييرات الخاصة بالانهيار المحيطي للاسطوانة. وبالتالي، من الضروري أن يتم تقوية الاسطوانة طوليًا للأغراض التالية:

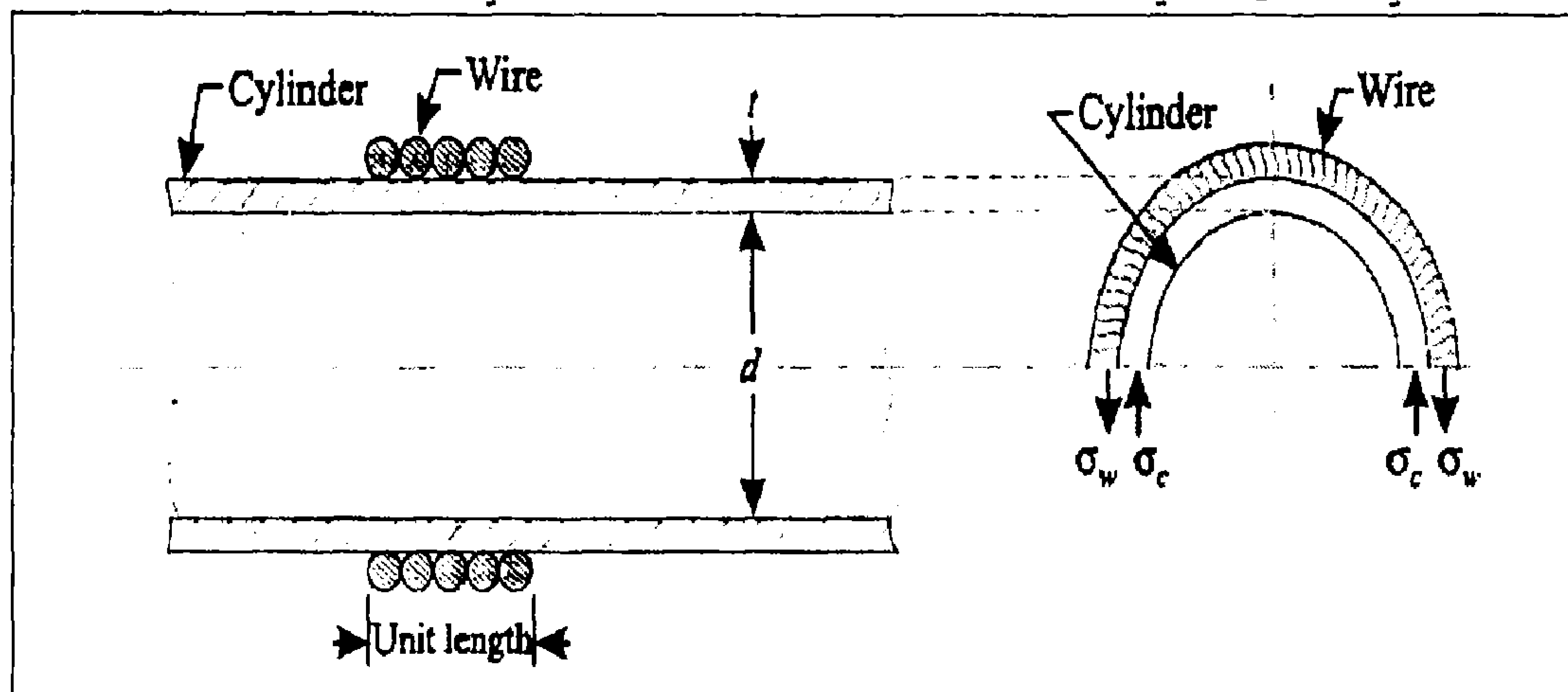
(i) لزيادة قدرة تحمل الاسطوانة للضغط.

(ii) لتقليل التغييرات في الـ burst الطولي.

ولكي تتحقق هذه الأهداف، يتم تطعيم الاسطوانة بطبقات من السلك المعرضة للشد. إن لف السلك بشدة حول الاسطوانة مع كونه نفسه في حالة شد يؤدي إلى حدوث ارتفاع في الإجهادات الانضغاطية في الاسطوانة لتصل إلى قيم كبيرة تعادل إجهادات الشد في العنصر القشري الاسطواني. إن ضغط المائع داخل العنصر القشري لا يؤدي إلى زيادة إجهادات الشد الابتدائية في السلك الملفوف حول الاسطوانة.

الإجهاد المحيطي المحصلة في الاسطوانة يكون مجموع إجهاد الانضغاط الابتدائي الناتج عن لف السلك وإجهاد الشد الزائد الناتج عن الضغط الداخلي. الإجهاد المحيطي المحصلة في السلك يكون مجموع إجهادي الشد المتكونين بسبب (i) التطعيم بسلك في حالة الشد و(ii) الضغط الداخلي في الاسطوانة. ومن ثم تزداد قدرة تحمل العنصر القشري الاسطواني على تحمل الضغط.

في الشكل التالي نشاهد اسطوانة ملفوف حولها سلك في حالة شد.



لنفترض الآتي:

المعنى والاستخدام	المعامل
قطر الاسطوانة.	d
سمك جدار الاسطوانة.	t
قطر السلك.	d_w
عدد لفات السلك في كل وحدة من الطول = $1/(d_w)$.	n
الشد الابتدائي في السلك.	σ_w
إجهاد الضغط المحيطي المتكون في الاسطوانة.	σ_c
الإجهاد المحيطي المتكون في الاسطوانة عندما تكون معرضة لضغط داخلي (p).	σ'_c
الإجهاد المتكون في السلك (عندما تكون الاسطوانة معرضة لضغط داخلي (p).	σ'_w

σ'_l	الإجهاد الطولي المتكون في الاسطوانة عندما تكون معرضة لضغط داخلي p.

قبل ضخ المائع داخل الاسطوانة

قوة الشد التي يبذلها السلك لكل وحدة طول:

$$= 2 \times \frac{\pi}{4} d_w^2 \times \sigma_w \times n$$

قوة الضغط المتكونة في الاسطوانة:

$$= 2 \times t \times (1) \times \sigma_c = 2\sigma_c . t$$

من أجل الاتزان:

$$2\sigma_c . t = 2 \times \frac{\pi}{4} d_w^2 \times \sigma_w \times n$$

ولكن:

$$n = \frac{1}{d_w}$$

إذن:

$$2\sigma_c . t = 2 \times \frac{\pi}{4} d_w^2 \times \sigma_w \times \frac{1}{d_w}$$

إذن:

$\sigma_c = \frac{\pi d_w}{4t} . \sigma_w$	(10-14)

بعد ضخ المائع داخل الاسطوانة

عندما يكون السلك المحيط بالاسطوانة معرض لضغط داخلي، يصبح لدينا الآتي:

من أجل الاتزان، قوة السحق الطولية:

$$= p \times \frac{\pi}{4} d^2 = \sigma'_l \times \pi d t$$

أو:

$\sigma'_l = \frac{pd}{4t}$	(10-15)

قوة السحق القطرية لكل وحدة طول:

$$= p.d.l$$

$$= \sigma'_c \times 2t \times 1 + \sigma'_w \times 2 \times \frac{\pi}{4} d_w^2 \times \frac{1}{d_w} \qquad \text{(for equilibrium)}$$

أو:

$pd = \sigma'_c \times 2t + \sigma'_w \times \frac{\pi d_w}{2}$	(10-16)

وأيضًا، من أجل الاتزان:

الانفعال المحيطي في الاسطوانة = الانفعال المحيطي في السلك، ومن ثم:

$$\frac{\sigma'_c}{E_c} - \frac{\sigma'_l}{mE_c} = \frac{\sigma'_w}{E_w}$$

$\frac{\sigma'_c}{E_c} - \frac{pd}{4\ tmE_c} = \frac{\sigma'_w}{E_w}$	(10-17)

حيث إن:

المعنى والاستخدام	المعامل
معامل يانج لمادة الاسطوانة.	E_C
معامل يانج لمادة السلك.	E_W
نسبة بواسون للاسطوانة.	1/m

الإجهادات (σ'_c) و(σ'_w) يمكن حسابها من المعادلات (١٠-١٦) و(١٠-١٧) على الترتيب.

الإجهاد المحصلة في السلك:

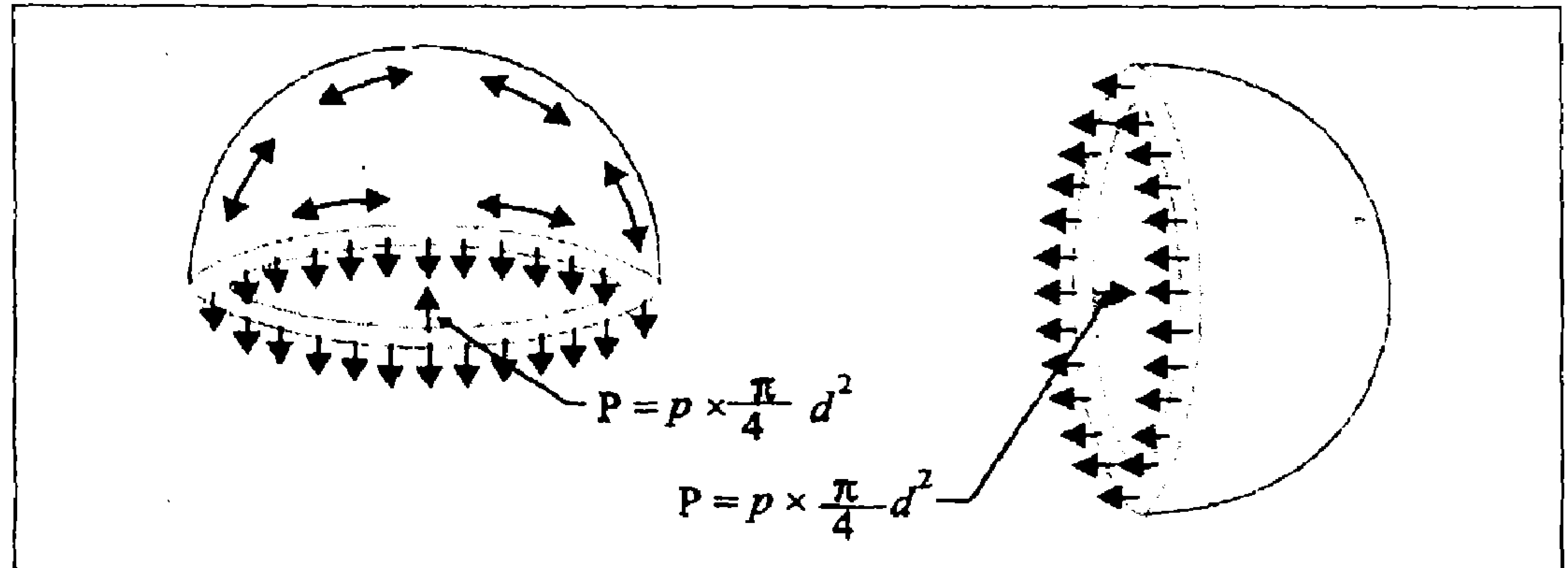
$= \sigma_w + \sigma_w'$	(10-18a)

الإجهاد المحيطي المحصلة في الاسطوانة:

$= \sigma'_c - \sigma_c$	(10-18b)

١٠-٣ العناصر القشرية الكروية Spherical Shells

انظر الشكل التالي:



حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
d	قطر العنصر القشري الكروي.
t	سمك جدار العنصر القشري.
p	شدة الضغط.
σ_c	الإجهاد المحيطي (الحلقي) الناتج.

الآن، قوة الـ Bursting = قوة المقاومة

$$p \times \frac{\pi}{4} d^2 = \pi dt.\sigma_c$$

أو:

(10-19)	$\sigma_c = \frac{pd}{4t}$

هذه المعادلة الخاصة بالإجهاد تكون صحيحة في حالة واحدة فقط وهي عندما يكون العنصر القشري seamless، ولكن في حالة كونه built-up، إذن:

(10-20)	$\sigma_c = \frac{pd}{4t\eta}$

حيث أن (η) عبارة عن فاعلية الوصلة.

التغير في الأبعاد

الانفعال في أي محور مستوى قطري:

$$e = \frac{\delta d}{d} = \frac{\sigma_c}{E} - \frac{\sigma_c}{mE}$$

(10-21)	$e = \frac{\sigma_c}{E}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{pd}{4tE}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$

حيث أن (e_v) = المجموع الجبري للانفعالات في كل المحاور الثلاثة

$$e_v = e + e + e = 3e$$

وأيضًا:

$$e_v = \frac{\delta V}{V}$$

أو:

$$\delta V = e_v \times V = 3e \times V$$

$$\delta V = \frac{3pd}{4tE}\left(1-\frac{1}{m}\right)\times V$$

حيث أن:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \ \text{or} \ \frac{\pi d^3}{6}$$

التغير في القطر يمكن إيجاده من المعادلة (١٠-٢١) كالآتي:

$\delta d = \frac{pd}{4tE}\left(1-\frac{1}{m}\right)\times d = \frac{pd^2}{4tE}\left(1-\frac{1}{m}\right)$	**(10-23)**

١٠-٤ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

عنصر قشري اسطواني رقيق قطره ٣٠٠ مم وسمك الجدار ٦ مم وله أطراف نصف كروية. لو أنه لا يوجد تشوه في منطقة الالتقاء تحت تأثير الضغط إذن حدد سمك الأطراف النصف كروية. خذ البيانات التالية:

E = 208 GN/m^2
Poisson's ratio = 0.3

الحل

قطر العنصر القشري الاسطواني الرقيق (d) = ٣٠٠ مم.

سمك الجزء الاسطواني (t_1) = ٦ مم.

نسبة بواسون (1/m) = ٠.٣ أو m = ٣.٣٣٣.

معامل المرونة (E) = ٢٠٨ جيجانيوتن/م٢.

سمك الأطراف النصف كروية (t_2):

من أجل كون عدم وجود تشوه عند منطقة التقاء الجزء الاسطواني والجزء النصف كروي، إذن:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{m-1}{2m-1} = \frac{3{\cdot}333-1}{2\times 3{\cdot}333-1} = 0{\cdot}4117$$

$$t_2 = 0{\cdot}4117\times t_1 = 0{\cdot}4117\times 6 = 2{\cdot}47 \ \text{mm} = \mathbf{2{\cdot}47\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٢)

احسب الـ **bursting pressure** بالنسبة لأنبوبة قشرية من الصلب مسحوبة على البارد قطرها الداخلي ٦٠ مم وسمك جدارها ٢ مم. القوة النهائية للصلب عبارة عن ٣٨٠ ميجانيوتن/م٢.

الحل

قطر الأنبوبة (d) = ٦٠ مم = ٠.٠٦ متر.

سمك جدار الأنبوبة (t) = ٢ مم = ٠.٠٠٢ متر.

الإجهاد النهائي (σ_c) = ٣٨٠ ميجانيوتن/م٢.

ال Bursting pressure (p):

باستخدام العلاقة التالية:

$$\sigma_c = \frac{pd}{2t}$$

يصبح لدينا الآتي:

$$380 \times 10^6 = \frac{p \times 0{\cdot}06}{2 \times 0{\cdot}002}$$

أو:

$$p = \frac{380 \times 10^6 \times 2 \times 0{\cdot}002}{0{\cdot}06} \times 10^{-6}\ \text{MN/m}^2 = \mathbf{25{\cdot}33\ MN/m^2} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٣)

احسب سمك المعدن المطلوب لـ **cast-iron main** قطره ٨٠٠ مم يتعرض لضغط مياه قدره ١٠٠ م لو أن إجهاد الشد الأقصى المسموح به عبارة عن ٢٠ ميجانيوتن/م٢ ووزن الماء عبارة عن ١٠ كيلونيوتن/م٣.

الحل

قطر الـ cast-iron main (d) = ٨٠٠ مم = ٠.٨ متر.

الإجهاد الأقصى المسموح به (σ_c) = ٢٠ ميجانيوتن/م٢.

وزن الماء (w) = ١٠ كيلونيوتن/م٣.

سمك المعدن (t):

نحن نعلم أن:

p = w*h

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
w	الوزن النوعي للماء.
h	**head** الماء في الـ **main**.

إذن:

$$p = 10 \times 10^3 \times 100 = 10^6 \text{ N/m}^2 \text{ or } 1 \text{ MN/m}^2$$

وباستخدام العلاقة التالية:

$$\sigma_c = \frac{pd}{2t}$$

إذن يمكن حساب السمك كالآتي:

$$t = \frac{pd}{2\sigma_c} = \frac{1 \times 10^6 \times 0{\cdot}8}{2 \times 20 \times 10^6} = 0{\cdot}02 \text{ m or } \mathbf{20\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}.$$

المثال رقم (٤)

خزان مياه اسطواني ارتفاعه ٢٥ متر، وقطره الداخلي ٢.٥ متر، وله محور رأسي يكون مفتوحًا عند القمة. الخزان مصنوع من صلب له إجهاد خضوع قدره ٢١٠ ميجانيوتن/م٢. حدد سمك الصلب المستخدم عندما يكون الخزان ممتلئ بالماء تمامًا. خذ الآتي:

- فاعلية الاتصال الطولي = ٧٠%.
- معامل الأمان = ٣.

الحل

معامل الأمان = إجهاد الخضوع / الإجهاد العامل = ٢١٠/٣ = ٧٠ ميجانيوتن/م٢.

الضغط سيصل إلى الحد الأقصى عند القاعدة. هذا الضغط ينبغي أن يُقاوم باللوح الصلب ومن ثم ينبغي أن يتحدد السمك عن طريق أخذ الضغط الأقصى في الاعتبار.

الضغط عند القاعدة:

p = w*h
p = 10 * 10³ * 25 * 10⁻⁶ MN/m² (w = 10 kN/m³)
p = 0.25 MN/m²

حيث أن الخزان مفتوح عند القمة، إذن سيكون هناك hoop (أو إجهاد محيطي) فقط والذي لا ينبغي أن يتعدى في أي حالة من الحالات الإجهاد العامل.

نحن نعلم أن:

$$\sigma_c = \frac{pd}{2t\eta_l}$$

$$70 \times 10^6 = \frac{0{\cdot}25 \times 10^6 \times 2{\cdot}2}{2 \times t \times 0{\cdot}7}$$

إذن:

$$t = \frac{0{\cdot}25 \times 10^6 \times 2{\cdot}2}{70 \times 10^6 \times 2 \times 0{\cdot}7} = 0{\cdot}0056 \text{ m or } 5{\cdot}6 \text{ mm say } \mathbf{6\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٥)

غلاية قشرية مصنوعة من لوح سمكه ١٥ مم له إجهاد شد قدره ١٢ ميجانيوتن/م٢. لو أن فاعليات الوصلات الطولية والمحيطية عبارة عن ٧٠% و٣٠% على الترتيب، إذن حدد الآتي:

(i) أقصى قطر مسموح به للـ **shell** من أجل ضغط داخلي قدره ٢ ميجانيوتن/م٢.

(ii) الشدة المسموح بها للضغط الداخلي عندما يكون قطر الـ **shell** عبارة عن ١.٥ متر.

الحل

(i) أقصى قطر مسموح به للـ **shell** من أجل ضغط داخلي قدره ٢ ميجانيوتن/م٢:

نفترض أن (d) = أقصى قطر مسموح به.

لنعتبر أن الإجهاد المحيطي عبارة عن ١٢٠ ميجانيوتن/م٢، ومن ثم:

$$\sigma_c = \frac{pd}{2t\eta_l}$$

$$120 \times 10^6 = \frac{2 \times 10^6 \times d}{2 \times 15 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}7}$$

$$d = \frac{120 \times 10^6 \times 2 \times 15 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}7}{2 \times 10^6} = 1{\cdot}26 \text{ m}$$

ولنعتبر الإجهاد الطولي أنه ١٢٠ ميجانيوتن/م٢، ومن ثم:

$$\sigma_l = \frac{pd}{4t\eta_c}$$

$$120 \times 10^6 = \frac{2 \times 10^6 \times d}{4 \times 15 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}3}$$

$$d = \frac{120 \times 10^6 \times 4 \times 15 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}3}{2 \times 10^6} = 1{\cdot}08 \text{ m}$$

من أجل تحقيق كلا الشرطين، فإن القطر الأقصى (d) = ١.٠٨ متر (الحد الأدنى فوق القيمتين).

ملاحظة

لو أننا أخذنا القطر الأكبر (أي ١,٢٦ متر) إذن الإجهاد الطولي يكون:

$$\sigma_l = \frac{pd}{4t\eta_c} = \frac{2\times10^6\times1\cdot26}{4\times15\times10^{-3}\times0\cdot3} = 140\ \text{MN/m}^2$$

وهذا سيكون أكبر من الإجهاد المسموح به (١٢٠ ميجانيوتن/م٢).

(ii) الشدة المسموح بها للضغط الداخلي عندما يكون قطر الـ **shell** عبارة عن ١.٥ متر:

مرة أخرى نقول أن $\sigma_c = \dfrac{pd}{2t\eta_l}$ ، ومن ثم:

$$120\times10^6 = \frac{p\times1\cdot5}{2\times15\times10^{-3}\times0\cdot7}$$

$$p = \frac{120\times10^6\times2\times15\times10^{-3}\times0\cdot7}{1\cdot5} = 1\cdot68\ \text{MN/m}^2$$

وأيضًا:

$$\sigma_l = \frac{pd}{4t\eta_c}$$

ومن ثم:

$$120\times10^6 = \frac{p\times1\cdot5}{4\times15\times10^{-3}\times0\cdot3}$$

إذن:

$$p = \frac{120\times10^6\times4\times15\times10^{-3}\times0\cdot3}{1\cdot5} = 1\cdot44\ \text{MN/m}^2$$

ومن ثم، الكثافة المسموح بها للضغط (p) = ١.٤٤ ميجانيوتن/م٢ (أصغر القيمتين).

الفصل الحادي عشر

العناصر الإنشائية القشرية السميكة
Thick Shells

في هذا الفصل

- الاسطوانات السميكة.
- العناصر القشرية السميكة.
- الأمثلة العملية

١١-1 الاسطوانات السميكة

١١-١-١ مقدمة عامة

الاسطوانات السميكة عبارة عن أوعية اسطوانية تحتوي على مائع تحت ضغط وسمك جدارها ليس صغيرًا $(t \geq d/20)$.

- بخلاف العناصر القشرية الرقيقة، فإنه لا يتم تجاهل الإجهاد القطري في سمك الجدار، فهو يتغير من السطح الداخلي حيث يكون مساويًا لمقدار ضغط المائع إلى السطح الخارجي حيث عادة ما يكون مساويًا للصفر لو أنه معرض للضغط الجوي.
- الإجهاد المحيطي يتباين أيضًا عبر تخانة الجدار.
- التباين في أنصاف الأقطار بالإضافة إلى الإجهادات المحيطية عبر السمك يتم التحصل عليه بمساعدة نظرية Lame.

١١-١-٢ نظرية Lame

الفرضيات التي أُتخذت في نظرية Lame عبارة عن الآتي:

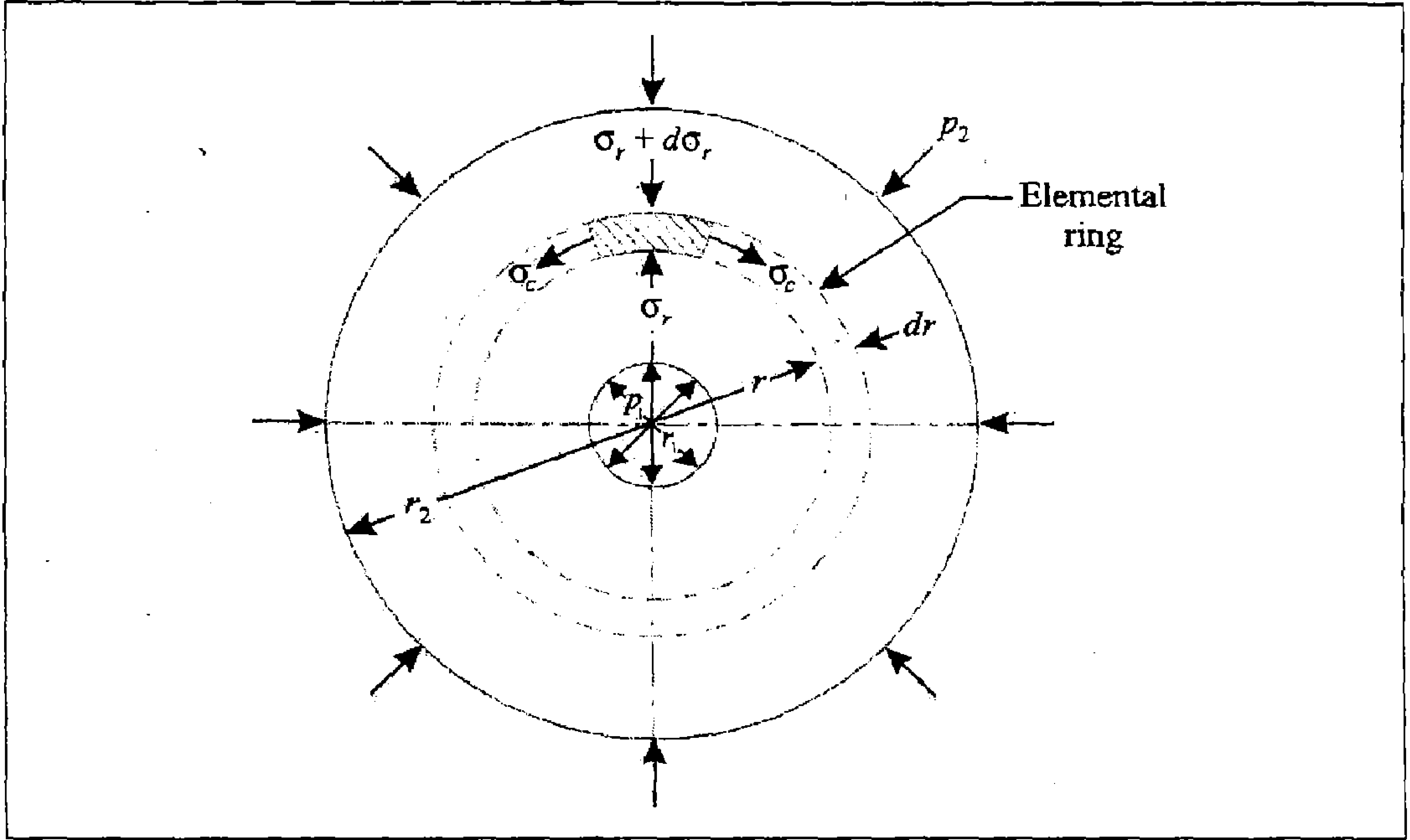
(١) المادة متجانسة homogeneous ومتحدة الخصائص في جمع الاتجاهات isotropic.

(٢) المقاطع المستوية المتعامدة على المحور الطولي للاسطوانة تبقى مستوية بعد تطبيق الضغط الداخلي.

(٣) المادة تُصاب بالإجهاد داخل حد المرونة.

(٤) كل ألياف المادة تكون حرة للتمدد أو الانكماش بصفة مستقلة بدون كونها مقيدة بالألياف المجاورة.

في الشكل التالي نشاهد اسطوانة سمكية معرضة لإجهاد قطري داخلي وخارجي (ضغط).



لندرس حلقة عنصرية نصف قطرها الداخلي r وسمكها dr، ولنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
r_1	نصف القطر الداخلي للاسطوانة السميكة.
r_2	نصف القطر الخارجي للاسطوانة السميكة.
l	طول الاسطوانة.
p_1	الضغط الواقع على السطح الداخلي للاسطوانة.
p_2	الضغط الواقع على السطح الخارجي للاسطوانة.
σ_r	الإجهاد القطري الداخلي (ضغط) على الحلقة العنصرية.
$(t \geq d/20)$	الإجهاد القطري الخارجي (ضغط) على الحلقة العنصرية.
σ_c	الإجهاد المحيطي على الحلقة العنصرية.

الشروط الخاصة بالاتزان على نصف الحلقة العنصرية (مثل الشروط التي في حالة الاسطوانة الرقيقة) عبارة عن الآتي:

قوة السحق bursting force:

$$(\sigma_r \times 2rl) - [(\sigma + d\sigma_r) \times 2(r + dr)l] = 2l[-\sigma_r\, dr - rd\sigma_r - dr\,.\, d\sigma_r] = -2l(\sigma_r dr + r\, d\sigma_r)$$

(بتجاهل ناتج ضرب الكميات الصغيرة)

قوة المقاومة:

$$= 2\sigma_c\, l\, dr$$

بمساواة قوة المقاومة مع قوة السحق (من أجل الاتزان)، نحصل على الآتي:

$$2\,\sigma_c \,.\, l \,.\, dr = -2l\,(\sigma_r dr + r d\sigma_r)$$

أو:

$\sigma_c = -\sigma_r - r\cdot\dfrac{d\sigma_r}{dr}$	**(11-1)**

والآن، لنتحصل على علاقة أخرى بين الإجهاد القطري (الضغط) والإجهاد المحيطي (أو الحلقي) عن طريق استخدام الشرط الذي ينص على أن الانفعال الطولي (e_l) عند أي نقطة في المقطع لا يتغير.

الإجهاد الطولي:

$$\sigma_l = \frac{p_1 \times \pi\, r_1^2}{\pi\,(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{p_1\, r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

ومن ثم، عند أي نقطة في مقطع الحلقة العنصرية، تتواجد الإجهادات الثلاثة الأساسية التالية:

(i) الاجهاد القطري (ضغط)، (σ_r).

(ii) الإجهاد المحيطي، (σ_c).

(iii) إجهاد الشد الطولي، (σ_l).

حيث أن الانفعال الطولي (e_l) ثابت، فنحن لدينا الآتي:

$$e_l = \frac{\sigma_l}{E} - \frac{\sigma_c}{mE} + \frac{\sigma_r}{mE} = \text{constant}$$

(حيث أن (1/m) عبارة عن نسبة بواسون).

ولكن، حيث أن كل من إجهاد الشد الطولي (σ_l)، وm وE ثوابت، إذن:

$$\sigma_c - \sigma_r = \text{constant}$$

ولنجعل:

$\sigma_c - \sigma_r = 2a$	**(11-2)**

وبوضع $\sigma_c = (\sigma_r + 2a)$ في المعادلة رقم (١١-١)، نحصل على الآتي:

$$(\sigma_r + 2a) = -\sigma_r - r\,.\,\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{2\,(\sigma_r + a)}{r}$$

$\dfrac{d\sigma_r}{\sigma_r + a} = -\dfrac{2\,dr}{r}$	**(11-3)**

وبتكامل كلا الطرفين، نحصل على الآتي:

$$\log_e(\sigma_r + a) = -2\log_e r + \log_e b$$

(حيث أن ($\log_e b$) عبارة عن ثابت التكامل). إذن:

$$\log_e(\sigma_r + a) = \log_e \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_r + a = \frac{b}{r^2}$$

$\sigma_r = \frac{b}{r^2} - a$	**(11-4)**

وأيضًا، من المعادلة رقم (١١-٢)، نحصل على الآتي:

$\sigma_c = \frac{b}{r^2} + a$	**(11-5)**

المعادلات أرقام (١١-٤) و(١١-٥) تسمى معادلات Lame.

الثوابت a وb يمكن الحصول عليها من البيانات المعلومة وهي الضغط القطري الداخلي، والضغط القطري الخارجي، ونصف القطر.

في المعادلات السالفة الذكر، يمكن ملاحظة أن (σ_r) عبارة عن إجهاد ضغط وأن (σ_c) عبارة عن إجهاد شد.

الإشارات المتفق عليها

الإجهاد المحيطي (أو الحلقي) سيؤخذ موجب الإشارة لو أنه شد وسيؤخذ أنه سالب الإشارة لو أنه ضغط، في حين أن إجهاد الضغط القطري سيؤخذ موجب الإشارة أما إجهاد الشد القطري فسيؤخذ سالب الإشارة.

١١-١-٢-١ حالات خاصة

الحالة (I): الضغط الخارجي (p_2) والضغط الخارجي (p_1)

عند $r = r_1, \sigma_r = p_1$، وعند $r = r_2, \sigma_r = p_2$.

وبالتعويض في المعادلة (١١-٤)، نحصل على الآتي:

$p_1 = \frac{b}{r_1^2} - a$	**(i)**
$p_2 = \frac{b}{r_2^2} - a$	**(ii)**

والآن، من (i) و(ii)، نحصل على الآتي:

$b = \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}(p_1 - p_2)$	**(11-6a)**
$a = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$	**(11-6b)**

وبالتعويض من المعادلة رقم (١١-٦) في المعادلتين (١١-٤) و(١١-٥)، نحصل على الآتي:

$\sigma_r = \frac{1}{(r_2^2 - r_1^2)}\left[(p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}(p_1 - p_2)\right]$	**(11-7)**
$\sigma_c = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}(p_1 - p_2)\right]$	**(11-8)**

الحالة (II): الضغط الداخلي = (p_1) والضغط الخارجي = صفر

عندما يوجد ضغط داخلي فقط ويكون السطح الخارجي للاسطوانة معرض للضغط الجوي، إذن:

عند $r = r_1, \sigma_r = p_1$، وعند $r = r_2, \sigma_r = p_2 = 0$. وبالتعويض في المعادلة رقم (١١-٤)، نحصل على الآتي:

$p_1 = \frac{b}{r_1^2} - a$	**(i)**
$p_2 = \frac{b}{r_2^2} - a = 0$	**(ii)**

من (i) و(ii)، نحصل على الآتي:

$b = p_1\left[\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]$	**(11-9a)**
$a = p_1\left[\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]$	**(11-9b)**

وبالتعويض من المعادلة (١١-٩) في المعادلتين (١١-٤) و(١١-٥)، نحصل على الآتي:

$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[\frac{r_2^2}{r^2} - 1\right]$	**(11-10)**
$\sigma_c = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[\frac{r_2^2}{r^2} + 1\right]$	**(11-11a)**

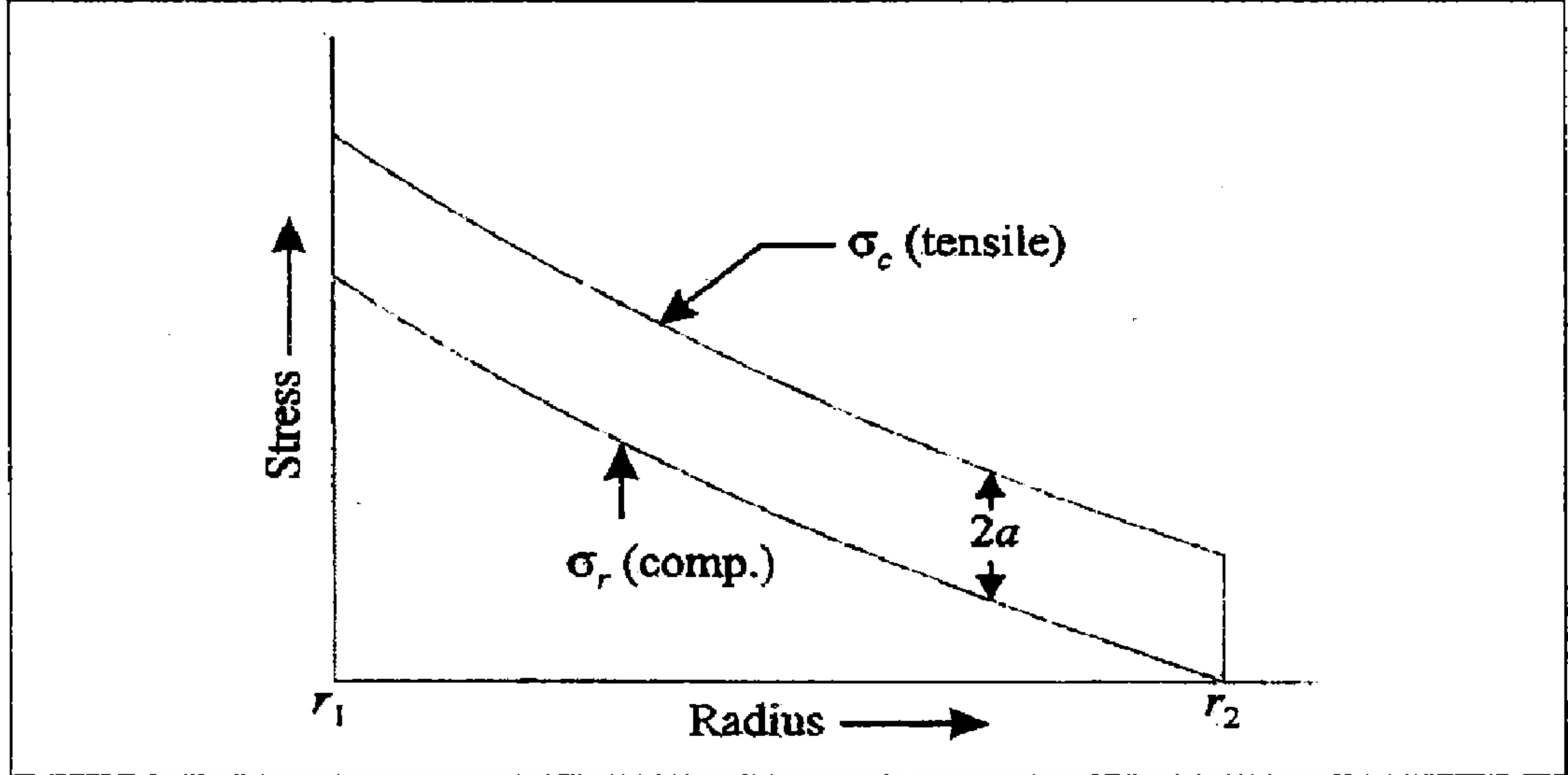
عند ($r=r_1$)، فإن

$$(\sigma_c)_{r_1} = p_1 \cdot \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

عند ($r=r_2$)، فإن

$$(\sigma_c)_{r_2} = p_1 \cdot \frac{2\, r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

في الشكل التالي نشاهد العلاقة البيانية بين الإجهاد ونصف القطر. من هذا الرسم البياني يتضح أن القيم القصوى لكل من (σ_r) و(σ_c) تحدث عند السطح الداخلي.



بعد ذلك بالنسبة للاسطوانة المغلقة من الجانبين، فإن الإجهاد الطولي يكون:

$\sigma_l = \dfrac{p_1\ \pi r_1^2}{\pi\,(r_2^2 - r_1^2)} = \dfrac{p_1\ r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = a$	**(11-11b)**

الحالة (III): الضغط الخارجي = p_2 والضغط الداخلي = صفر

عند ($r=r_1$) فإن ($\sigma_r=0$)، وعند ($r=r_2$) فإن ($\sigma_r=p_2$). وبالتعويض في المعادلة رقم (١١-٤)، نحصل على الآتي:

$0 = \dfrac{b}{r_1^2} - a$	**(i)**

$p_2 = \dfrac{b}{r_2^2} - a$	**(ii)**

من المعادلتين (i) و(ii)، يكون لدينا الآتي:

$b = -\dfrac{p_2 r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}$	**(11-12a)**

$a = -\dfrac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$	**(11-12b)**

إذن، الإجهاد المحيطي (أو الحلقي) الأقصى يكون عند نصف القطر (r_1) ومن المعادلة رقم (١١-٥) يمكن حساب الإجهاد المحيطي (أو الحلقي) الأقصى كالآتي:

$\sigma_c = -p_2\left(\dfrac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)$	**(11-13)**

الحالة (IV): عمود دائري مصمت معرض لضغط خارجي (p_2)

نحن نعلم أن:

$$\sigma_r = \frac{b}{r^2} - a$$

$$\sigma_c = \frac{b}{r^2} + a$$

وحيث أن كل من (σ_r) و(σ_c) غير متناهين عند ($r=0$)، فإنه هذا يؤدي إلى وجوب أن تكون b صفرًا وبالتالي:

$\sigma_r = -a$	**(11-14a)**
$\sigma_c = a$	**(11-14b)**

١١-١-٢-٢ الإجهادات الطولية والقص

في حالة اسطوانة مغلقة من الجانبين، يتم حساب إجهاد الشد الطولي (بافتراض أنه ثابت عبر المقطع العرضي) كالآتي:

(σ_l) = القوة المؤثرة في الطرف المغلق بسبب الضغط الداخلي / مساحة المقطع العرضي للاسطوانة

$\sigma_l = \dfrac{\pi\, r_1^2 \cdot p}{\pi\,(r_2^2 - r_1^2)} = \left[\dfrac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right] p$	**(11-15)**

بعد ذلك، لو أنه لا يوجد لي واقع على الاسطوانة، إذن ستكون (σ_c) و(σ_r) و(σ_l) الإجهادات الأساسية، مع كون (σ_r) إجهاد ضغط وكل من (σ_c) و(σ_l) عبارة عن إجهادات شد. علاوة على ذلك فإن (σ_c) تكون أكبر من (σ_l). ومن ثم يمكن حساب إجهاد القص الأقصى كالآتي:

$$\tau_{max} = \left[\frac{\sigma_c - (-\sigma_r)}{2}\right]$$

وبما إن (σ_r) عبارة عن إجهاد ضغط، إذن:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b}{r^2} + a\right) - \left(a - \frac{b}{r^2}\right)\right]$$

أي أن:

$\tau_{max} = \frac{b}{r^2}$	(11-16)

ومن ثم، فإن القيمة القصوى المطلقة لـ (τ_{max}) ستكون على السطح الداخلي، ولكنها ستؤثر على المستوى الذي يميل على المحور الطولي بزاوية ٤٥ درجة.

١١-١-٣ تصميم خزان اسطواني قشري رقيق

نحن نعلم أن القيم القصوى لكل من (σ_c) و(σ_r) تحدث عند نصف القطر الداخلي (r_1). ومن ثم، عند أي نصف قطر (r)، الإجهادات الأساسية الثلاثة تكون كالآتي:

(i) إجهاد قطري (σ_r) (ضغط).

(ii) إجهاد محيطي (σ_c) (شد)، ويتم حسابه كالآتي:

$$\sigma_c = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left[\frac{r_2^2}{r_1^2} + 1\right]$$

وبما إن $K = \frac{r_2}{r_1}$ ، إذن:

$$\sigma_c = p_1\left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right] = P_1 \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}$$

(iii) إجهاد طولي (σ_l) (شد)، ويتم حسابه كالآتي:

$$\sigma_l = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{p_1}{K^2 - 1}$$

الإجهاد المحيطي (σ_c) هو الأكبر من بين الإجهادات الثلاثة الأساسية السالفة الذكر.

إن النسبة الآمنة لسمك الجدار إلى قطر جوف الأنبوبة بالنسبة لضغط محدد، يمكن إيجادها على أساس أي نظرية من نظريات الانهيار المرن الخمسة التالية.

(١) معيار الإجهاد الأساسي الأقصى

لو أن (σ) عبارة عن الإجهاد البسيط بالنسبة للانهيار المرن، إذن:

$\sigma_r\left(\frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}\right) \le \sigma$	(11-17)

(٢) معيار الانفعال الأساسي الأقصى

الانفعال الأقصى:

$$e_c = \frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_r}{mE} - \frac{\sigma_l}{mE}$$

إذن:

$$\sigma = e_c\, E \geq \left(\sigma_c + \frac{\sigma_r}{m} - \frac{\sigma_l}{m} \right)$$

$$\sigma \geq \sigma_r \left[\frac{K^2+1}{K^2-1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{K^2-1} \right]$$

أو:

$\sigma \geq \sigma_r \left[\frac{K^2+1}{K^2-1} + \frac{1}{m} \cdot \frac{K^2-2}{K^2-1} \right]$	**(11-18)**

لو أنه لا يوجد إجهاد طولي في العنصر القشري، حينئذ سيكون لدينا الآتي:

$\sigma = e_c E \geq \sigma_r \left[\frac{K^2+1}{K^2-1} + \frac{1}{m} \right]$	**(11-19)**

(٣) معيار إجهاد القص الأقصى

الشدة القصوى للقص:

$$= \frac{\sigma_c + \sigma_r}{2} = \frac{\sigma_r}{2} \left[\frac{K^2+1}{K^2-1} + 1 \right] = \frac{\sigma_r}{2} \cdot \frac{2K^2}{K^2-1}$$

ومن ثم:

$\frac{\sigma}{2} \geq \frac{\sigma_r}{2} \frac{2K^2}{K^2-1}$ or $\sigma \geq \sigma_r \cdot \frac{2K^2}{K^2-1}$	**(11-20)**

(٤) طاقة الانفعال القصوى

نحن نعلم أن طاقة الانفعال (U) لكل وحدة حجم تحت تأثير الإجهادات الأساسية الثلاثة يتم حسابها من خلال العلاقة التالية:

$$U = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_1\, \sigma_2 + \sigma_2\, \sigma_3 + \sigma_3\, \sigma_1) \right]$$

وبالتعويض بالآتي:

$$\sigma_1 = \sigma_c = \sigma_r \left[\frac{K^2+1}{K^2-1} \right], \sigma_2 = \sigma_r$$

وبالآتي أيضًا:

$$\sigma_3 = \sigma_l = \sigma_\tau \cdot \frac{1}{K^2 - 1}$$

فإننا نحصل على الآتي:

$$U = \frac{\sigma_r^2}{2E} \frac{\left[2\left(1 + \frac{1}{m}\right)K^4 + 3\left(1 - \frac{2}{m}\right)\right]}{(K^2 - 1)^2}$$

الطاقة الخاصة بإجهاد شد واحد:

$$\sigma = \frac{\sigma^2}{2E}$$

ومن ثم نحصل على هذا المعيار في الصورة التالية:

$\sigma \geq \sigma_r \cdot \frac{\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)K^4 + 3\left(1 - \frac{1}{m}\right)}}{K^2 - 1}$	**(11-21)**

وبالمثل، يمكن إيضاح أن لو كانت (σ_l) مهملة حينئذ يصبح لدينا الآتي:

$\sigma \geq \frac{\sigma_r \sqrt{2\left(1 + \frac{1}{m}\right)K^4 + 2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}}{(K^2 - 1)}$	**(11-22)**

(٥) طاقة انفعال القص القصوى

يمكن إيضاح أن طاقة انفعال القص U لكل وحدة حجم عبارة عن:

$$\frac{\sigma_r^2}{2E} \cdot \frac{3K^4}{(K - 1)^2}$$

ومن ثم:

$\sigma \geq \sigma_r \frac{\sqrt{3K^4}}{(K^2 - 1)}$	**(11-23)**

لو أن (σ_l) مهملة حينئذ يصبح لدينا الآتي:

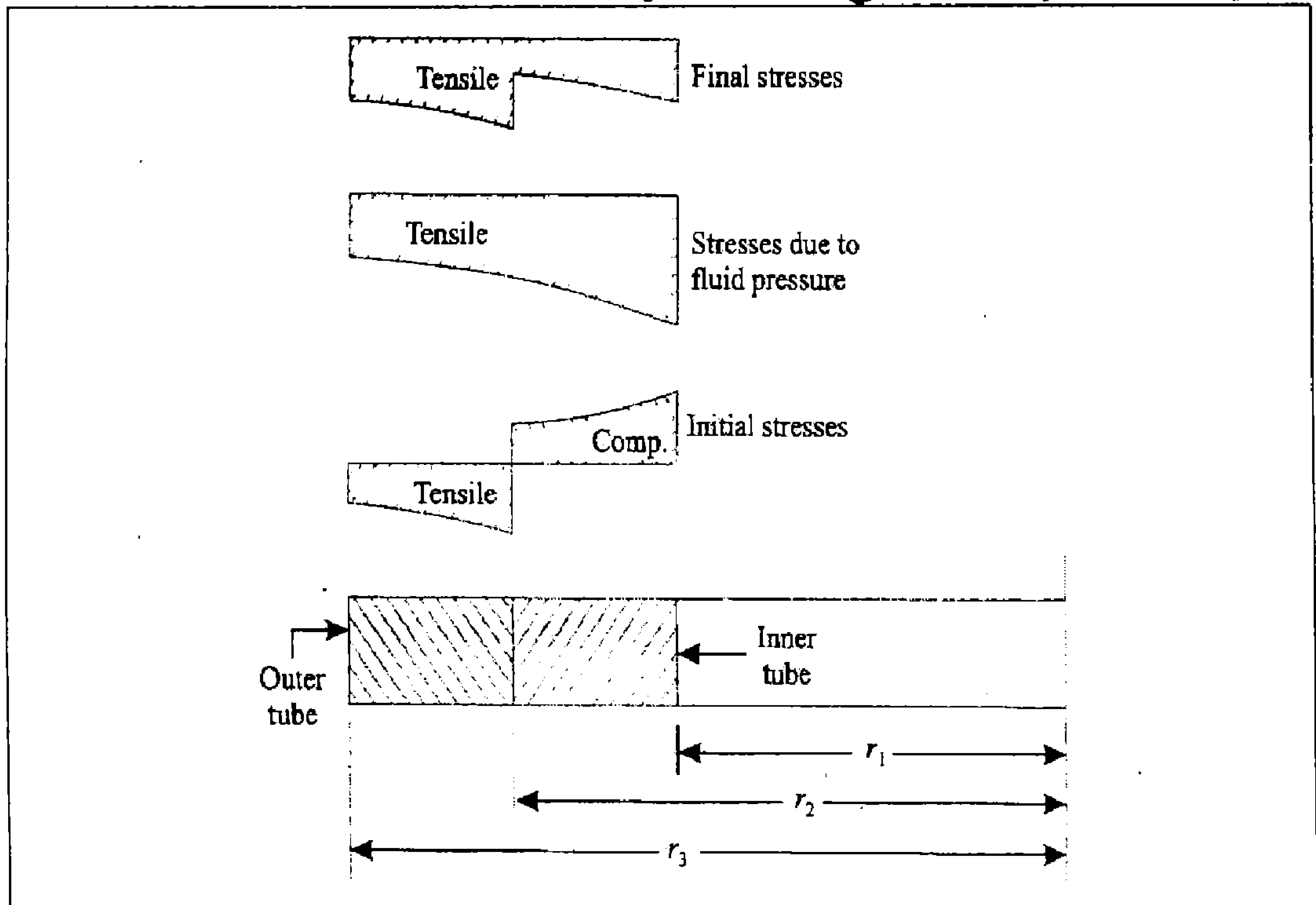
$\sigma \geq \sigma_r \frac{\sqrt{3K^4 + 1}}{(K^2 - 1)}$	**(11-24)**

١١-١-٤ الاسطوانات المطوقة بالانكماش Shrunk Cylinders

لقد رأينا في حالة الاسطوانات الرقيقة أنه عندما تكون الاسطوانة محاطة بسلك مشدود، فإن العنصر القشري بأكمله سيكون في حالة انضغاط ابتدائية؛ ولكن عندما يُضخ مائع فإن الإجهاد المحيطي (أو الحلقي) ينقص. هذه الطريقة يمكن استخدامها أيضًا في حالة الاسطوانات السميكة لتقليل الإجهاد المحيطي الأقصى.

هناك طريقة أخرى عادة ما تُستخدم من أجل تصميم ماسورة المسدس وهي جعل أنبوبة تنكمش على أنبوبة أخرى. وعن طريق جعل هناك فرق ابتدائي مناسب في أنصاف الأقطار المشتركة، حينئذ يمكن تكوين ضغط الانكماش المطلوب عند منطقة الالتقاء.

- ضغط الانكماش الابتدائي (p') سوف يحدد كل من إجهادات الانضغاط المحيطية الابتدائية في الأنبوبة الداخلية وإجهادات الشد المحيطية الابتدائية في الأنبوبة الخارجية.
- عند دخول المائع، سوف يُقاوم الضغط الداخلي وصليًا بواسطة كل من الأنبوبة الداخلية والأنبوبة الخارجية. وبسبب ضغط المائع، سوف تتكون إجهادات شد محيطية في كل من الأنبوبة الداخلية والأنبوبة الخارجية.
- الإجهادات المحيطية (أو الحلقية) في الأنابيب ستكون المجموع الجبري للإجهادات الابتدائية والإجهادات الناتجة عن ضغط المائع.
- في الشكل التالي نشاهد توزيع الإجهادات في الاسطوانة المحاطة (المطوقة بالانكماش):



الإجهادات الابتدائية

لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
r_2	نصف القطر عند السطح المشترك.

ضغط الانكماش.	p

وبالنسبة للأنبوبة الداخلية فإن:

المعنى والاستخدام	المعامل
نصف القطر الداخلي.	r_1
نصف القطر الخارجي.	r_2

فيما يلي معادلات Lame:

$\sigma_r = \frac{b}{r^2} - a$	(1)
$\sigma_c = \frac{b}{r^2} + a$	(2)

عند $(r=r_1)$ فإن $(\sigma_r=0)$ وعند $(r=r_2)$ فإن $(\sigma_r=p)$ ومن ثم:

$\frac{b}{r^2} - a = 0$	(i)
$\frac{b}{r_2^2} - a = p$	(ii)

وبالنسبة للأنبوبة الخارجية فإن:

المعنى والاستخدام	المعامل
نصف القطر الداخلي.	r_2
نصف القطر الخارجي.	r_3

ومن ثم:

$\sigma_r = \frac{b'}{r^2} - a'$	(3)
$\sigma_c = \frac{b'}{r^2} + a'$	(4)

عند $(r=r_3)$ فإن $(\sigma_r=0)$ وعند $(r=r_2)$ فإن $(\sigma_r=p)$ ومن ثم:

$\frac{b'}{r_3^2} - a' = 0$	(iii)
$\frac{b'}{r_2^2} - a' = p$	(iv)

الثوابت الأربعة a, b, a', b' يمكن إيجادها من المعادلات الأربعة i, ii, iii, iv؛

ويمعلومية الثوابت الأربعة، حينئذ يمكن إيجاد الإجهادات المحيطية الابتدائية من المعادلتين رقم (٢) ورقم (٤).

الإجهادات الناتجة عن ضغط المائع

في الاسطوانة المحاطة بالانكماش، عندما يُسمح للمائع بالدخول، فإن شدة الضغط تُقاوم وصليًا بواسطة المقطع العرضي للاسطوانة المحاطة بالانكماش. وعن طريق تطبيق معادلات Lame على الاسطوانة المحاطة بالانكماش (تحت تأثير ضغط داخلي)، نحصل على الآتي:

$\sigma_r = \frac{b}{r^2} - a$	(i)
$\sigma_c = \frac{b}{r^2} + a$	(ii)
At, $r = r_1$, $\sigma_r = p_1$;	(iii)
At, $r = r_3$, $\sigma_r = 0$	(iv)

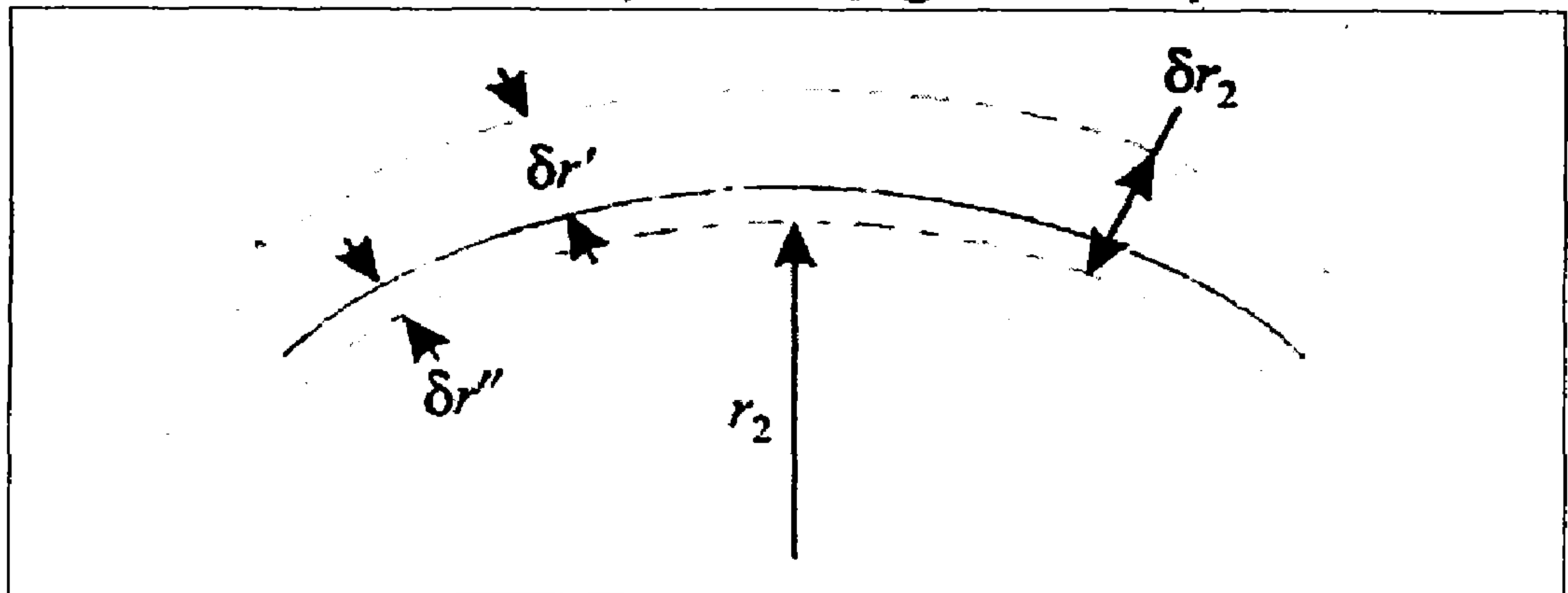
الثابتان a, b يمكن حسابهما من المعادلتين iii, iv. وبالتالي، يمكن حساب شدة الإجهاد المحيطي الناتج عن ضغط المائع.

الإجهادات النهائية

الإجهادات النهائية (في الاسطوانة المحاطة بالانكماش) = الإجهادات الابتدائية + الإجهادات الناتجة عن ضغط المائع.

١١-١-٥ الفرق الضروري في أنصاف الأقطار من أجل الانكماش

من أجل إيجاد الفرق الضروري بين أنصاف الأقطار من أجل الانكماش لنتابع العمل كما هو مذكور فيما يلي وكما هو موضح في الشكل التالي:



لنفترض الآتي:

المعامل	المعنى والاستخدام
r_2	نصف القطر المشترك بين الأنابيب عند منطقة الالتقاء بعد حدوث الانكماش.
$\delta r'$	الفرق بين نصف القطر الخارجي للأنبوبة الداخلية و(r_2).
$\delta r''$	الفرق بين نصف القطر الداخلي للأنبوبة الخارجية و(r_2).

لو أن (δr_2) عبارة عن الفرق بين أنصاف الأقطار قبل حدوث الانكماش، إذن نحصل على الآتي:

$\delta r_2 = \delta r' + \delta r''$	(i)

بالنسبة للأنبوبة الداخلية؛ يتم حساب الانفعال المحيطي (وهو ضغط) عند نصف القطر المشترك (r_2) كالآتي:

$\frac{\delta r'}{r_2} = \frac{1}{E}\left[\left(\frac{b}{r_2^2} + a\right) + \frac{p}{m}\right]\text{comp.}$	(ii)

وبالمثل، بالنسبة للأنبوبة الخارجية، يتم حساب الانفعال المحيطي (وهو شد) عند نصف القطر المشترك (r_2) كالآتي:

$\frac{\delta r''}{r_2} = \frac{1}{E}\left[\left(\frac{b'}{r_2^2} + a'\right) + \frac{p}{m}\right]$	(iii)

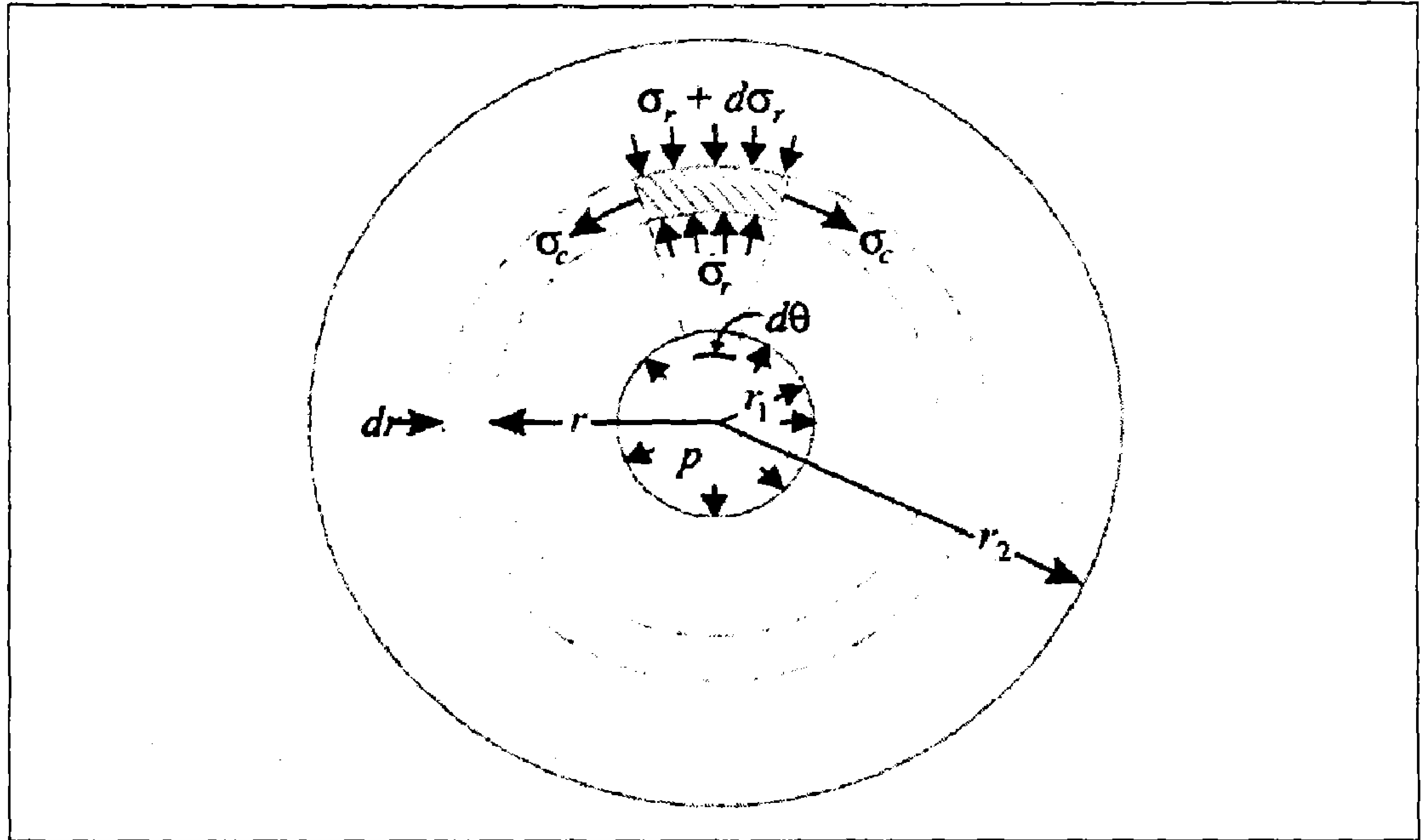
من المعادلتين (ii) و(iii)، يصبح لدينا الآتي:

$\frac{\delta r' + \delta r''}{r_2} = \frac{\delta r_2}{r_2} = \frac{1}{E}\left[\left(\frac{b'}{r_2^2} + a'\right) - \left(\frac{b}{r_2^2} + a\right)\right]$	(11-25)

ومن ثم، الفرق الأصلي بين أنصاف الأقطار عند نصف قطر نقطة الالتقاء (r_2)، قبل حدوث الانكماش، مقسومًا على (r_2) يساوي الفرق الجبري بين الإجهادات المحيطية للأنبوبتين عند منطقة الالتقاء مقسومًا على E.

١١-٢ العناصر القشرية الكروية السميكة

في الشكل التالي نشاهد عنصر قشري كروي سميك:



والآن، لنفترض الآتي:

الرمز	المعنى والاستخدام
r_1	نصف القطر الداخلي.
r_2	نصف القطر الخارجي.
p	الضغط الداخلي.
σ_r	إجهاد الانضغاط القطري عند أي نصف قطر (r).
$\sigma_r + d\sigma_r$	إجهاد الانضغاط القطري عند نصف القطر (r + dr).
σ_c	إجهاد الشد المحيطي (المتساوي في كل الاتجاهات المتعامدة على نصف القطر).

لندرس سويًا القوى الواقعة على جزء صغير من عنصر قشري كروي نصف قطره r وسمكه dr، لنقوم بتكوين معادلة تربط بين الإجهادات الأساسية (σ_r) و(σ_c).

يتم حساب قوة الانفجار bursting الواقعة على أي مستوى قطري على مقطع الجزء القشري كالآتي:

$$= \sigma_r \cdot \pi r^2 - (\sigma_r + d\sigma_r)\, \pi\, (r + dr)^2$$

أما قوة المقاومة فيتم حسابها كالآتي:

$$= \sigma_c \times 2\pi r\, dr$$

وبمساواة قوة المقاومة مع قوة الانفجار، يصبح لدينا الآتي:

$2\sigma_c = -2\sigma_r - r\dfrac{d\sigma_r}{dr}$ or $\sigma_c = -\sigma_r - \dfrac{r}{2}\dfrac{d\sigma_r}{dr}$	**(i)**

بتفاضل هذه العلاقة، نحصل على الآتي:

$\dfrac{d\sigma_c}{dr} = -\dfrac{d\sigma_r}{dr} - \dfrac{1}{2}\left[r.\dfrac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \dfrac{d\sigma_r}{dr}\right]$	**(ii)**

الإجهادات الأساسية الثلاثة عند أي نقطة في الجزء القشري الكروي عند نصف قطر r عبارة عن الآتي:

(i) الضغط الداخلي (σ_r) (انضغاط).

(ii) الإجهاد المحيطي (σ_c) (شد).

(iii) الإجهاد المحيطي (σ'_c) - (σ_c) (شد) على مستوى يتعامد على مستوى الإجهاد المحيطي (σ_c).

الانفعال القطري عند أي نقطة يتم حسابه كالآتي:

$$e_r = \frac{\sigma_r}{E} + \frac{2\sigma_c}{mE} \text{ (compressive)}$$

$e_r = -\dfrac{1}{E}\left(\sigma_r + \dfrac{2\sigma_c}{m}\right)$(tensile)	**(iii)**

الانفعال المحيطي عند أي نقطة يتم حسابه كالآتي:

$$e_c = \frac{\sigma_c}{E} - \frac{\sigma_c}{mE} + \frac{\sigma_r}{mE} \text{ (tensile)}$$

$e_c = \dfrac{1}{E}\left[\dfrac{m-1}{m}.\sigma_c + \dfrac{\sigma_r}{m}\right]$ (tensile)	**(iv)**

بسبب الضغط الداخلي، لنجعل نصف القطر يزداد من r إلى (r+u). إذن، يتم حساب الانفعال القطري من خلال العلاقة التالية:

$e_r = \dfrac{d\,(r+u) - dr}{dr}$	**(v)**

أو من خلال العلاقة التالية:

$e_r = \dfrac{du}{dr}$	**(vi)**

أما الانفعال المحيطي فيتم حسابه كالآتي:

$$e_c = \frac{(r+u)\,d\theta - rd\theta}{rd\theta}$$

أو من خلال العلاقة التالية:

$e_c = \frac{u}{r} \quad (\text{or} \;\; u = r \cdot e_c)$	**(vii)**

هذه الانفعالات تكون شد لو أنها موجبة.

من المعادلتين (v) و(vi)، نحصل على الآتي:

$$e_r = \frac{d}{dr}(r \, . \, e_c)$$

$e_r = e_c + r \, . \, \frac{de_c}{dr}$	**(viii)**

بالتعويض بقيم كل من (e_r) و(e_c) من المعادلتين (iii) و(iv)، نحصل على الآتي:

$$-\frac{1}{E}\left[\sigma_r + \frac{2\sigma_c}{m}\right] = \frac{1}{E}\left[\frac{m-1}{m}.\sigma_c + \frac{\sigma_r}{m}\right] + \frac{r}{E}\left[\frac{m-1}{m}\frac{d\sigma_c}{dr} + \frac{1}{m}\frac{d\sigma_r}{dr}\right]$$

وبالتبسيط والتكامل، نحصل على الآتي:

$$(m+1)\,(\sigma_r + \sigma_c) + (m-1)\, r \, . \, \frac{d\sigma_c}{dr} + r\frac{d\sigma_r}{dr} = 0$$

وبالتعويض بقيم كل من (σ_c) و $\frac{d\sigma_c}{dr}$ من المعادلتين (i) و(ii)، نحصل على الآتي:

$$(m+1)\left[\sigma_r - \sigma_r - \frac{r}{2}.\frac{d\sigma_r}{dr}\right] + (m-1)\, r\left[-\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{2}\left(r.\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{d\sigma_r}{dr}\right)\right] + r.\frac{d\sigma_r}{dr} = 0$$

وبالتبسيط نحصل على الآتي:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{4}{r}.\frac{d\sigma_r}{dr} = 0$$

والآن لنجعل الآتي:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = z$$

ومن ثم:

$$r\frac{dz}{dr} + 4z = 0$$

إذن:

$$\frac{dz}{z} = -4\frac{dr}{r}$$

وبعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على الآتي:

$$\log_e z = -4\log_e r + \log_e C_1$$

(حيث أن $\log_e C_1$ عبارة عن ثابت التكامل)، إذن:

$$\log_e z = \log_e \left[\frac{C_1}{r^4}\right]$$

$$z = \frac{C_1}{r^4}$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{C_1}{r^4}$$

$$d\sigma_r = C_1 \frac{dr}{r^4}$$

وبعمل تكامل لكلا الطرفين، نحصل على العلاقة التالية:

$\sigma_r = -\frac{C_1}{3r^3} + C_2$	**(ix)**

(حيث أن (C_2) عبارة عن ثابت التكامل).

وأيضًا، نحن نعلم أن:

$$\sigma_c = -\sigma_r - \frac{r}{2}\frac{d\sigma_r}{dr}$$

أو:

$$\sigma_c = -\left[-\frac{C_1}{3r^3} + C_2\right] - \frac{r}{2}.\frac{d\sigma_r}{dr}$$

$$\sigma_c = \frac{C_1}{3r^3} - C_2 - \frac{r}{2} \times \frac{C_1}{r^4} = \frac{C_1}{3r^3} - C_2 - \frac{C_1}{2r^3}$$

أي أن:

$\sigma_c = -\frac{C_1}{6r^3} - C_2$	**(x)**

والآن، لندرس التعبيرات الرياضية الخاصة بحساب (σ_r) (المعادلة (ix)) و(σ_c) (المعادلة (x)).

$$\sigma_r = -\frac{C_1}{3r^3} + C_2$$

$$\sigma_c = -\frac{C_1}{6r^3} - C_2$$

وبوضع $C_1 = -6b$ و $C_2 = -a$، نحصل على الآتي:

$\sigma_r = \frac{2b}{r^3} - a$	**(11-26)**

$\sigma_c = \frac{b}{r^3} + a$	(11-27)

وبتطبيق الشروط المعطاة، نحصل على الآتي:

عند $(r=r_1)$ فإن $(\sigma_r=p)$ وعند $(r=r_2)$ فإن $(\sigma_r=0)$، إذن:

$p = \frac{2b}{r_1^3} - a$	(xi)
$0 = \frac{2b}{r_2^3} - a$	(xii)

وبحل المعادلتين (x) و(xi)، نحصل على الآتي:

$$b = \frac{p r_1^3\ r_2^3}{2\,(r_2^3 - r_1^3)}, \quad \text{and} \quad a = \frac{p r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}$$

١١-٣ الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

ماسورة قطرها الداخلي ٢٠٠ مم وسمك جدارها ٥٠ مم وتحمل مائع عند ضغط قدره ١٠ ميجانيوتن/م٢. احسب الحدود الدنيا والقصوى للإجهادات المحيطية عبر المقطع العرضي للماسورة. وأيضًا، ارسم توزيع الإجهاد القطري (الضغط) وتوزيع الإجهاد المحيطي عبر المقطع العرضي.

الحل

نصف القطر الداخلي للماسورة:

$r_1 = 200/2 = 100 \text{ mm} = 0{\cdot}1 \text{ m}$

نصف القطر الخارجي للماسورة:

$r_2 = (200 + 2 \times 50)/2 = 150 \text{ mm} = 0{\cdot}15 \text{ m}$

ضغط المائع (p_1) = ١٠ ميجانيوتن/م٢.

<u>الإجهادات المحيطية (القصوى والدنيا)</u>

معادلات Lame عبارة عن:

$\sigma_r = \frac{b}{r^2} - a$	(i)
$\sigma_c = \frac{b}{r^2} + a$	(ii)

عند (r=0.1 m) فإن (σ_r=10 MN/m^2) وعندما (r=0.15m) فإن (σ_r=0).

بالتعويض في المعادلة رقم (i)، نحصل على الآتي:

$$10 = \frac{b}{0{\cdot}1^2} - a \qquad\qquad 0 = \frac{b}{0.15^2} - a$$

وبحل المعادلات السابقة، نحصل على الآتي:

b = 0.18 and a = 8

عند (r=0.1m)، فإن:

$$\sigma_r = \frac{0{\cdot}18}{0{\cdot}1^2} - 8 = 10\ \text{MN/m}^2$$

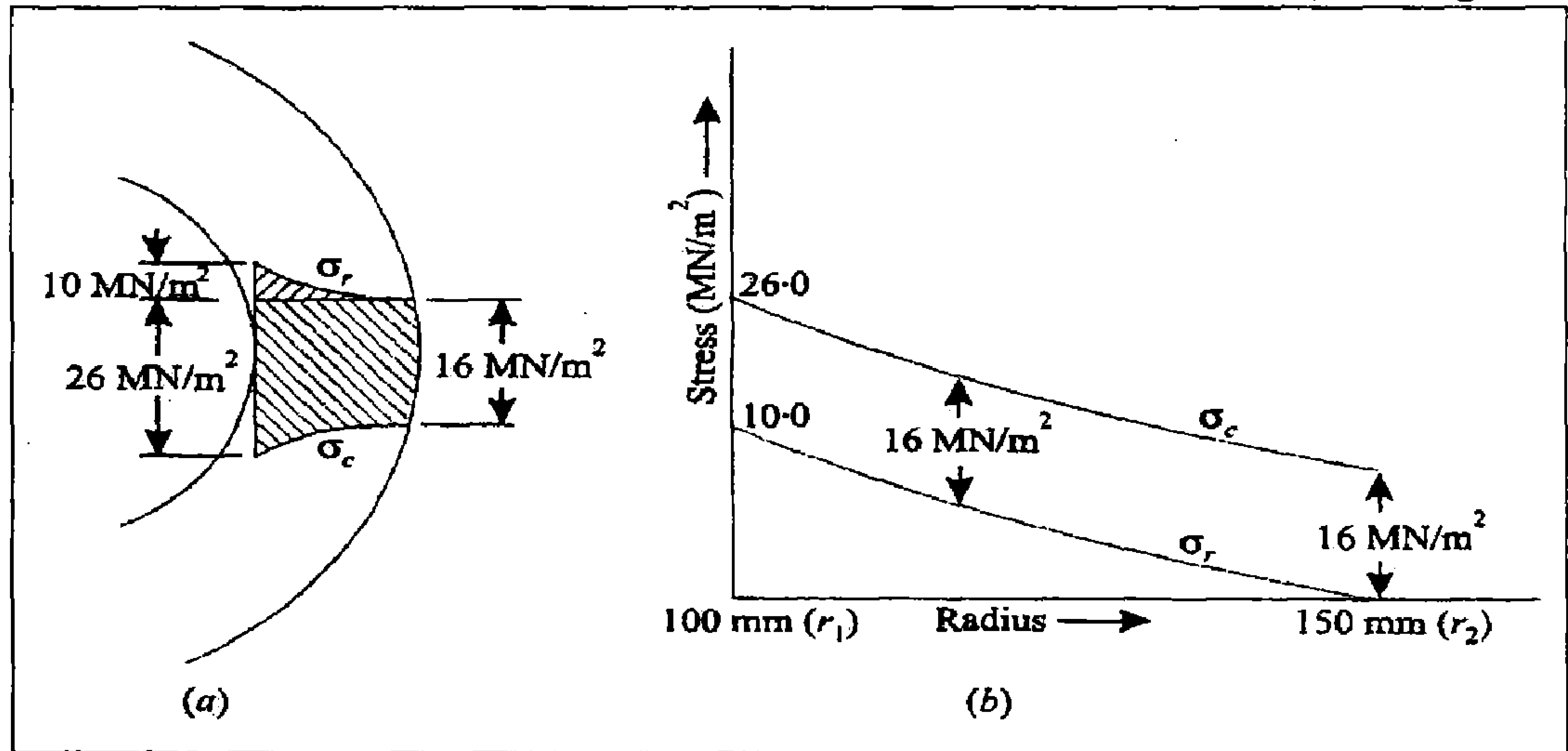
$$\sigma_c = \frac{0{\cdot}18}{0{\cdot}1^2} + 8 = \mathbf{26\ MN/m^2}\quad \text{(Ans.)}$$

وعند (r=0.15m)، فإن:

$$\sigma_r = \frac{0{\cdot}18}{0{\cdot}15^2} - 8 = 0$$

$$\sigma_c = \frac{0{\cdot}18}{0{\cdot}15^2} + 8 = \mathbf{16\ MN/m^2}\quad \text{(Ans.)}$$

في الشكل التالي نشاهد توزيع الإجهاد القطري (الضغط) والإجهاد المحيطي عبر المقطع العرضي.



المثال رقم (٢)

احسب سمك المعدن الضروري لعنصر قشري اسطواني قطره الداخلي ١٦٠ مم لكي يتحمل ضغط داخلي قدره ٢٥ ميجانيوتن/م٢، لو أن إجهاد الشد الأقصى المسموح به عبارة عن ١٢٥ ميجانيوتن/م٢.

الحل

نصف القطر الداخلي للعنصر القشري (r_1) = ١٦٠/٢ = ٨٠ مم = ٠.٠٨ متر.

الضغط الداخلي (p_1) = ٢٥ ميجانيوتن/م٢.

أقصى إجهاد شد مسموح به (σ_c) = ١٢٥ ميجانيوتن/م٢.

سمك المعدن:

قوانين Lame عبارة عن:

$\sigma_r = \dfrac{b}{r^2} - a$	**(i)**
$\sigma_c = \dfrac{b}{r^2} + a$	**(ii)**

عند (r) = ٠.٠٨ متر، فإن:

$\sigma_r = 25\ MN/m^2 \qquad \sigma_{c(max)} = 125\ MN/m^2$

بالتعويض في المعادلتين (i) و(ii)، نحصل على الآتي:

$$25 = \frac{b}{(0{\cdot}08)^2} - a$$

أو:

$25 = 156{\cdot}25\ b - a$	**(iii)**

وأيضًا:

$$125 = \frac{b}{(0{\cdot}08)^2} + a$$

أو:

$125 = 156{\cdot}25\ b + a$	**(iv)**

من المعادلتين (iii) و(iv)، يصبح لدينا الآتي:

b = 0.48 and a = 50

عند ($r=r_2$) فإن ($\sigma_r=0$)، وإذن:

$$0 = \frac{0{\cdot}48}{r_2^2} - 50$$

أو:

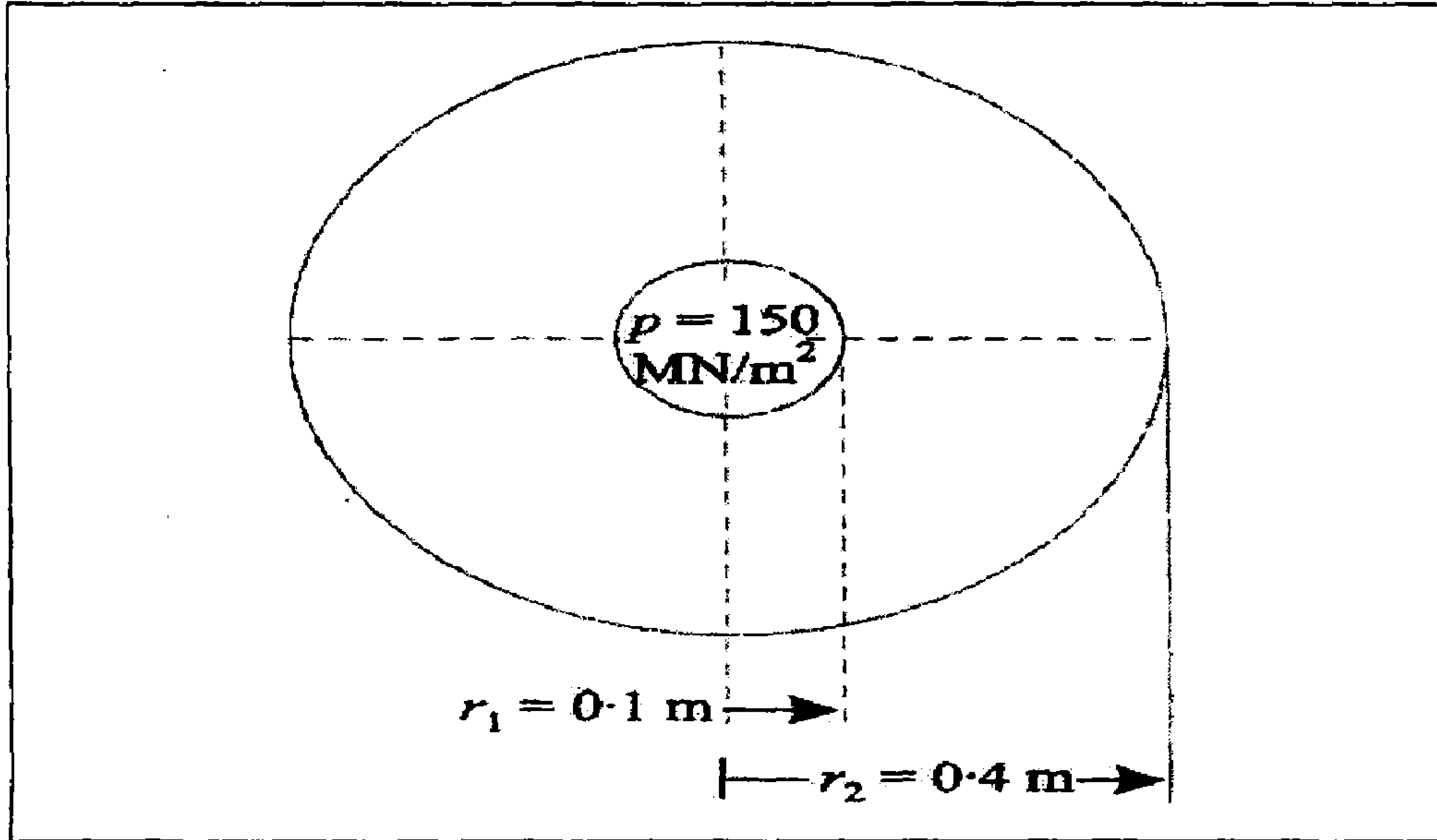
$r_2 = 0.098\ m = 98\ mm$

إذن، تخانة المعدن:

$= r_2 - r_1 = 98 - 80 = 18\ mm$

المثال رقم (٣)

اسطوانة سميكة ومغلقة الطرفين مصنوعة من سبيكة خصائصها (**E=72 GPa**، **1/m = 0.33**))، وقطرها الداخلي ٢٠٠ مم وقطرها الخارجي ٨٠٠ مم. هذه الاسطوانة معرضة لضغط مائع داخلي قدره **150 MPa**. حدد الإجهادات الأساسية وإجهاد القص الأقصى عند نقطة على السطح الداخلي للاسطوانة. وأيضًا حدد الزيادة في القطر الداخلي بسبب ضغط المائع.



الحل

في هذا المثال لدينا الآتي:

$$r_1 = \frac{200}{2} = 100\,\text{mm} = 0{\cdot}1\ \text{m};$$

$$r_2 = \frac{800}{2} = 400\ \text{mm} = 0{\cdot}4\ \text{m};$$

$$p = 150\ \text{MPa} = 150\ \text{MN/m}^2;$$

$$E = 72\ \text{GPa} = 72 \times 10^9\ \text{N/m}^2;$$

$$\frac{1}{m} = 0{\cdot}33$$

<u>الإجهادات الأساسية وإجهاد القص الأقصى:</u>

باستخدام الشروط في معادلة Lame التالية:

$$\sigma_r = \frac{b}{r^2} - a$$

فإنه عند (r=0.1m) فإن:

$$\sigma_r = +p = 150 \text{ MN/m}^2$$

وعند (r=0.4m) فإن (σ_r=0).

بالتعويض بالقيم في المعادلة السالفة الذكر، يصبح لدينا الآتي:

$150 = \frac{b}{(0\cdot1)^2} - a$	**(i)**
$0 = \frac{b}{(0\cdot4)^2} - a$	**(ii)**

بطرح المعادلة (ii) من المعادلة (i)، نحصل على الآتي:

$$150 = b\left(\frac{1}{0\cdot1^2} - \frac{1}{0\cdot4^2}\right) = 93\cdot75\, b$$

إذن، (b) = ١.٦.

وبالتعويض عن b في المعادلة (i)، نحصل على الآتي:

$$150 = \frac{1\cdot6}{0\cdot1^2} - a$$

إذن، (a) = ١٠.

يتم حساب الإجهاد المحيطي (أو الـ hoop) بناءًا على معادلة Lame التالية:

$$\sigma_c = \frac{b}{r^2} + a$$

إذن:

$$(\sigma_c)_{max}, \text{ at } r\ (= r_1) = 0\cdot1 \text{ m} = \frac{1\cdot6}{0\cdot1^2} + 10 = 170 \text{ MN/m}^2 \text{ (tensile)}$$

$$(\sigma_c)_{min}, \text{ at } r\ (= r_2) = 0\cdot4 \text{ m} = \frac{1.6}{0.4^2} + 10 = 20 \text{ MN/m}^2 \text{ (tensile)}$$

ومن ثم، الإجهادات الأساسية تكون ١٧٠ ميجانيوتن/م٢ و٢٠ ميجانيوتن/م٢.

إجهاد القص الأقصى:

$$\tau_{max} = \frac{(\sigma_c)_{max} - (\sigma_c)_{min}}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{170 - 20}{2} = 75 \text{ MN/m}^2 \quad \text{(Ans.)}$$

<u>الزيادة في القطر الداخلي (δd_1):</u>

نحن نعلم أن الإجهاد الطولي (أو المحوري) يكون:

$$\sigma_l = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{150 \times (0.1)^2}{(0.4)^2 - (0.1)^2} = 10\ \text{MN/m}^2$$

الانفعال المحيطي (أو الـ hoop) عند نصف القطر الداخلي يتم حسابه كالآتي:

$$(\sigma_c)_{r_1} = \frac{1}{E}\left[\sigma_c + \frac{1}{m}(\sigma_r - \sigma_l)\right]$$

$$(\sigma_c)_{r_1} = \frac{1}{72 \times 10^9}[170 \times 10^6 + 0.33\ (150 - 10) \times 10^6] = 0.003$$

وأيضًا:

$$(\sigma_c)_{r_1} = \frac{\delta d_1}{d_1}$$

أو:

$$0.003 = \frac{\delta d_1}{0.2}$$

إذن:

$$\delta d_1 = 0.003 \times 0.2 = 0.0006\ \text{m or } \mathbf{0.6\ mm} \quad \textbf{(Ans.)}$$

المثال رقم (٤)

أوجد نسبة السمك إلى القطر الداخلي لأنبوبة معرضة لضغط داخلي عندما يكون الضغط ٨/٥ من قيمة الإجهاد المحيطي الأقصى المسموح به. أوجد الزيادة في القطر الداخلي لأنبوبة قطرها الداخلية ١٠٠ مم عندما يكون الضغط الداخلي ٨٠ ميجانيوتن/م٢. وأيضًا أوجد التغير في سمك الجدار. استخدم البيانات التالية:

$E = 205\ \text{GN/m}^2$
$1/m = 0.29$

الحل

نصف القطر الداخلي للأنبوبة (r_1) = ١٠٠/٢ = ٥٠ مم = ٠.٠٥ متر

الضغط الداخلي (p_1) = (σ_r) = ٨٠ ميجانيوتن/م٢.

معامل المرونة (E) = ٢٠٥ جيجانيوتن/م٢.

نسبة بواسون (1/m) = ٠.٢٩.

نسبة السمك (**t**) إلى القطر الداخلي (**d**):

$$(\sigma_c)_{max} = p_1\left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]$$

$$\frac{(\sigma_c)_{max}}{p_1} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{(r_2 / r_1)^2 + 1}{(r_2 / r_1)^2 - 1}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 2{\cdot}08 \text{ or } r_2 = 2{\cdot}08\ r_1$$

إذن:

$$t = r_2 - r_1 = 2{\cdot}08\ r_1 - r_1 = 1{\cdot}08\ r_1$$

ومن ثم:

$$\frac{t}{d} = \frac{1{\cdot}08\ r_1}{2\ r_1} = \mathbf{0{\cdot}54} \quad \textbf{(Ans.)}$$

الزيادة في القطر الداخلي (δd):

عند (r=0.05m) فإن:

$$\sigma_r = p_1 = 80 \text{ MN/m}^2 \text{ (comp.)}$$

وبما إن:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_c} = 5/8$$

إذن:

$$\sigma_c = 8/5 \times 80 = 128 \text{ MN/m}^2 \text{ (tensile)}$$

الإجهاد الطولي الزيادة (بافتراض أن الأطراف مغلقة):

$$\sigma_l = \frac{p_1\ r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\sigma_l = \frac{80 \times 0{\cdot}05^2}{(0{\cdot}05 \times 2{\cdot}08)^2 - (0{\cdot}05)^2} = 24 \text{ MN/m}^2 \text{ (tensile)}$$

الانفعال المحيطي عند (r=0.05m) يتم حسابه كالآتي:

$$e_c = \frac{\sigma_c}{E} + \frac{1}{m}\frac{\sigma_r}{E} - \frac{1}{m}\frac{\sigma_l}{E}$$

$$e_c = \frac{1}{205 \times 10^9}[128 + 0{\cdot}29\ (80 - 24)] \times 10^6 = 0{\cdot}7036 \times 10^{-3}$$

إذن:

$$e_c = \frac{\delta d}{d} = 0{\cdot}7036 \times 10^{-3}$$

أو:

$\delta d = 0{\cdot}7036 \times 10^{-3} \times 100 = \mathbf{0{\cdot}07306\ mm}$ **(Ans.)**

التغير في سمك الجدار:

عند:

$r = r_2 = 2{\cdot}08 \times 0{\cdot}05 = 0{\cdot}104$ m

فإن:

$\sigma_r = 0$

$\sigma_c - \sigma_r = 2a = (\sigma_c)_{r_1} - (\sigma_r)_{r_1}$

$\sigma_c - 0 = 128 - 80. \quad \sigma_c = 48$ MN/m^2 (tensile)

إذن:

$$e_c = \frac{1}{E}\left[\sigma_c - \frac{1}{m}\sigma_l + \frac{1}{m}\sigma_r\right]$$

$$e_c = \frac{1}{205 \times 10^9}[48 - 0{\cdot}29 \times 24 + 0{\cdot}29 \times 0] \times 10^6 = 0{\cdot}2 \times 10^{-3}$$

وبما إن:

$$e_c = \frac{(\delta d)_{r_2}}{2r_2}$$

إذن، الزيادة في القطر الخارجي تكون:

$(\delta d)_{r_2} = 2r_2\, e_c$

$(\delta d)_{r_2} = 2 \times 0{\cdot}104 \times 0.2 \times 10^{-3}$ m $= 0.0416$ mm

إذن، النقص في سمك الجدار يكون:

$= \frac{1}{2}(0{\cdot}07036 - 0{\cdot}0416) = \mathbf{0{\cdot}01438\ mm}$ **(Ans.)**

المثال رقم (٥)

اسطوانة من الصلب قطرها الداخلي ١٠٠٠ مم تم تصميمها من أجل أن تتحمل ضغط داخلي قدره ٤.٨ ميجانيوتن/م٢. احسب الآتي:

(i) السمك لو أن إجهاد القص الأقصى لا يتعدى ٢١ ميجانيوتن/م٢.

(ii) الزيادة في الحجم، بسبب الضغط العامل، لو أن الاسطوانة طولها ٧ متر ومغلقة الأطراف.

تجاهل أي قيود بسبب الأطراف، وخذ المعلومات التالية:

E = 200 GN/m²
Poisson's ratio = 1/3

الحل

نصف القطر الداخلي للاسطوانة = ١٠٠٠/٢ = ٥٠٠ مم = ٠.٥ متر.

الضغط الداخلي (p_1) = ٤.٨ ميجانيوتن/م٢.

إجهاد القص الأقصى (τ_{max}) = ٢١ ميجانيوتن/م٢.

طول الاسطوانة (l) = ٧ متر.

معامل المرونة (E) = ٢٠٠ جيجانيوتن/م٢.

نسبة بواسون (1/m) = ١/٣.

(i) سمك جدار الاسطوانة:

فيما يلي معادلات Lame:

$$\sigma_r = \frac{b}{r^2} - a \quad \text{(comp.)}$$

$$\sigma_c = \frac{b}{r^2} + a \quad \text{(tensile)}$$

إذن:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\left[\sigma_c - (-\sigma_r)\right] = \frac{b}{r^2}$$

إجهاد القص الأقصى المطلق سيؤثر على السطح الداخلي، أي أن:

$$21 = \frac{b}{r_1^2} = \frac{b}{(0{\cdot}5)^2}$$

إذن، (b) = ٥.٢٥.

وأيضًا عند السطح الداخلي:

$$\sigma_r = 4{\cdot}8 = \frac{b}{r_1^2} - a$$

$$4{\cdot}8 = \frac{5{\cdot}25}{0{\cdot}5^2} - a$$

إذن، (a) = ١٦.٢. بعد ذلك عند ($r=r_2$) فإن:

$$\sigma_r = 0 = \frac{b}{r_2^2} - a \quad \text{or} \quad \frac{b}{r_2^2} = a$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{5{\cdot}25}{16{\cdot}2}} = 0{\cdot}57 \text{ m}$$

إذن، سمك الجدار يكون:

$= r_2 - r_1 = 0{\cdot}57 - 0{\cdot}5 = 0{\cdot}07 \text{ m} = \mathbf{70\ mm}$ **(Ans.)**

(ii) الزيادة في الحجم (δV):

عند ($r=r_1$) فإن:

$$\sigma_c = \frac{b}{r_1^2} + a = 21 + 16{\cdot}2 = 37{\cdot}2 \text{ MN/m}^2 \text{ (tensile)}$$

الإجهاد الطولي:

$$\sigma_l = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{4{\cdot}8 \times 0{\cdot}5^2}{0{\cdot}57^2 - 0{\cdot}5^2} = 16{\cdot}02 \text{ MN/m}^2$$

إذن:

$$(e_c)_{r_1} = \frac{1}{E}\left[\sigma_c + \frac{1}{m}(\sigma_r - \sigma_l)\right]$$

$$(e_c)_{r_1} = \frac{1}{200 \times 10^9}\left[37{\cdot}2 + \frac{1}{3}(4{\cdot}8 - 16{\cdot}02)\right] \times 10^6$$

$$(e_c)_{r_1} = 0{\cdot}1673 \times 10^{-3}$$

وأيضًا:

$$(e_l)_{r_1} = \frac{1}{E}\left[\sigma_l + \frac{1}{m}(\sigma_r - \sigma_c)\right]$$

$$(e_l)_{r_1} = \frac{1}{200 \times 10^9}\left[16{\cdot}02 + \frac{1}{3}(4{\cdot}8 - 37{\cdot}2)\right] \times 10^6$$

$$(e_l)_{r_1} = 0{\cdot}0261 \times 10^{-3}$$

إذن، الانفعال الحجمي يكون:

$$= \frac{\delta V}{V} = 2(e_c)_{r_1} + (e_l)_{r_1}$$

$$= 2 \times 0{\cdot}1673 \times 10^{-3} + 0{\cdot}0261 \times 10^{-3} = 0{\cdot}3607 \times 10^{-3}$$

أو:

$$\delta V = 0{\cdot}3607 \times 10^{-3} \times \text{(internal volume)}$$

$$\delta V = 0{\cdot}3607 \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 \times 7$$

$$\boldsymbol{\delta V = 0{\cdot}001983\ \mathbf{m^3}\ \textbf{(increase)}}$$ **(Ans.)**

الفصل الثانى عشر

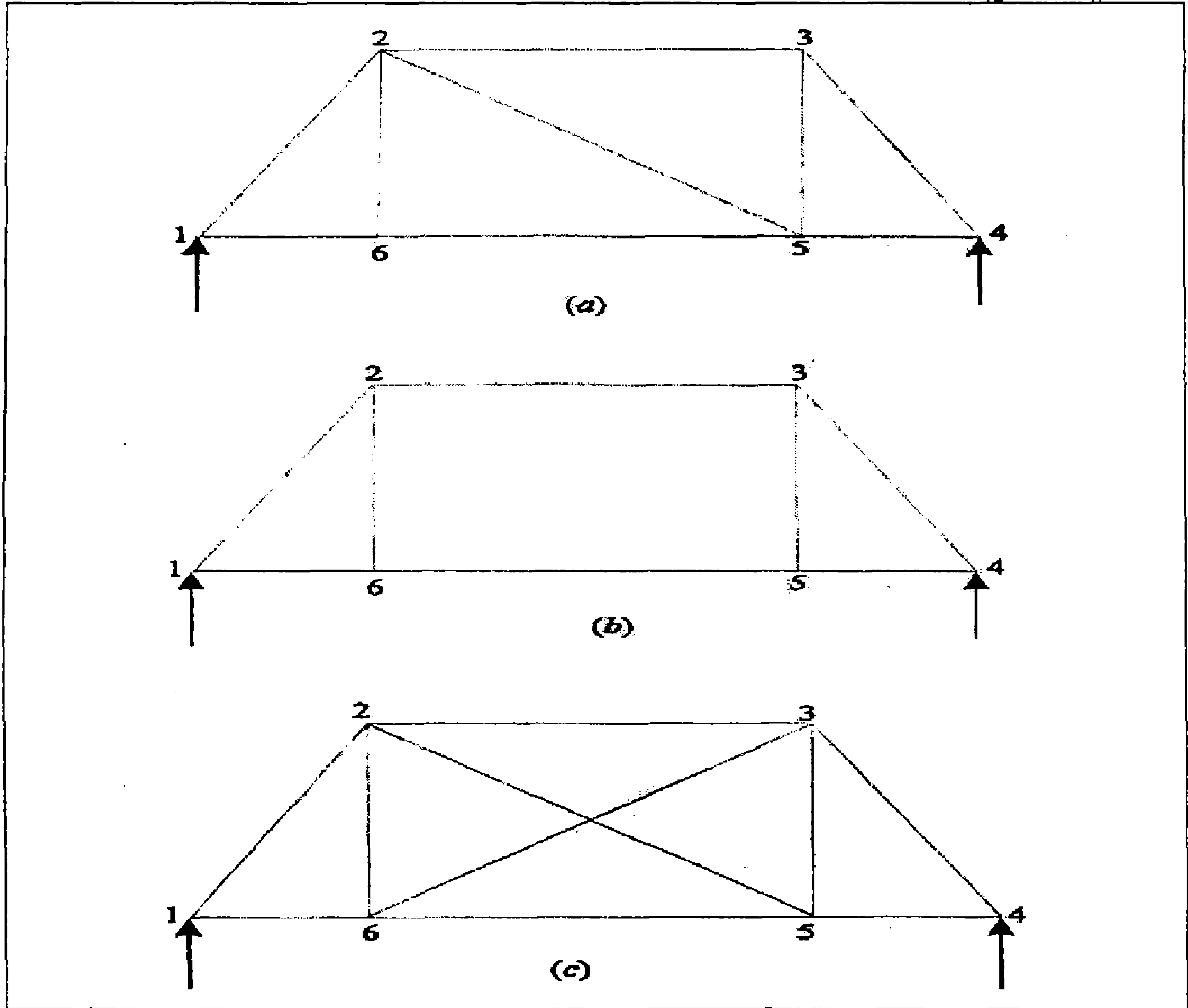
تحليل الهياكل الإنشائية

في هذا الفصل

- مقدمة عامة
- تحديد ردود الأفعال (بيانيًا).
- تحديد الإجهادات:
  - الطريقة البيانية
  - الطرق التحليلية
  - طريقة الوصلات.
  - طريقة المقاطع.
- الأمثلة العملية

١٢-١ مقدمة عامة

أي منشأ هيكلي أو جمالون هيكلي يتكون من العديد من الأسياخ أو القضبان المتصلة ببعضها البعض بطريقة معينة؛ وتلك القضبان تسمى عناصر المنشأ، كما هو موضح في الشكل التالي:



أي عنصر يتعرض لشد يسمى "شداد Tie" وأي عنصر يتعرض لضغط يسمى "دعامة Strut".

المنشآت الهيكلية تنتمي لواحدة من الأنواع الثلاثة التالية:

(١) فعال أو ممتاز Efficient or Perfect.

(٢) معيب Deficient or Imperfect.

(٣) فائض المتانة Redundant.

يُقال على المنشأ أنه "فعال" لو أنه يحقق المعادلة التالي:

$m = 2j - 3$	(12-1)

حيث إن:

المعامل	المعنى والاستخدام
m	عدد عناصر المنشأ.
J	عدد وصلات المنشأ.

في الجزء (a) بالشكل السابق نشاهد منشأ Perfect والذي فيه:

m = 9 j = 6

وبالتالي فإنه يحقق المعادلة رقم (١٢-١).

في الجزء (b) بالشكل السابق نشاهد منشأ فيه (j=6) و(m=8) (أي أنه يوجد رقم أقل من الرقم المطلوب بناءًا على المعادلة رقم (١٢-١)). هذا النوع من المنشآت يسمى "معيبًا".

في الجزء (c) بالشكل السابق نشاهد منشأ فيه (j=6) و(m=10) (أي أنه يوجد رقم أكبر من الرقم المطلوب بناءًا على المعادلة رقم (١٢-١)). هذا النوع من المنشآت يسمى "فائض".

الفرضيات Assumptions

الفرضيات التالية تم وضعها أثناء حساب القوى المتولدة في عناصر هيكل فعال perfect frame:

(١) كل العناصر متصلة ببعضها من خلال وصلات مفصلية.

(٢) الهيكل يكون محملاً عند الوصلات فقط.

(٣) الهيكل عبارة عن هيكل تام أو فعال perfect frame.

(٤) يتم إهمال الوزن الذاتي للعناصر.

١٧-٢ تحديد ردود الأفعال - الطريقة البيانية

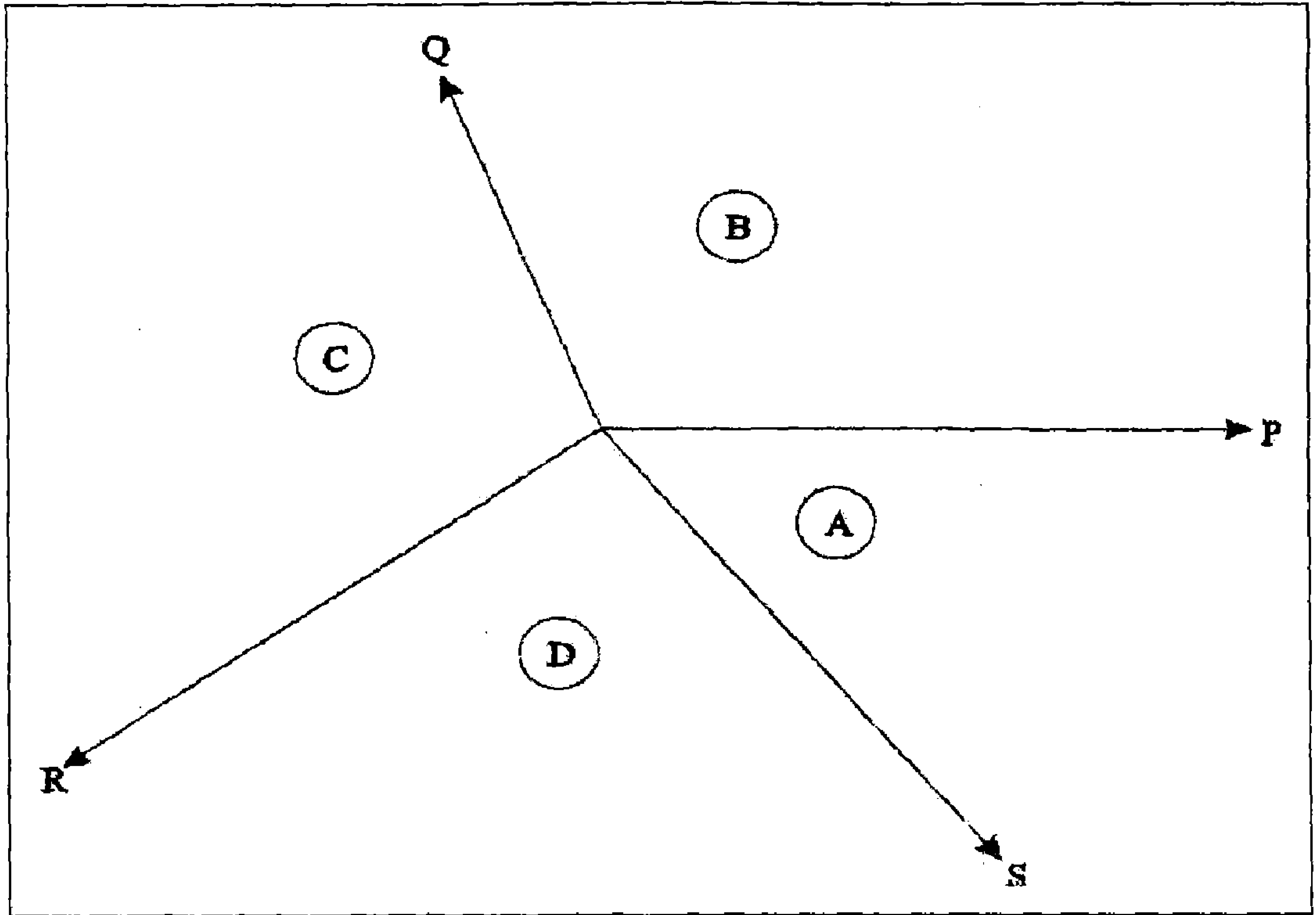
قبل الشروع في دراسة الطريقة بالتفصيل، سوف نلقي بعض الضوء على ما يُعرف بـ "Bow's notation" الذي يلعب دورًا مهمًا في الحلول البيانية للمسائل.

نظام الترميز Bow's notation

عبارة عن طريقة لتمييز أي قوة عن طريق وضع حروف كبيرة على أي جانب من جانبي القوة.

في الشكل التالي نشاهد أربعة قوى P, Q, R, S تؤثر عند نقطة في نفس المستوى. وبناءًا على ترميز Bow فإن القوة P تُمثل بـ AB، والقوة Q بـ BC، والقوة R بـ CD، والقوة S بـ DA على الترتيب. والديجرام الذي يُتحصل عليه بعد ضم واشتمال الأحرف A, B, C, D في القوى

يسمى الديجرام الفراغي Space diagram.



ولكن على كل حال، الميزة الأساسية لترميز Bow هي أن أي قوة في الديجرام الفراغي يمكن تمثيلها بالمقدار والاتجاه من خلال مقياس رسم معين عن طريق رسم خط يوازي القوة.

فيما يلي أنواع الدعامات الشائع استخدامها:

(١) الدعامات البسيطة عند كلا الطرفين.

(٢) أحد الأطراف متصل مفصليًا، والآخر مرتكز على roller.

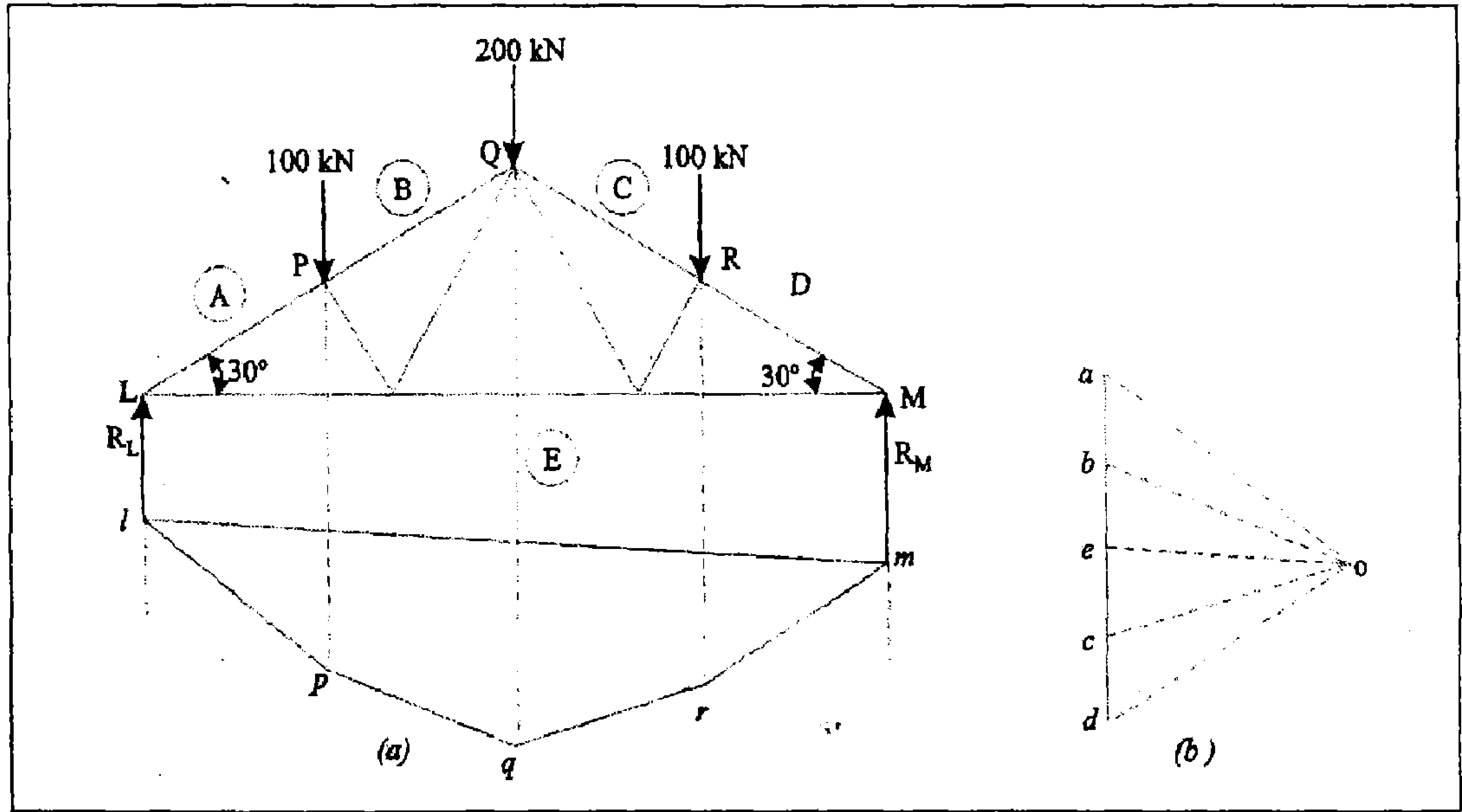
(٣) أحد الأطراف متصل مفصليًا، والآخر مرتكز على سطح ناعم.

(٤) كلا الطرفان مثبتان.

هنا سوف نتتبع تفاصيل عملية تحديد ردود الأفعال بالنسبة للأنواع السالفة الذكر من الدعامات.

(١) دعامات بسيطة عند كلا الطرفين

انظر الشكل التالي:



جمالون السطح roof truss يحمل الأحمال الرأسية التي مقدارها ولنقل مثلاً ١٠٠ كيلونيوتن و٢٠٠ كيلونيوتن و١٠٠ كيلونيوتن عند الوصلات P وQ وR على الترتيب. ولإيجاد ردود الأفعال (R_L) و(R_M) ينبغي تنفيذ الإجراء التالي:

(i) يتم بناء الديجرام الفراغي بمقياس رسم مناسب.

(ii) يتم رسم خط حمل ad بمقياس رسم مناسب (في هذه الحالة، لنقل أنه ١ سم = ٢٠٠ كيلونيوتن) بحيث أن ab وbc وcd تمثل مقادير واتجاهات الأحمال AB وBC وCD على الترتيب.

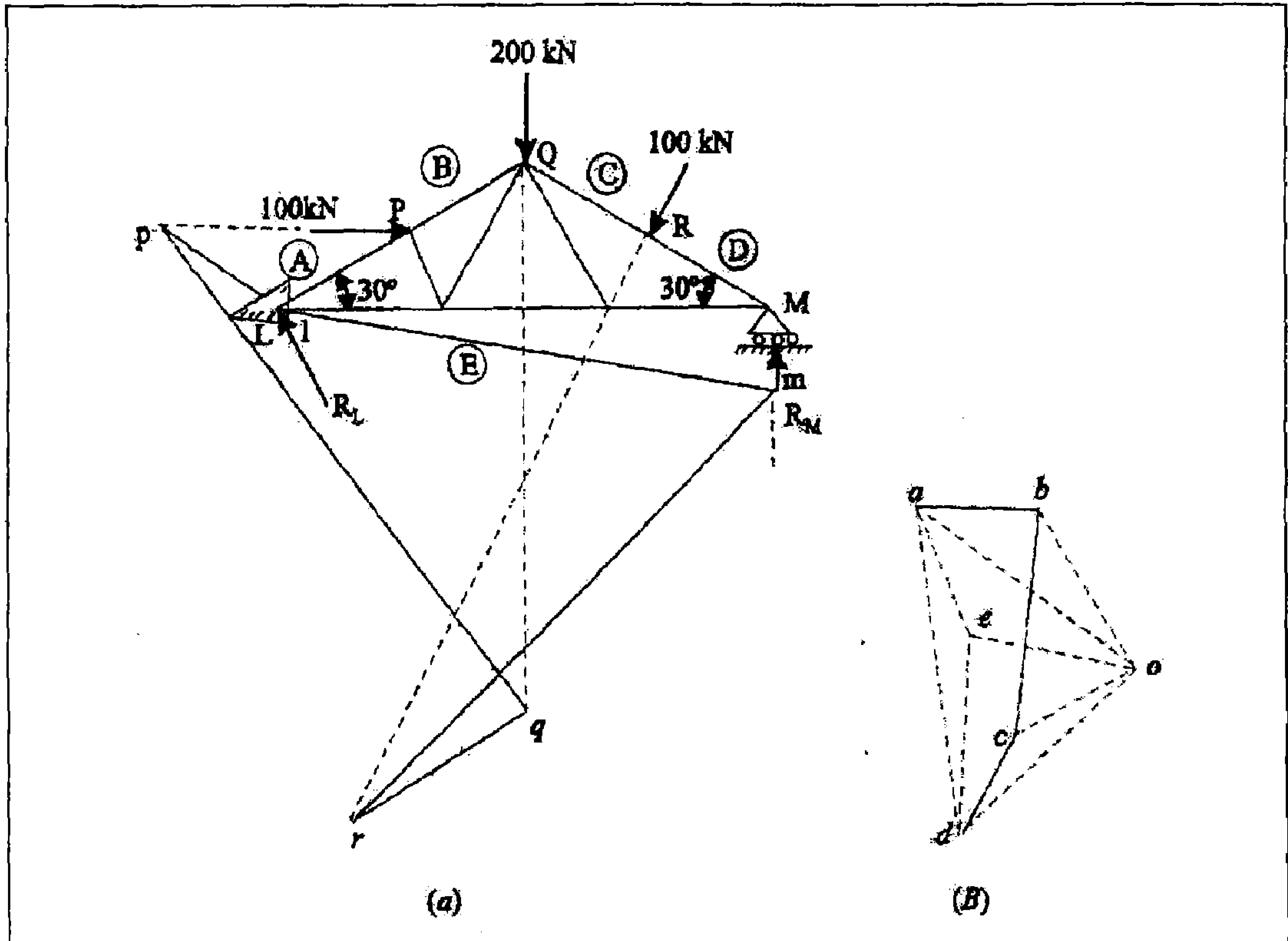
(iii) انتق أي نقطة O (تسمى القطب) وصل oa, ob, oc, od (كما هو موضح في الشكل السابق).

(iv) خذ أي نقطة (l) على خط رد الفعل (R_L) وارسم خط (lp) يوازي oa، وبالمثل ارسم الخط pq يوازي ob والخط qr يوازي oc والخط rm يوازي od: صل l بـ m؛ ومن ثم يتم الحصول على المضلع lpqrm والذي يسمى المضلع الحبلي Funicular polyron.

(v) من القطب O ارسم الخط oe يوازي lm (الجانب الذي يغلق المضلع). بعد ذلك، R_L=de (٢٠٠ كيلونيوتن) وR_M=ea في المقدار وأيضًا في الاتجاه.

(٢) وصلة مفصلية ودعامة roller

في الشكل التالي نشاهد نفس الجمالون (كما في الحالة الأولى) ومعرض لنفس الأحمال ولكن مع خطوط تطبيق مختلفة.



(i) قم بعمل الديجرام الفراغي.

(ii) ارسم خط الحمل abcd بمقياس رسم مناسب (لنقل أن ١ سم = ١٠٠ كيلونيوتن) بحيث أن ab يوازي AB وbc يوازي BC وcd يوازي CD.

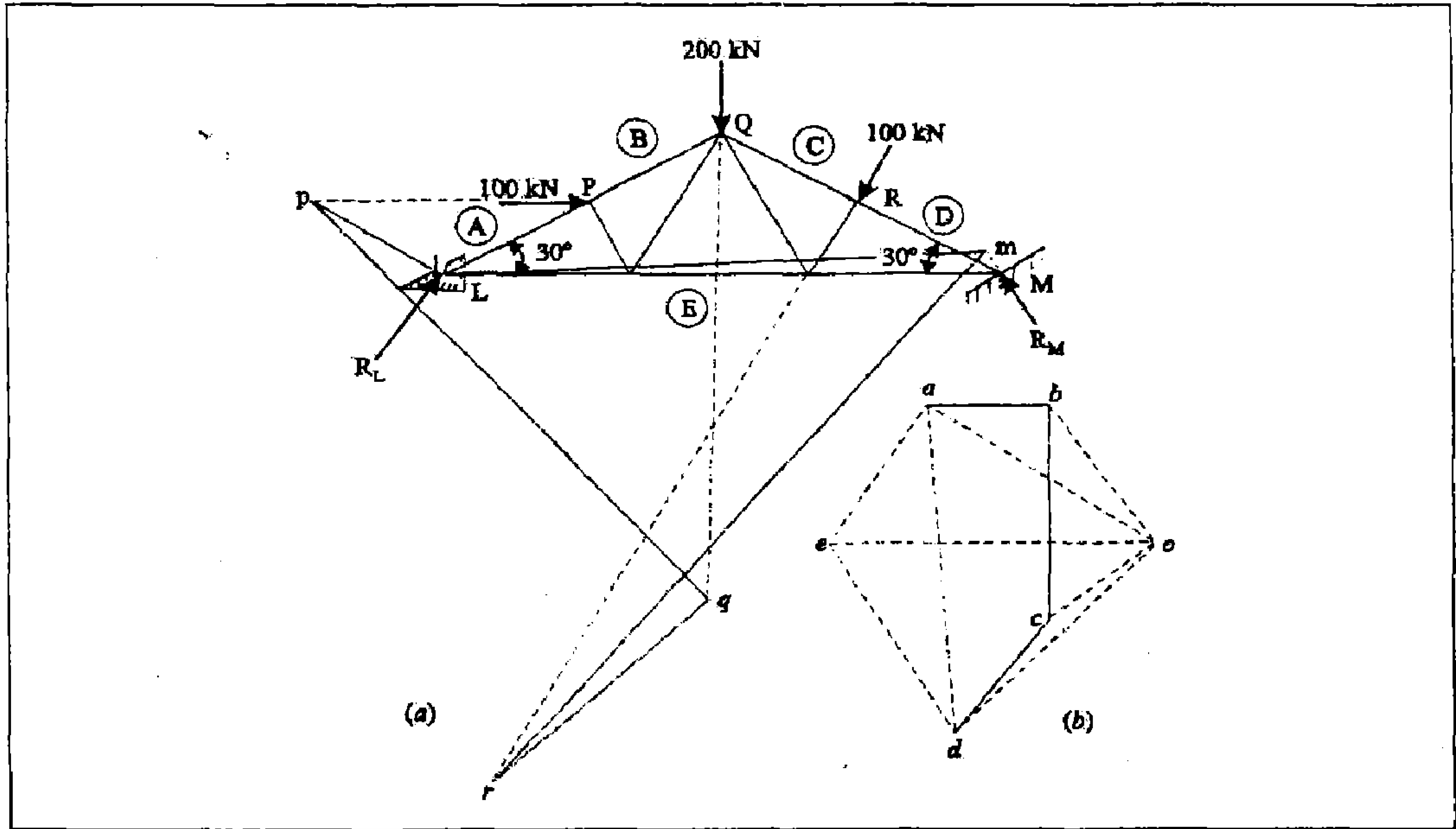
(iii) انتق أي قطب O. وصل oa, ob, oc, od (كما هو موضح في الشكل السابق).

(iv) حيث أن رد الفعل (R_L) يجب أن يمر عبر النقطة L لذلك بداية من هذه النقطة، ارسم خط يوازي oa ليقابل خط الحمل P عند p. ومن p ارسم الخط pq يوازي ob ليقابل خط الحمل Q عند q ومنها ارسم الخط qr يوازي oc ليقطع خط الحمل R عند r وفي النهاية ارسم الخط rm يوازي od ليقابل خط رد الفعل (R_M) (الذي يكون دائمًا متعامد على الدعامة الـ roller (وهو في هذه الحالة رأسي)) عند m. صل l مع m.

(v) من O ارسم خط يوازي lm، والذي يقابل الخط المرسوم رأسيًا لأعلى من d عند e. إذن رد الفعل (R_L) = طول ae × مقياس الرسم = ١٣٠ كيلونيوتن، ورد الفعل (R_M) = طول de × مقياس الرسم = ١٦٥ كيلونيوتن.

(٣) وصلة مفصلية وسطح ناعم

انظر الشكل التالي:



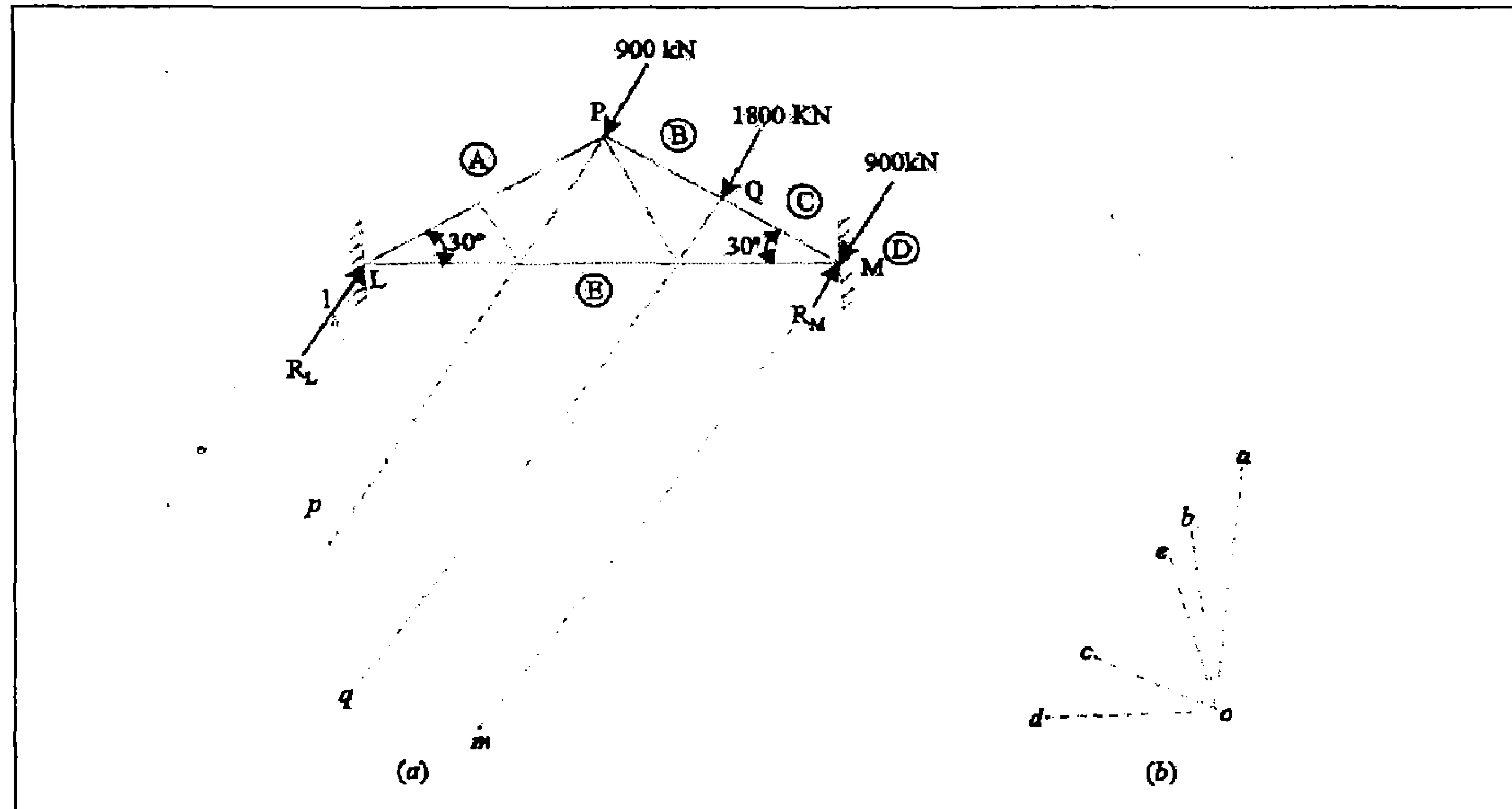
جمالون السطح والتحميل كما في الحالة الأولى ولكن الدعامة التي على الطرف عبارة عن سطح ناعم ويميل بزاوية ما. الإجراء الخاص بإيجاد رد الفعل هو نفس الإجراء المتبع في الحالة الثانية. ولكن، ينبغي تذكر أن رد الفعل عند أي سطح ناعم يكون دائمًا عموديًا عليه.

رد الفعل (R_L) = طول ae × مقياس الرسم = ١٢٧ كيلونيوتن.

رد الفعل (R_M) = طول de × مقياس الرسم = ٢٠٠ كيلونيوتن.

(٤) كلا الطرفان مثبتان Fixed

في الشكل التالي نشاهد جمالون مثبت عند كلا الطرفين.



(i) قم بعمل الديجرام الفراغي كالمعتاد.

(ii) ارسم خط الحمل ad لتمثيل الأحمال AB, BC, CD.

(iii) انتق قطب O وصل oa, ob, oc, od.

(iv) خذ أي نقطة m على خط الحمل ٩٠٠ كيلونيوتن ومنها ارسم خط يوازي oc ليقابل خط الحمل ١٨٠٠ كيلونيوتن عند q؛ ومن q ارسم خط يوازي ob ليقابل خط الحمل ٩٠٠ كيلونيوتن عند p، وبالمثل أوجد نقطة l عن طريق رسم خط من p ويوازي oa. صل l بـ m.

(v) من القطب O ارسم الخط oe يوازي om ومن ثم:

رد الفعل (R_L) = طول ae × مقياس الرسم = ١٢٠٠ كيلونيوتن.

رد الفعل (R_M) = طول de × مقياس الرسم = ٢٤٠٠ كيلونيوتن.

في هذه الحالة تم افتراض أن ردود الأفعال عند كل طرف مثبت تكون موازية لمحصلة الأحمال الخارجية.

١٢-٣ تحديد الإجهادات

عندما تؤثر أحمال خارجية على المنشأ الهيكلي، يتم تكوين قوى خارجية تسمى إجهادات في عناصره. وعندما يتم تصميم المنشأ، فإنه يتم حساب الإجهادات المتولدة في العناصر ومن هذه البيانات يتم تحديد أبعاد العنصر. هذه الإجهادات يتم تحديدها من خلال الطريقتين التاليتين:

(١) الطريقة البيانية Graphical Method.

(٢) الطريقة التحليلية Analytical Method.

١٢-٣-١ الطريقة البيانية Graphical Method

هذه الطريقة سيتم شرحها بالتفصيل من خلال الأمثلة العملية.

١٢-٣-٢ الطرق التحليلية Analytical Methods

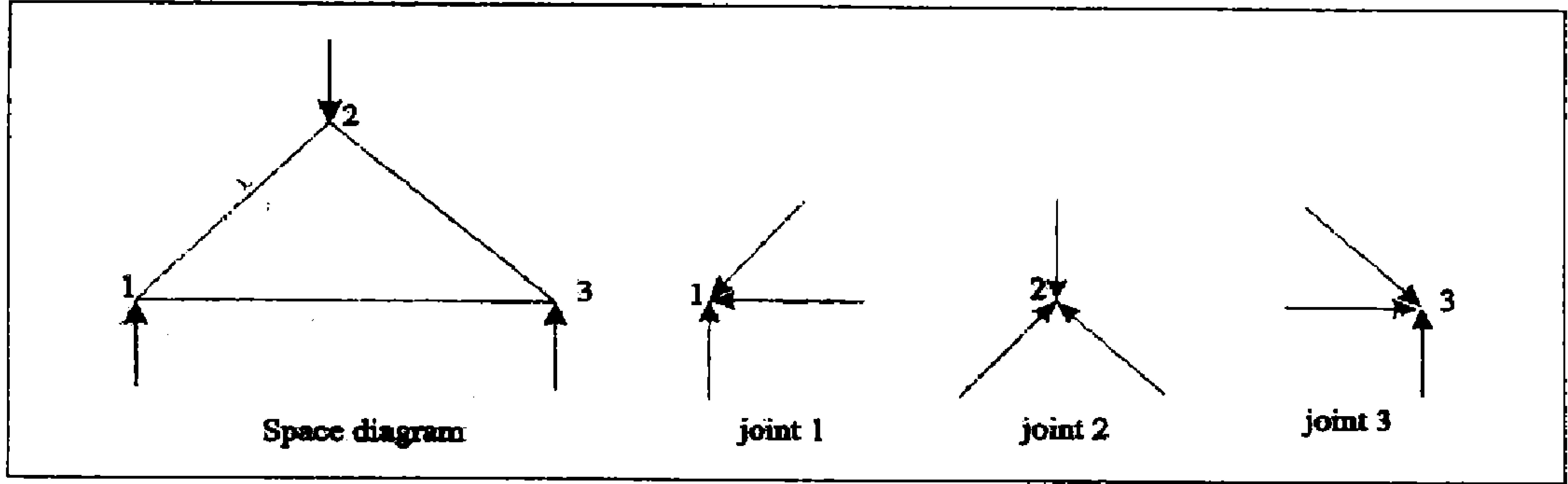
الطريقتان التاليتان يتم توظيفهما لحساب القوى والإجهادات في عناصر الهياكل ذات الوصلات المفصلية:

(١) طريقة الوصلات Method of Joints.

(٢) طريقة المقاطع Method of Sections.

١٢-٣-٢-١ طريقة الوصلات Method of Joints

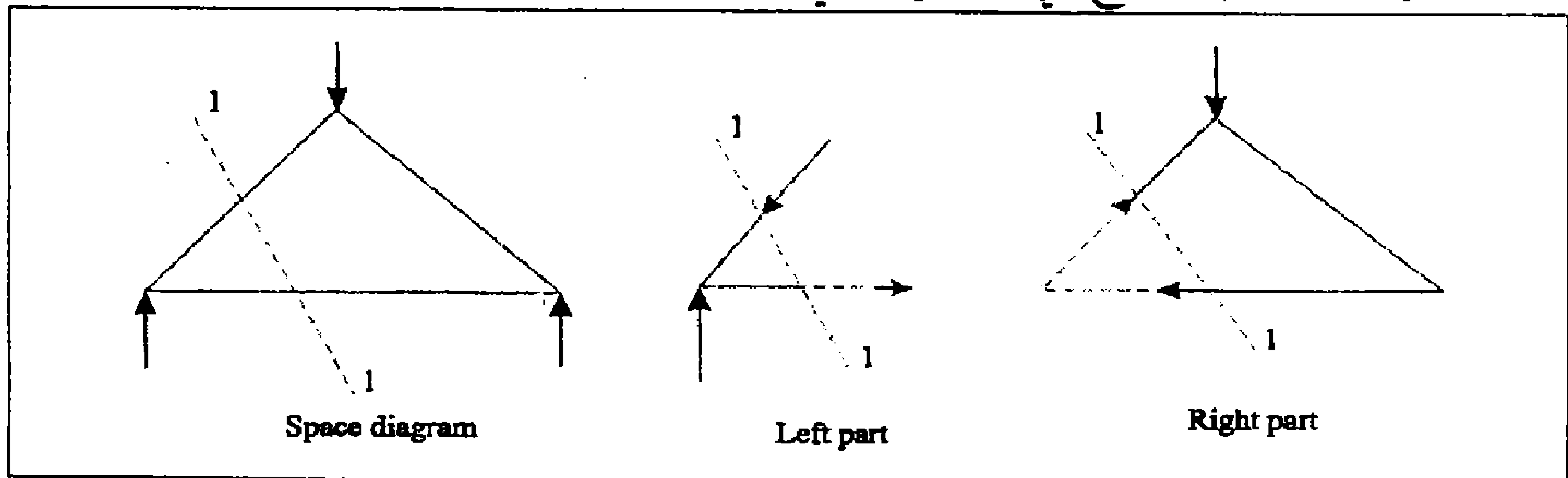
انظر الشكل التالي:



في هذه الطريقة، كل وصلة يتم التعامل معها بصفة منفصلة على إنها جسم حر في حالة اتزان. ومن ثم يتم تحديد القوى المجهولة من خلال معادلات الاتزان، ($\Sigma H=0$) (المجموع الجبري للقوى الأفقية يكون صفرًا)، ($\Sigma V=0$) (المجموع الجبري للقوى الرأسية يكون صفرًا). أي وصلة تُؤخذ من أجل التحليل في حالة واحدة فقط وهي *عندما لا توجد أكثر من قوتين مجهولتين تؤثر عند النقطة*. للبدء، يتم أخذ وصلة عندما لا توجد أكثر من قوتين مجهولتين. وبعد حساب كل القوى المؤثرة عند تلك النقطة، يتم التعامل مع الوصلة التي بعد ذلك بشرط ألا يكون عندها أكثر من قوتين مجهولتين وهكذا. نستمر في هذه العملية حتى يتم التعامل مع كل الوصلات وبالتالي يكون قد تم حساب القوى الموجودة في كل عناصر الهيكل.

١٧-٣-٢ طريقة المقاطع (أو طريقة العزوم)

هذه الطريقة تكون مناسبة بصفة خاصة عندما *يطلب إيجاد القوى في عدد قليل من عناصر أي هيكل*. في هذه الطريقة، يتم عمل خط مقطعي يمر عبر العناصر التي بها يُطلب إيجاد القوى، كما هو موضح في الشكل التالي:



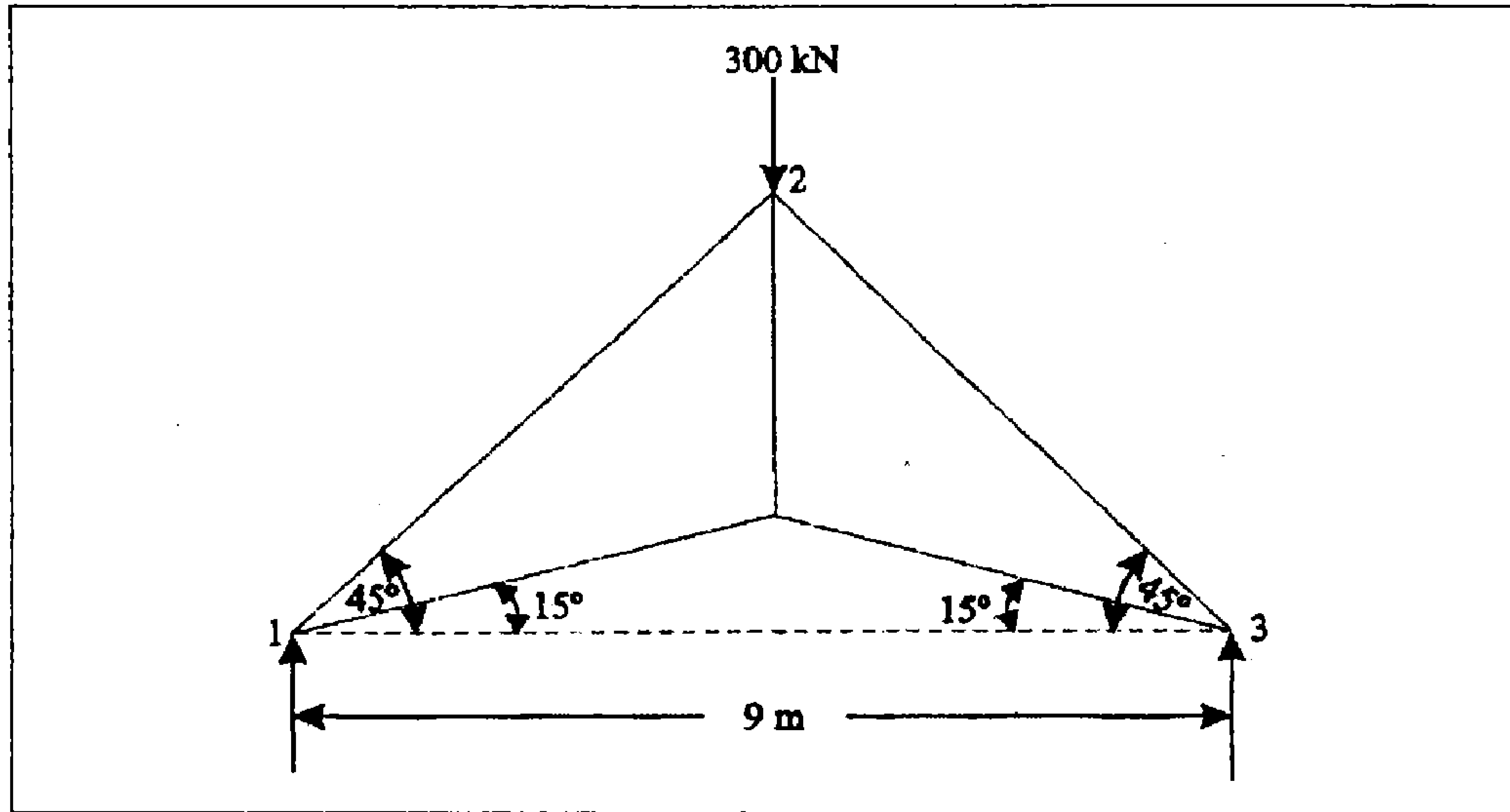
بعد ذلك يتم التعامل مع جزء من المنشأ، على أي جانب من الخط المقطعي، على إنه جسم حر في وضع اتزان تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية. ومن ثم يتم إيجاد القوى المجهولة عن طريق تطبيق الاتزان أو المبادئ الاستاتيكية أي أن ($\Sigma M=0$).

يمكن ملاحظة أنه *في أثناء رسم خط مقطعي، ينبغي الاعتناء بألا يقطع أكثر من ثلاثة عناصر، والتي فيها ثلاثة قوى مجهولة*.

الأمثلة العملية

المثال رقم (١)

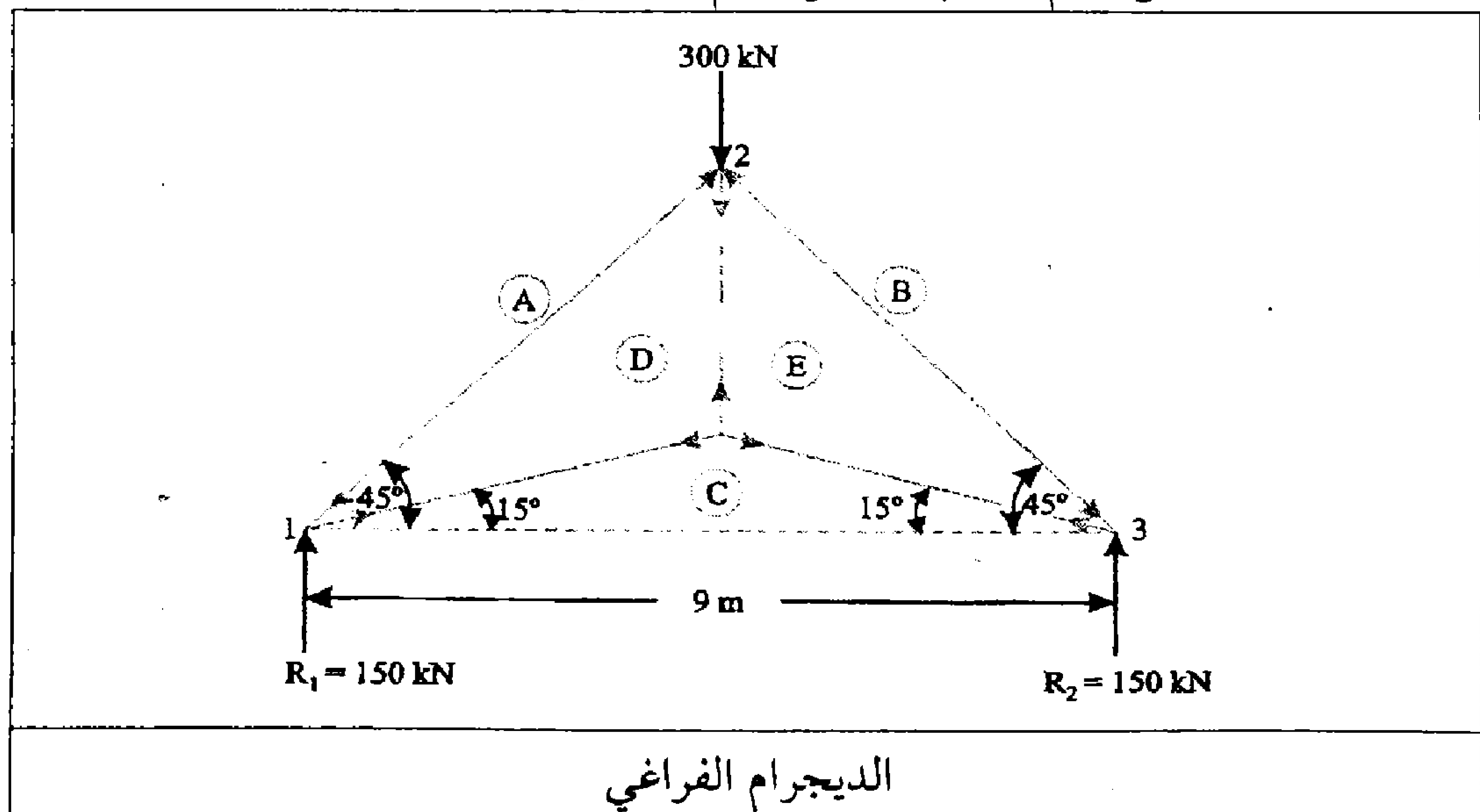
أوجد القوى المتولدة في العناصر المختلفة لجمالون السطح **roof truss** الموضح في الشكل التالي:



الحل

الإجراء الخاص بتحديد القوى سيكون كالآتي:

(i) نقوم برسم الديجرام الفراغي space diagram (الموضح في الشكل التالي) بمقياس رسم مناسب (وليكن ١سم = ٢ متر).

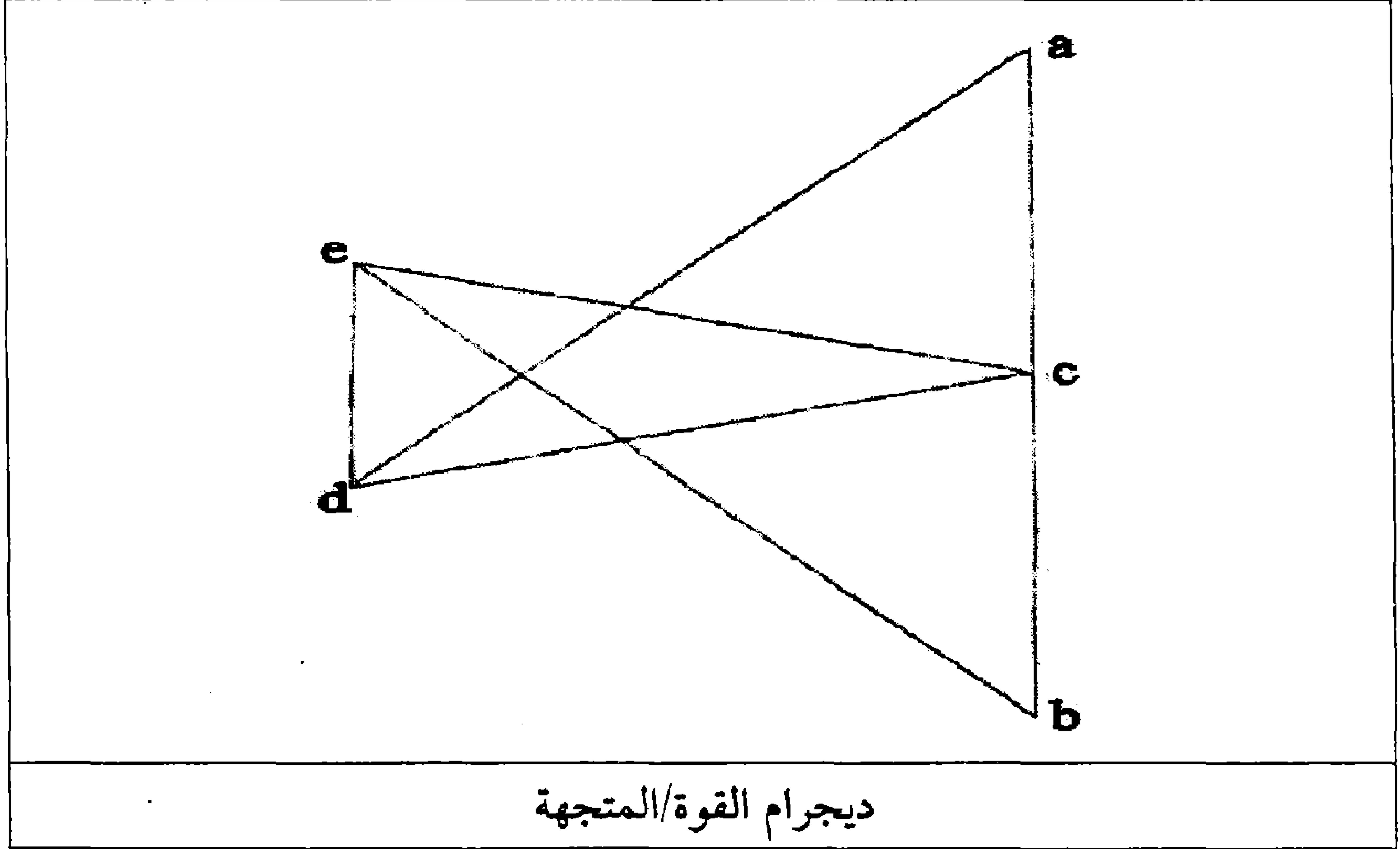


الديجرام الفراغي

(ii) نقـوم بتحديـد ردود الأفعـال إمـا بيانيًـا أو تحليليًـا. فـي هـذه الحالـة وحيـث أن الهيكل الإنشائي متماثل فمن ثم ستكون ردود الأفعال عبارة عن:

$R_1 = R_2 = 300/2 = 150$ kN

(iii) انظر الشكل التوضيحي السابق والشكل التوضيحي القادم.



ديجرام القوة/المتجهة

بعد إيجاد ردود الأفعال نبدأ مع الوصلة التي عندها لا توجد أكثر من قوتين مجهولتين، وفي هذه الحالة نستطيع البدء مع الوصلة رقم (١). هذه الوصلة متزنة وهي واقعة تحت تأثير رد الفعل CA (R_1) والقوى الموجودة بالعناصر AD وDC. وابتداءًا من القوة المعلومة في الديجرام الفراغي؛ يتم رسم ca موازيًا ومساويًا لرد الفعل CA (R_1). ومن a يتم رسم خط يوازي العنصر AD ومن c يتم رسم خط آخر يوازي CD، كلا الخطان يتقاطعان عند d. نقوم بقياس كل من ad وcd وضرب القيمة في مقياس الرسم المختار.

القوة في العنصر AD = ad = ٢٨٠ كيلونيوتن.

القوة في العنصر DC = dc = ٢٠٥ كيلونيوتن.

نقوم بدمج رؤوس الأسهم في العناصر AD وDC في الاتجاه ad وdc على الترتيب. إن القوة التي في العنصر AD عبارة عن قوة انضغاط والقوة التي في العنصر DC عبارة عن قوة شد.

سنقوم الآن بدراسة الوصلة رقم (٢)؛ هذه الوصلة تؤثر فيها أربعة قوى، وحمل رأسي قدره ٣٠٠ كيلونيوتن وإجهادات في العناصر AD وDE وEB على الترتيب. هذه الوصلة يمكن التعامل معها لأنه عندها القوتان في العنصرين DE وEB هما القوتان المجهولتان فقط. من b نرسم خط يوازي العنصر EB ومن d نرسم خط آخر يوازي العنصر DE، كلا الخطان يتقاطعان عند e. نقوم بقياس eb وde ونضربهما في المقياس المختار.

ومن ثم، القوة الموجودة في العنصر EB = ٢٨٠ كيلونيوتن (انضغاط) والقوة التي في العنصر DE = ١٠٠ كيلونيوتن (شد).

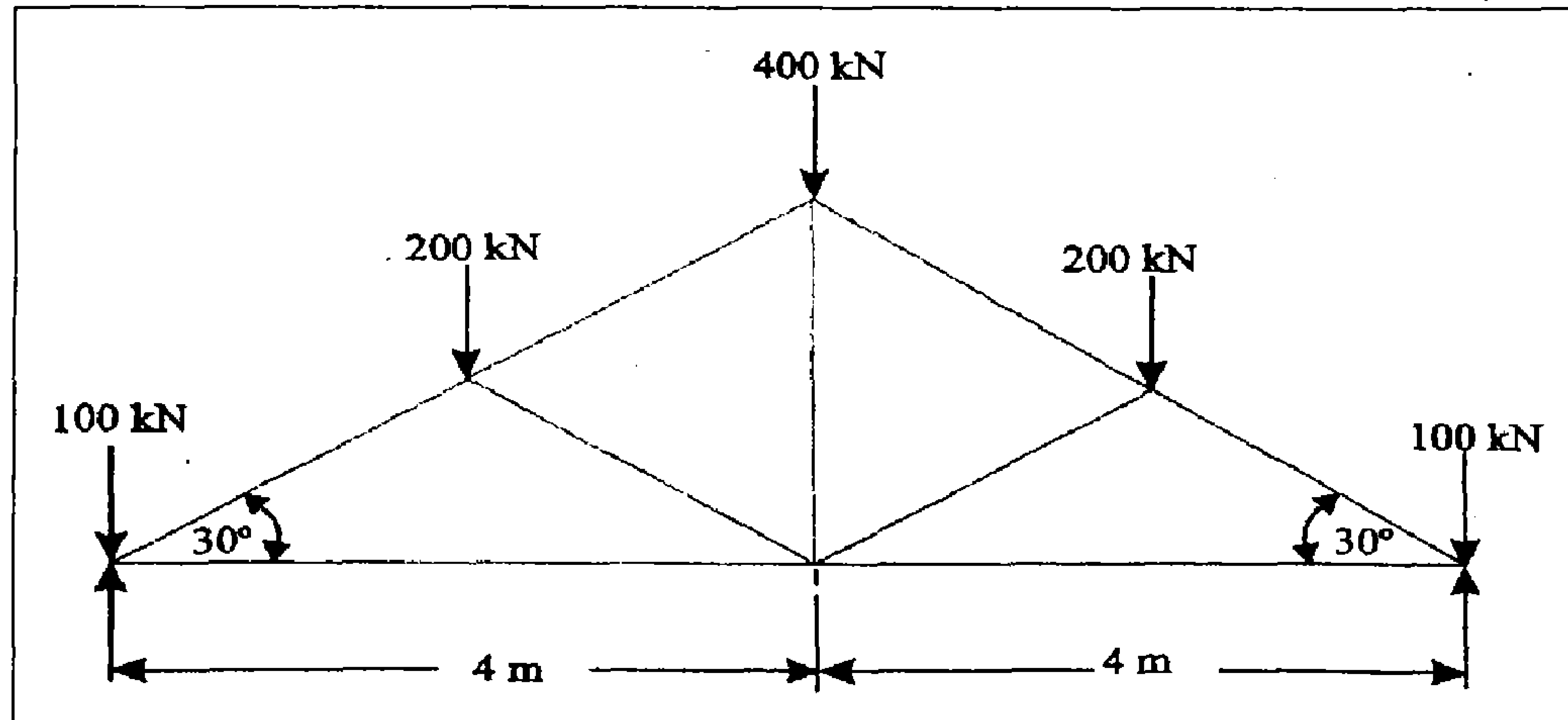
في النهاية نأخذ الوصلة رقم (٣). نصل النقطتين c, e. القوة في العنصر EC = ٢٠٥ كيلونيوتن (شد).

القوى الموجودة في العناصر المختلفة نشاهدها في الجدول التالي:

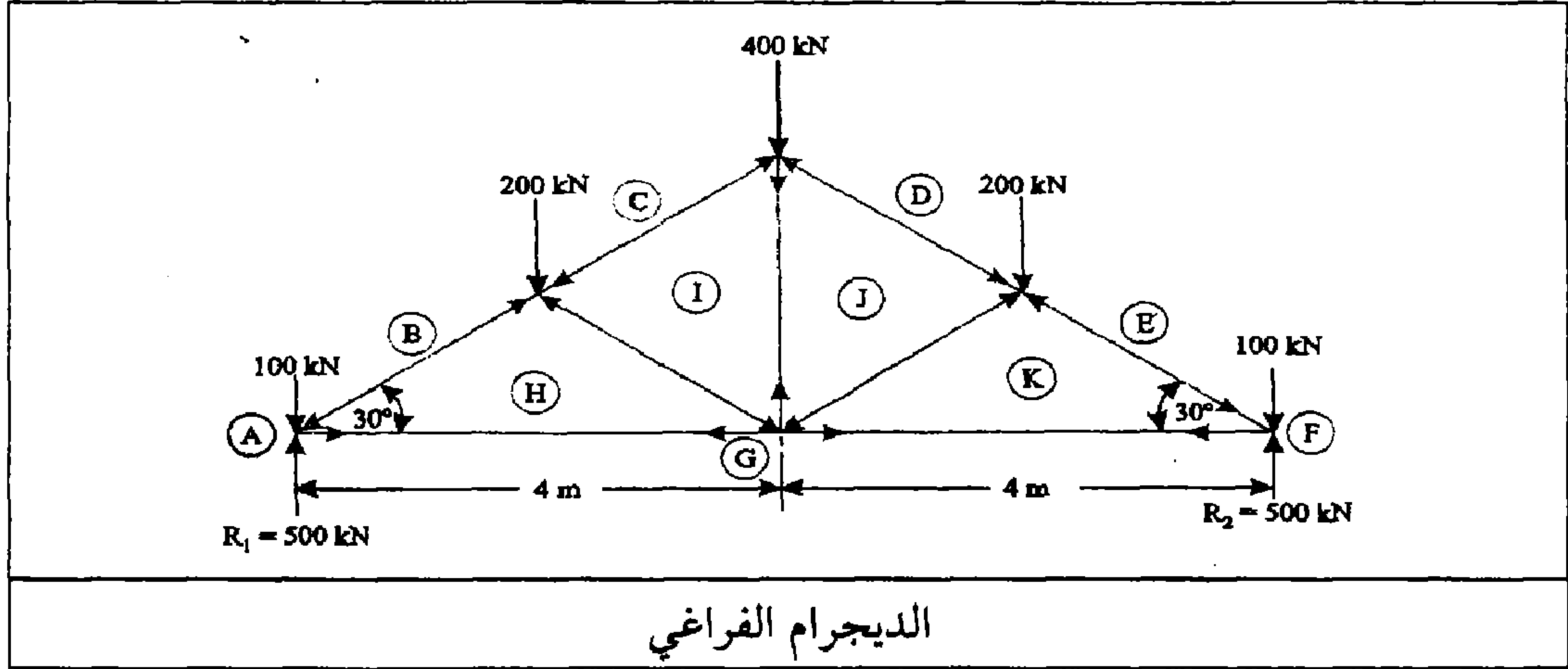
مسلسل	العنصر	مقدار القوة (كيلونيوتن)	طبيعة القوة
١	AD	٢٨٠	ضغط
٢	DC	٢٠٥	شد
٣	EB	٢٨٠	ضغط
٤	EC	٢٠٥	شد
٥	DE	١٠٠	شد

المثال رقم (٢)

أوجد القوى وطبيعتها الموجودة في العناصر المختلفة للجمالون الموضح في الشكل التالي:

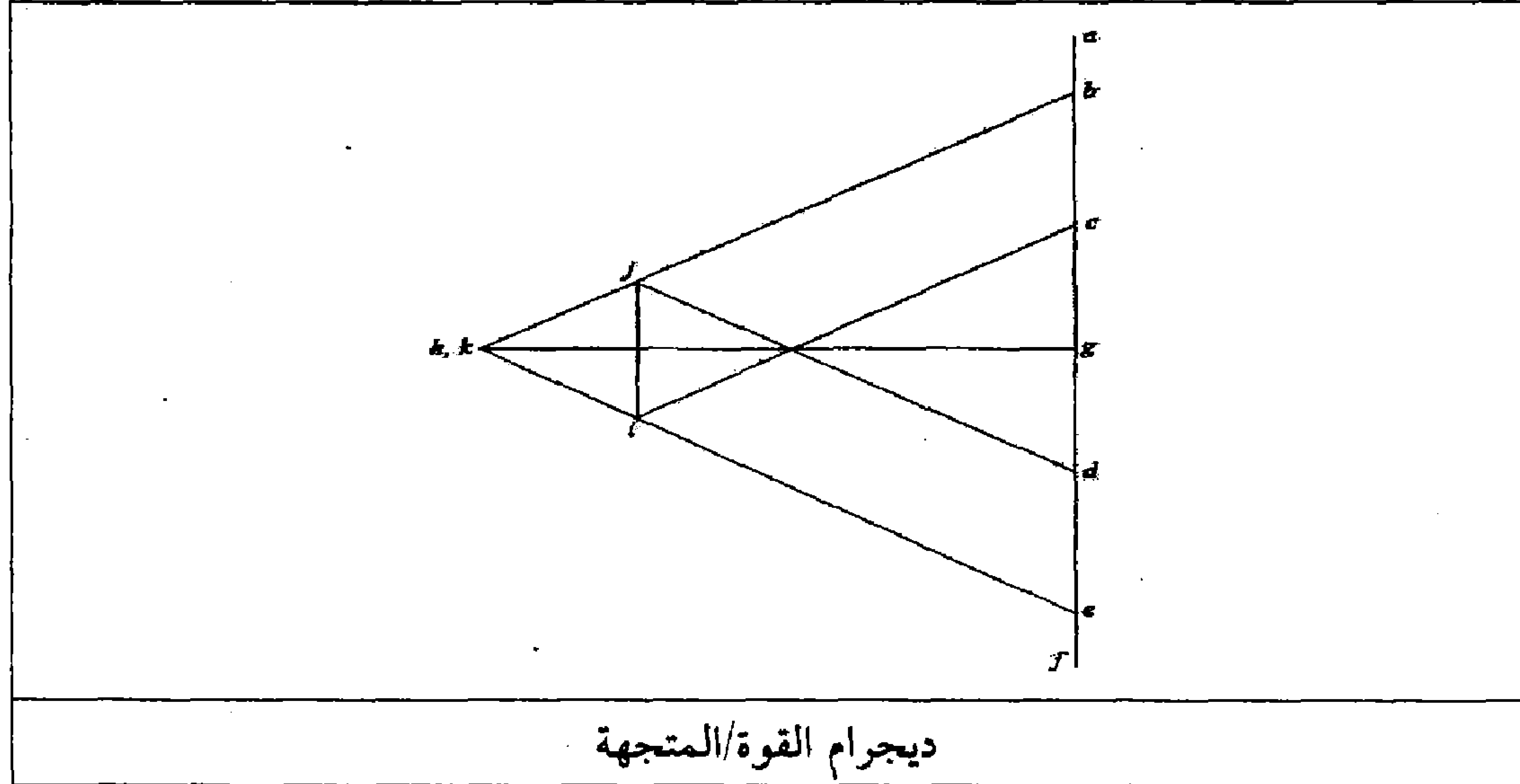


الحل



الديجرام الفراغي

نرسم ديجرام المتجهة/القوة (الموضح في الشكل التالي) للجمالون محل الدراسة:



ديجرام القوة/المتجهة

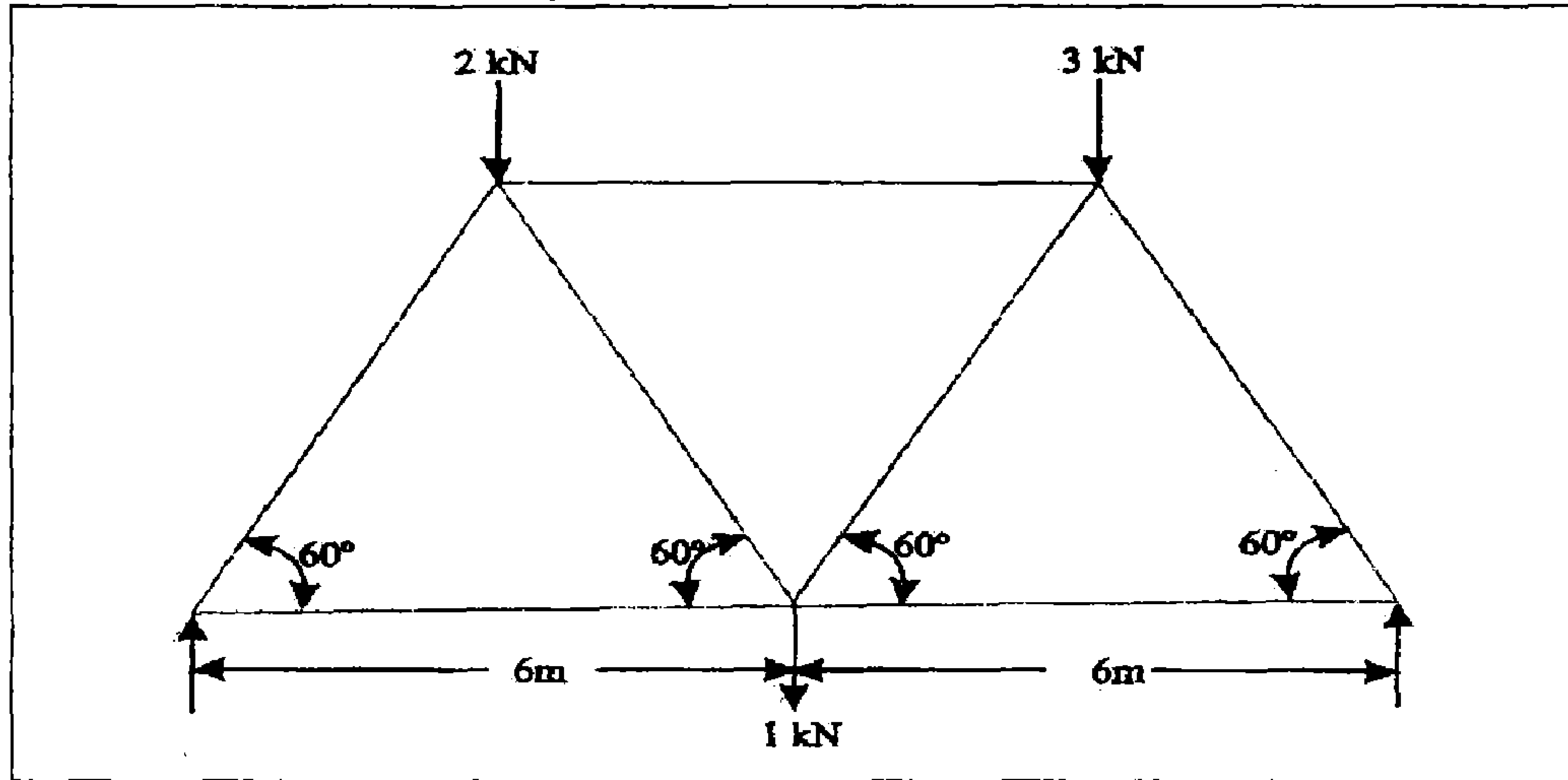
ردود الأفعال (R1) = (R2) = ٥٠٠ كيلونيوتن (حيث أن الجمالون والأحمال متماثلة). في الجدول التالي نشاهد القوى المتولدة في العناصر:

مسلسل	العنصر	مقدار القوة (كيلونيوتن)	طبيعة القوة
١	BH	٨٠٠	ضغط
٢	HG	٧٠٠	شد
٣	GK	٧٠٠	شد
٤	KE	٨٠٠	ضغط
٥	HI	٢٠٠	ضغط

٦	IJ	٢٠٠	شد
٧	JK	٢٠٠	ضغط
٨	CI	٦٠٠	ضغط
٩	DJ	٦٠٠	ضغط

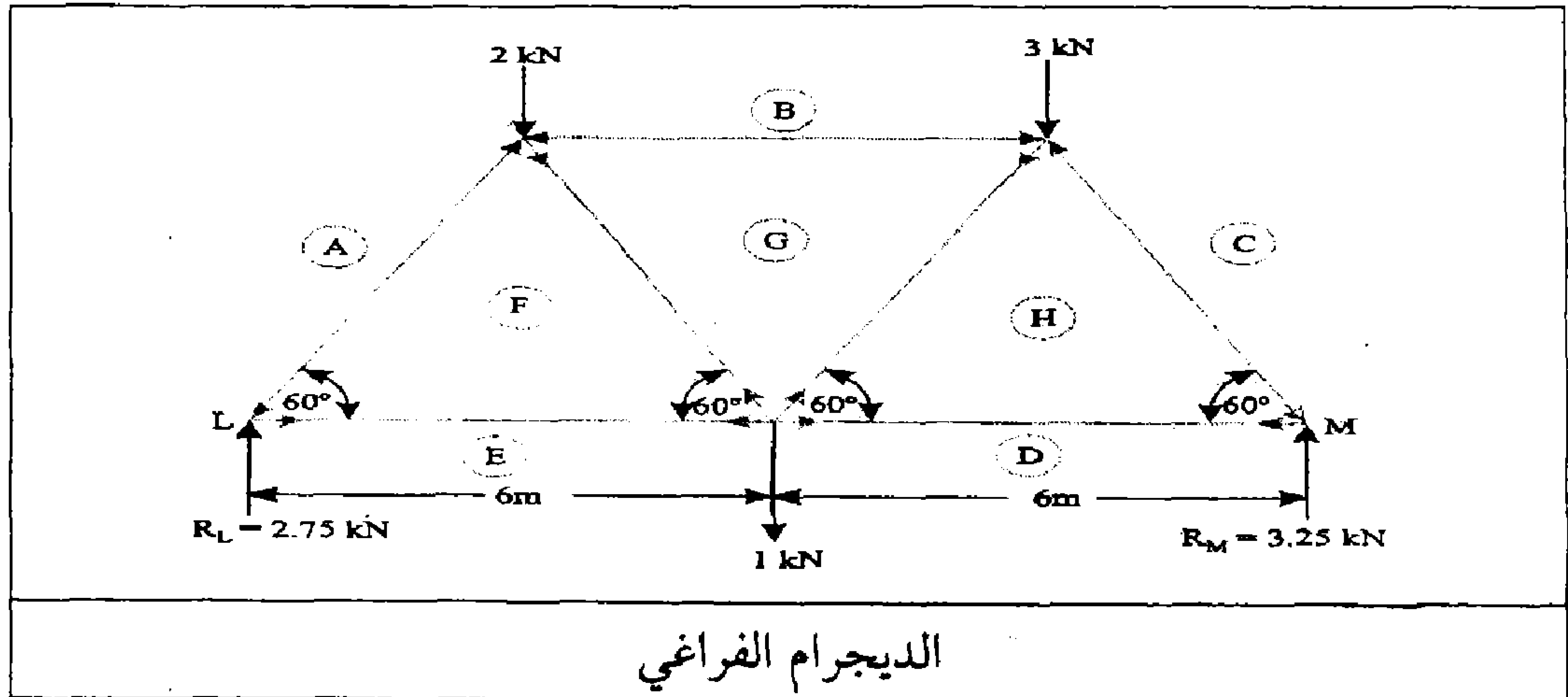
المثال رقم (٣)

حدد القوى في المتولدة عناصر الهيكل الإنشائي الموضح في الشكل التالي:



الحل

في الشكل التالي نشاهد الديجرام الفراغي للهيكل الإنشائي محل الدراسة:



الديجرام الفراغي

لإيجاد ردود الأفعال بأخذ العزوم حول L، نحصل على الآتي:

$$R_M \times 12 = 3 \times 9 + 1 \times 6 + 2 \times 3 = 27 + 6 + 6 = 39$$

إذن:

$R_M = 39/12 = 3.25$ kN

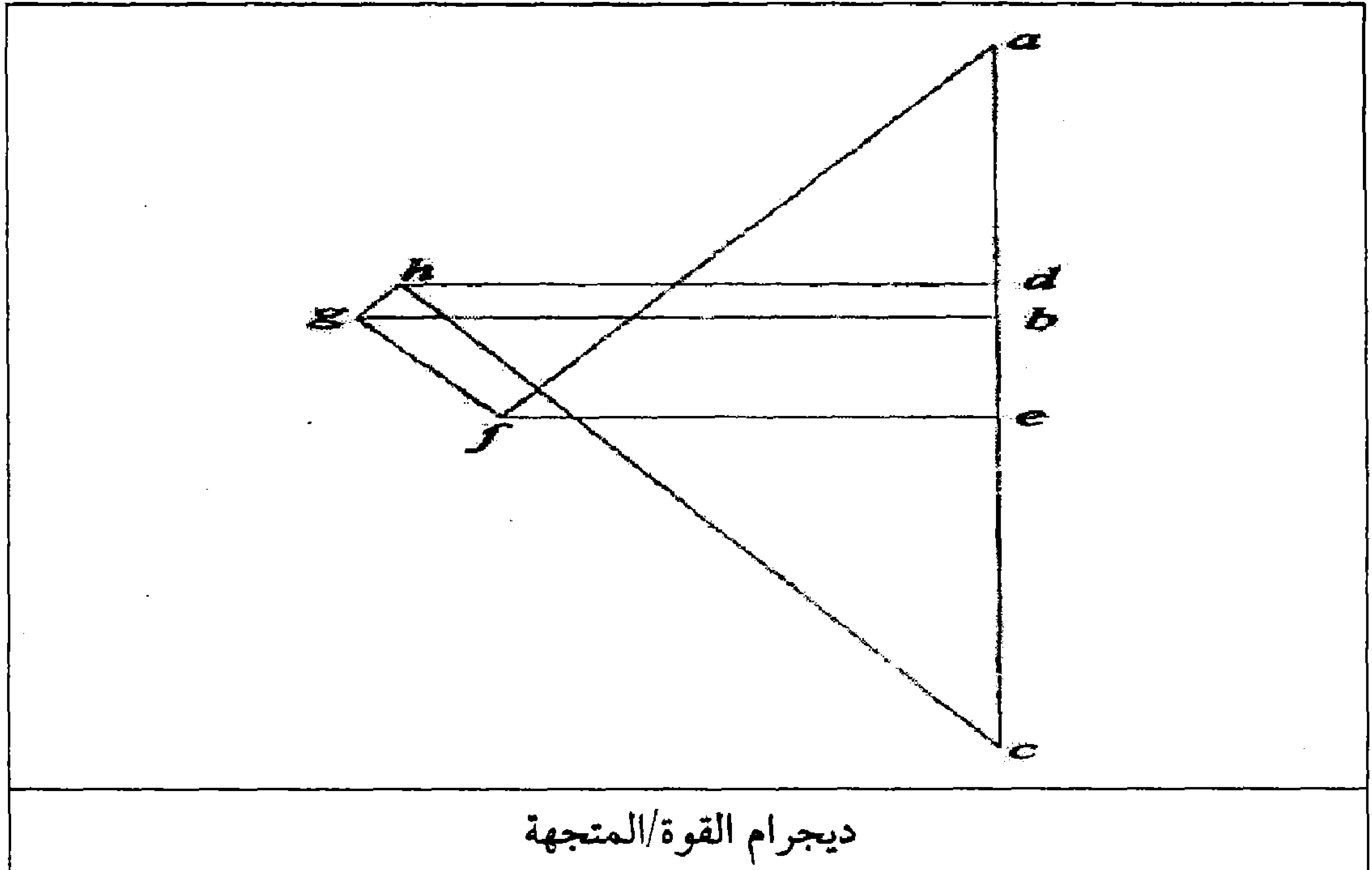
وأيضًا:

$$R_L + R_M = 2 + 3 + 1 = 6 \text{ kN}$$

إذن:

$$R_L = 6 - 3.25 = 2.75 \text{ kN}$$

ديجرام القوة/المتجهة للهيكل الإنشائي محل الدراسة نشاهده في الشكل التالي:



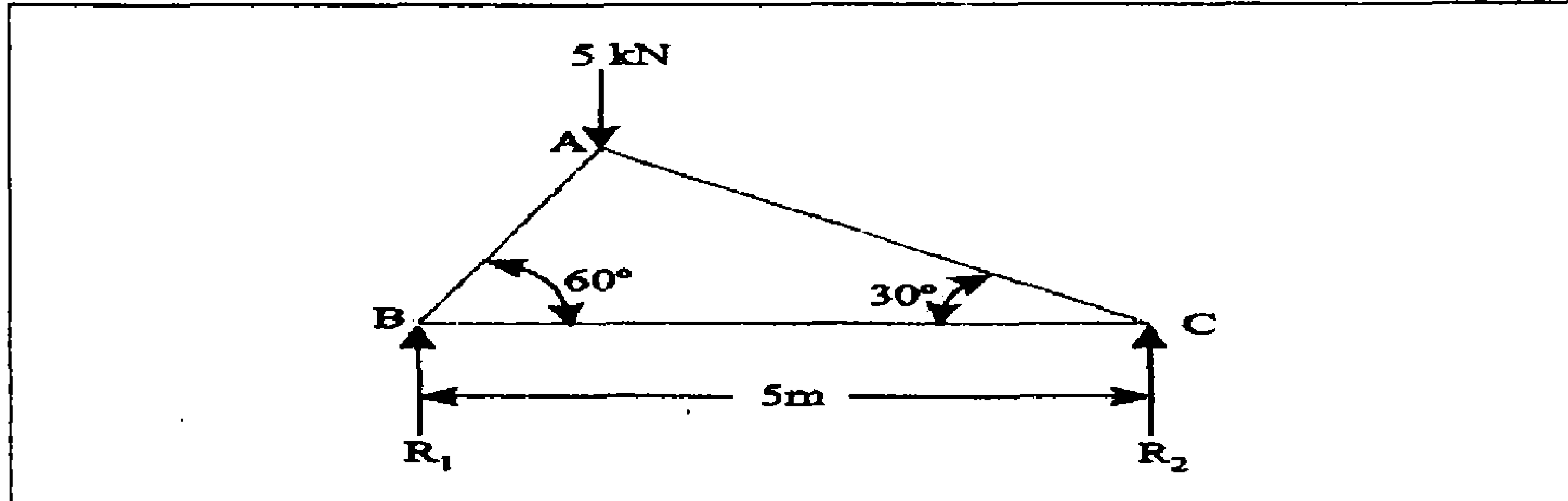
ديجرام القوة/المتجهة

أما قيم القوى فنشاهدها في الجدول التالي:

مسلسل	العنصر	مقدار القوة (كيلونيوتن)	طبيعة القوة
١	AF	٣.١٥	ضغط
٢	FE	١.٦	شد
٣	FG	٠.٨٥	شد
٤	GB	٢	ضغط
٥	GH	٠.٢٥	شد
٦	HC	٣.٧٥	ضغط
٧	HD	١.٨٧	شد

المثال رقم (٤)

في الشكل التالي نشاهد جمالون ببحر طوله ٥ متر ويحمل حملاً قدره ٥ كيلونيوتن عند قمته:



أوجد القوى المتولدة في كل عناصر الجمالون.

الحل

لإيجاد ردود الأفعال (R_1) و(R_2):

بأخذ العزوم حول (A)، نحصل على الآتي:

$$R_2 \times 5 = 5 \times 1.25$$

$$R_2 = \frac{5 \times 1.25}{5} = 1.25 \text{ kN}$$

ولكن:

$$R_1 + R_2 = 5$$

إذن:

$$R_1 = 5 - R_2 = 5 - 1.25 = 3.75 \text{ kN}$$

(من خلال الوضع الهندسي بالشكل التوضيحي السابق، نجد أن مسافة القوة ٥ كيلونيوتن تكون ١.٢٥ متر من B).

هذا المثال يمكن أن يُحل بأي من الآتي:

(١) طريقة الوصلات.

(٢) طريقة المقاطع.

ونحن سوف نقوم بحل هذا المثال بالطريقتين كالآتي.

(١) طريقة الوصلات:

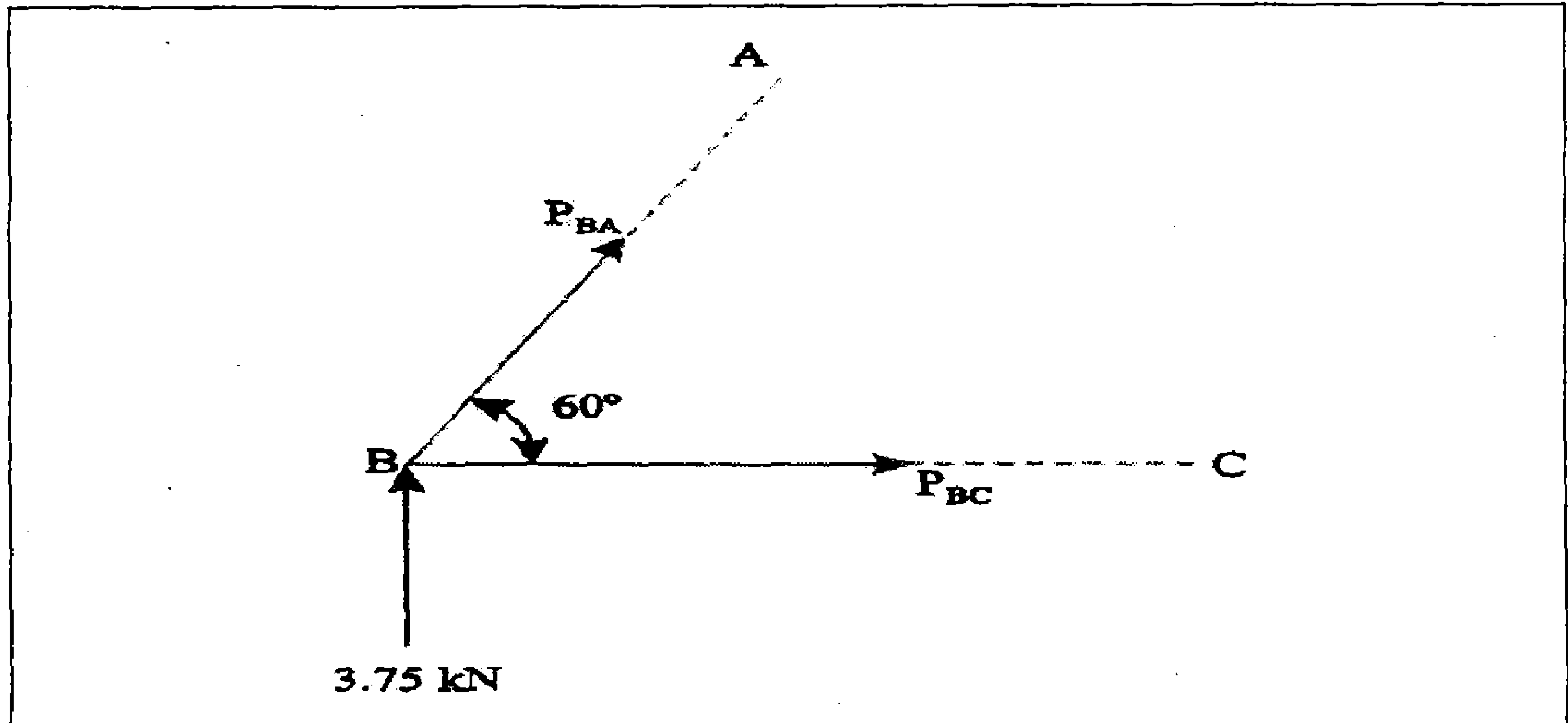
في أثناء حل المسائل المشتملة على جمالونات بطريقة الوصلات نهتم الوصلة الأولى، التي عندها لا توجد أكثر من قوتين مجهولتين. وفي حالتنا هذه نستطيع التعامل مع

أي وصلة حيث أن كل وصلة (A, B, C) لا تشتمل على أكثر من قوتين مجهولتين.

- للبدء من خلال افتراض أن القوى عبارة عن شد في كل عناصر الوصلة وبناءًا على ذلك يتم تحديد اتجاهات الأسهم. لو أننا حصلنا على قيمة موجبة بالنسبة لقوة معينة، حينئذ يكون افتراضنا صحيحًا والقوة الموجودة في ذلك العنصر تكون شد، ولو أننا حصلنا على قيمة سالبة فإن هذا يدل على أن افتراضنا خطأ والقوة الموجودة في ذلك العنصر عبارة عن انضغاط.
- لنعتبر الآتي:
  - القوى المتجهة لأعلى موجبة الإشارة.
  - القوى المتجهة لأسفل سالبة الإشارة.
  - القوى المؤثرة في اتجاه اليمين موجبة الإشارة.
  - القوى المؤثرة في اتجاه اليسار سالبة الإشارة.

الوصلة (**B**):

انظر الشكل التالي:



وبتحليل القوى رأسيًا وبتطبيق المبدأ (ΣV=0)، نحصل على الآتي:

$$3{\cdot}75 + P_{BA}\sin 60^\circ = 0$$

$$3{\cdot}75 + 0{\cdot}866\,P_{BA} = 0$$

$$P_{BA} = -\frac{3{\cdot}75}{0{\cdot}866} = 4{\cdot}33\ \text{kN}$$

الإشارة السالبة تدل على أن افتراضنا الأصلي لـ (P_{BA}) وهو أنه شد كما هو موضح بالسهم في الشكل السابق عبارة عن افتراضًا خاطئًا وينبغي أن يكون شيء آخر، أي أن:

$$P_{BA} = P_{AB} = 4{\cdot}33\ \text{kN}\ (\textit{compression})$$

وبتحليل القوى أفقيًا وبتطبيق المبدأ (ΣH=0)، نحصل على الآتي:

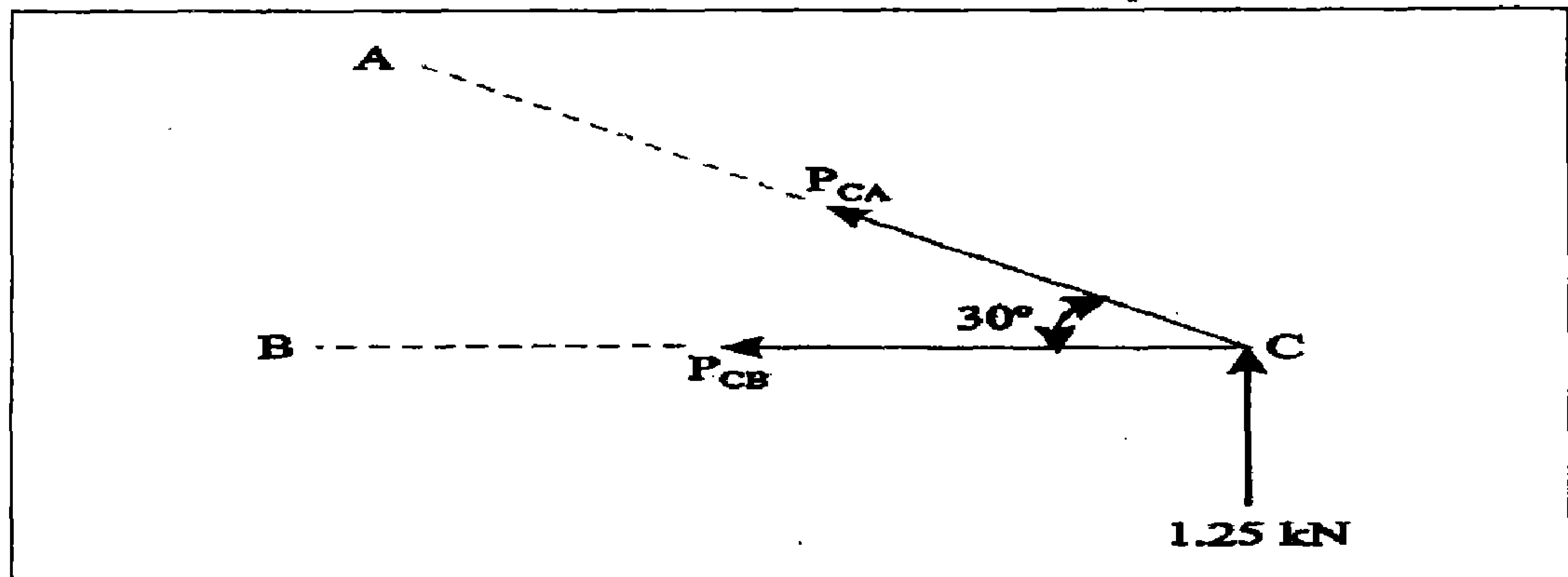
$P_{BA}\cos 60° + P_{BC} = 0$

$-4{\cdot}33\cos 60° + P_{BC} = 0$

$P_{BC} = P_{CB} = 43\cos 60° = 2{\cdot}165$ kN (*tension*)

الوصلة (C):

انظر الشكل التالي:



بتحليل القوى رأسيًا وبتطبيق المبدأ (ΣV=0)، نحصل على الآتي:

$P_{CA}\sin 30° + 1{\cdot}25 = 0$

$P_{CA}\times 0{\cdot}5 = -1{\cdot}25$

$P_{CA} = -\dfrac{1{\cdot}25}{0{\cdot}5} = -2{\cdot}5$ kN

الإشارة السالبة تدل على أن افتراضنا الأصلي لـ (P_{CA}) وهو أنه شد كما هو موضح بالسهم في الشكل السابق عبارة عن افتراضًا خاطئًا وينبغي أن يكون شيء آخر، أي أن:

$P_{CA} = P_{AC} = 2{\cdot}50$ kN (*compression*)

وبتحليل القوى أفقيًا وباستخدام المبدأ (ΣH=0)، نحصل على الآتي:

$-P_{CA}\cos 30° - P_{CB} = 0$

$-(-2{\cdot}5)\cos 30° = P_{CB}$

$P_{CB} = 2{\cdot}5\cos 30° = 2{\cdot}165$ kN

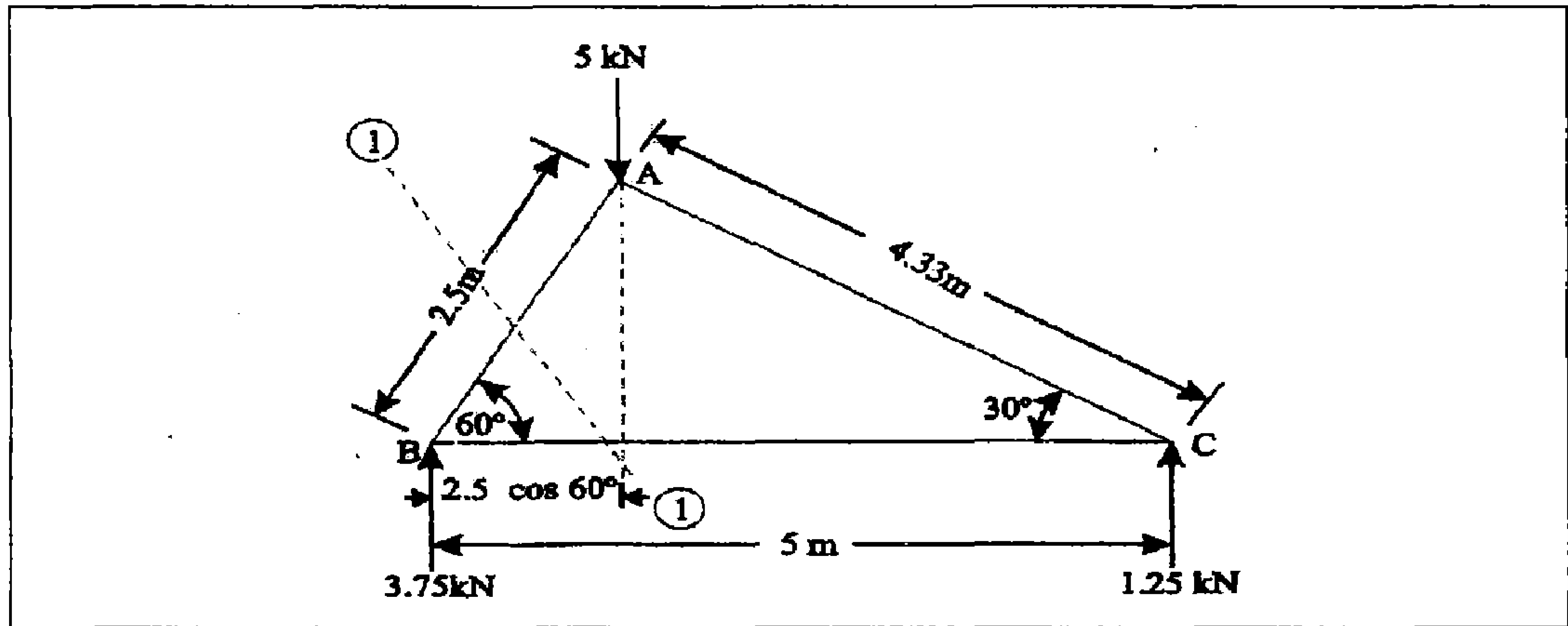
$P_{C3} = P_{BC} = 2{\cdot}165$ kN (As already obtained)

الوصلة	العنصر	القوة
B	BA	٤.٣٣-
	BC	٢.١٦٥

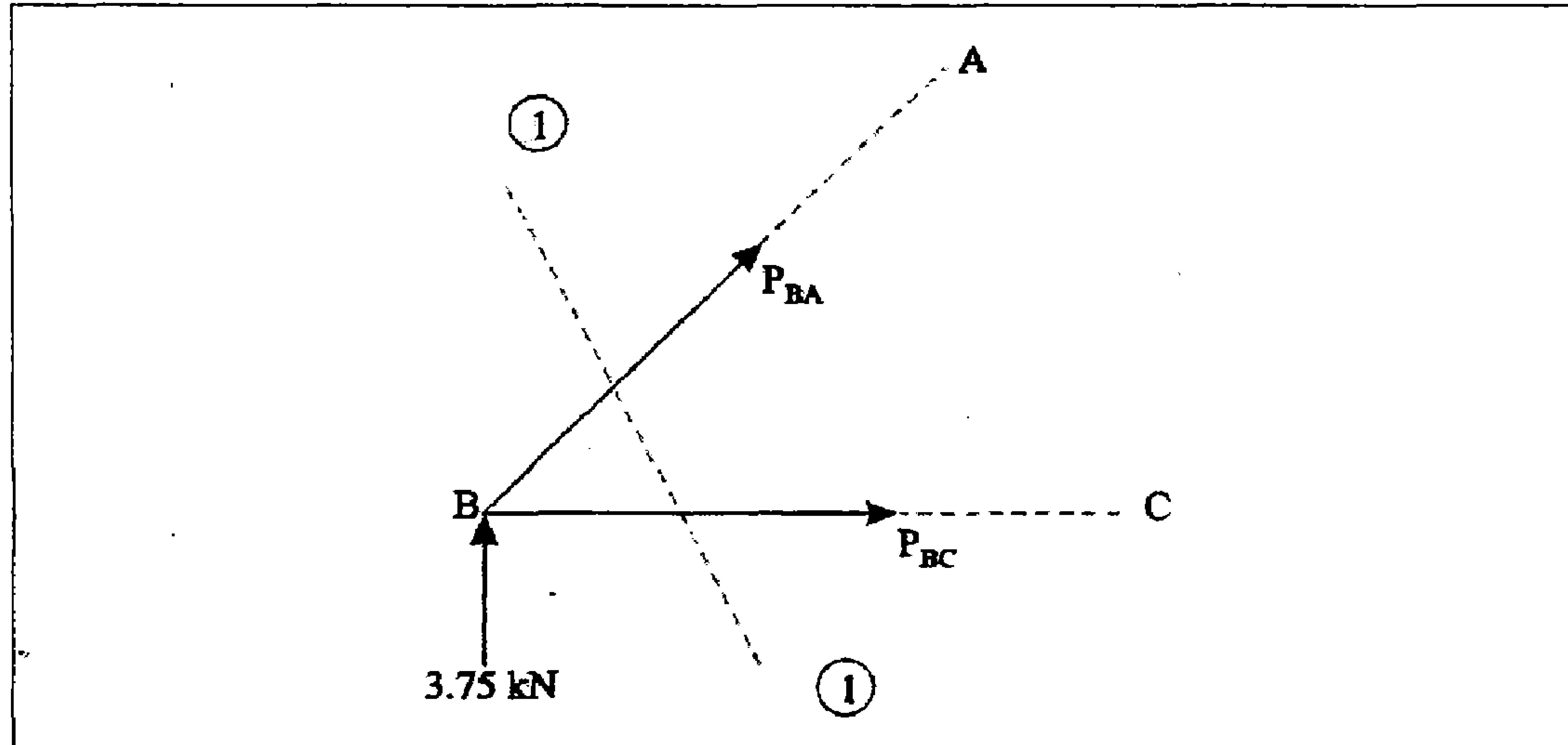
٤.٣٣-	AB	A
٢.٥-	AC	
٢.٥-	CA	C
٢.١٦٥	CB	

(٢) طريقة القطاعات:

انظر الشكل التالي:



بادئ ذي بدء، سنقوم بدراسة المقطع (1-1) الموضح في الشكل السابق. والآن، انظر الشكل التالي:



افترض أن القوى (P_{BA}) و(P_{BC}) عبارة عن قوى شد. والآن، لندرس اتزان الجزء الأيسر من المقطع (1-1).

وبأخذ عزوم كل القوى المؤثرة على يسار المقطع (١-١) حول C وبتطبيق المبدأ

($\Sigma M_C=0$)، نحصل على الآتي:

$$3{\cdot}75 \times 5 + P_{BA} \times 5 \sin 60° = 0$$

$$P_{BA} = -\frac{3{\cdot}75 \times 5}{5 \sin 60°} = -\frac{3{\cdot}75 \times 5}{5 \times 0{\cdot}866} = -4{\cdot}33 \text{ kN}$$

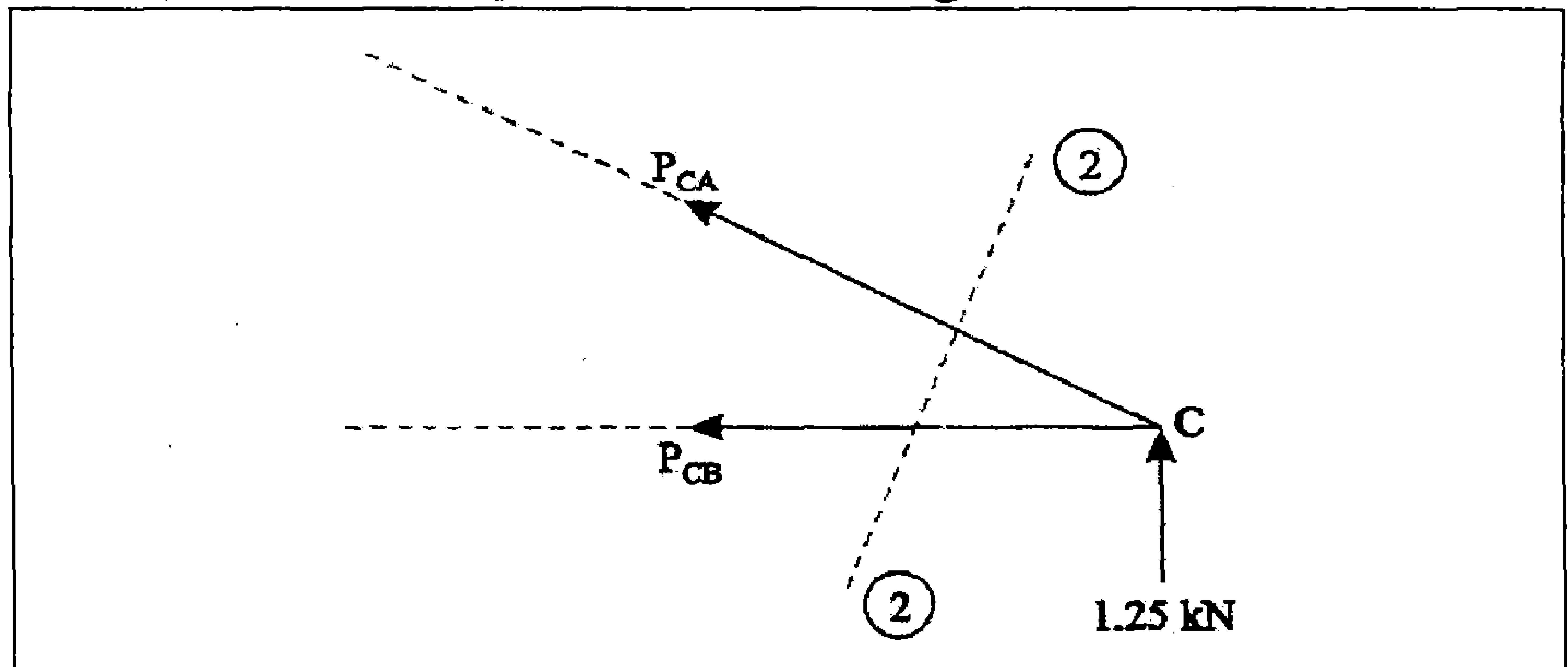
الإشارة السالبة تدل على أن (P_{BA}) انضغاطية.

بعد ذلك، وبأخذ عزوم القوى (وهي (P_{BA}) و(P_{BC})) المؤثرة على يسار المقطع (١-١) حول A، نحصل على الآتي:

$$3{\cdot}75 \times 2{\cdot}5 \cos 60° = P_{BC} \times 2{\cdot}5 \sin 60°$$

$$P_{BC} = \frac{3{\cdot}75 \times 2{\cdot}5 \cos 60°}{2{\cdot}5 \sin 60°} = 2{\cdot}165 \text{ kN } (\textit{tension})$$

والآن، لندرس المقطع (٢-٢). هذا المقطع يقطع العناصر AC, BC. سنقوم الآن بدراسة اتزان الجزء الأيمن من المقطع (٢-٢). انظر الشكل التالي:



والآن، بأخذ العزوم حول الوصلة B، نحصل على الآتي:

$$1{\cdot}25 \times 5 + P_{CA} \times 5 \sin 30° = 0$$

$$6{\cdot}25 + P_{CA} \times 5 \times 0{\cdot}5 = 0$$

$$P_{CA} = -\frac{6{\cdot}25}{2{\cdot}5} = -2{\cdot}50 \text{ kN}$$

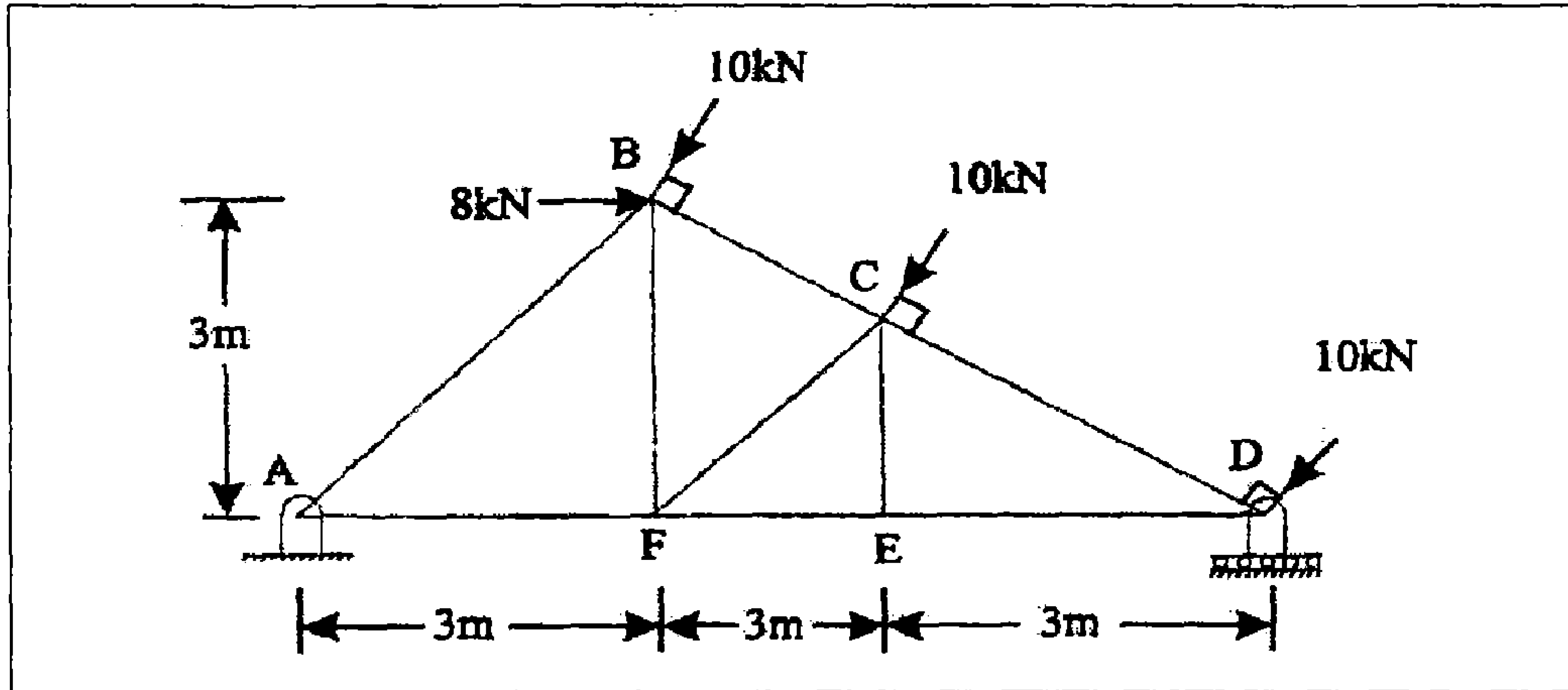
الإشارة السالبة توضح أن (P_{CA}) قوة ضغط. والآن بأخذ العزوم حول A (على الجزء الأيمن فقط)، نحصل على الآتي:

$$P_{CB} \times 2{\cdot}5 \sin 60° = 1{\cdot}25 \times 4{\cdot}33 \cos 30°$$

$$P_{CB} = \frac{1{\cdot}25 \times 4{\cdot}33 \cos 30°}{2{\cdot}5 \sin 60°} = 2{\cdot}165 \text{ kN } (\textit{tension}) \quad \text{(As already obtained)}$$

المثال رقم (٥)

أوجد ردود أفعال الدعامات والقوى المتولدة في العناصر BC, CA, EF, CE بالجمالون الموضح في الشكل التالي:

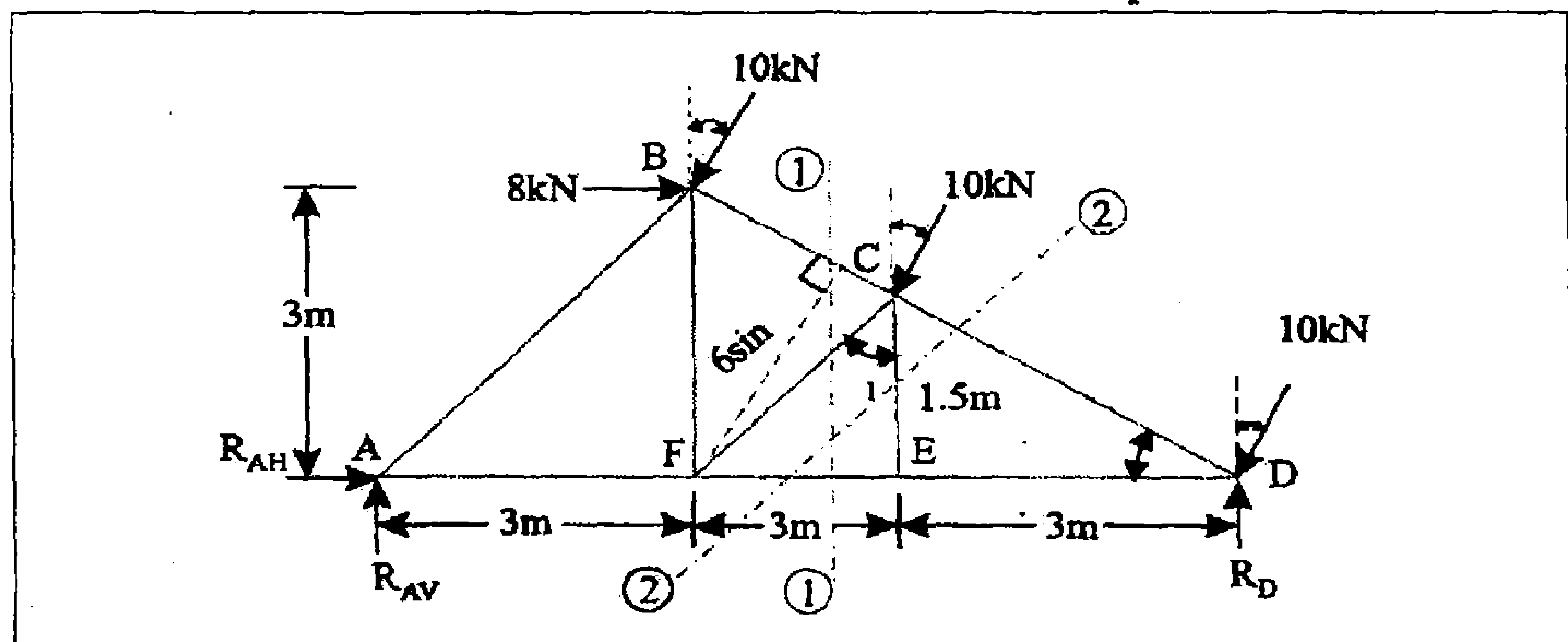


الحل

في البداية سنعتبر أن الجمالون بأكمله في وضع اتزان.

<u>الحسابات الخاصة بردود الأفعال:</u>

انظر الشكل التالي:



$$\tan\theta = \frac{3}{6}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 26{\cdot}56°$$

طول BD:

$$= \sqrt{6^2 + 3^2} = 6{\cdot}708 \text{ m}$$

طول BC = طول CD = ٦.٧٠٨/٢ = ٣.٣٥٤ متر.

بتطبيق شروط الاتزان، نحصل على الآتي:

$$\Sigma M_D = 0$$
$$R_{AV} \times 9 - 10 \times 6{\cdot}708 - 10 \times 3{\cdot}354 + 8 \times 3 = 0$$

إذن، (R_{AV}) = ٨.٥١ كيلونيوتن.

$$\Sigma V = 0$$
$$R_{AV} + R_D - 3 \times 10 \cos 26{\cdot}56° = 0$$
$$8{\cdot}51 + R_D - 3 \times 10 \cos 26{\cdot}56° = 0$$

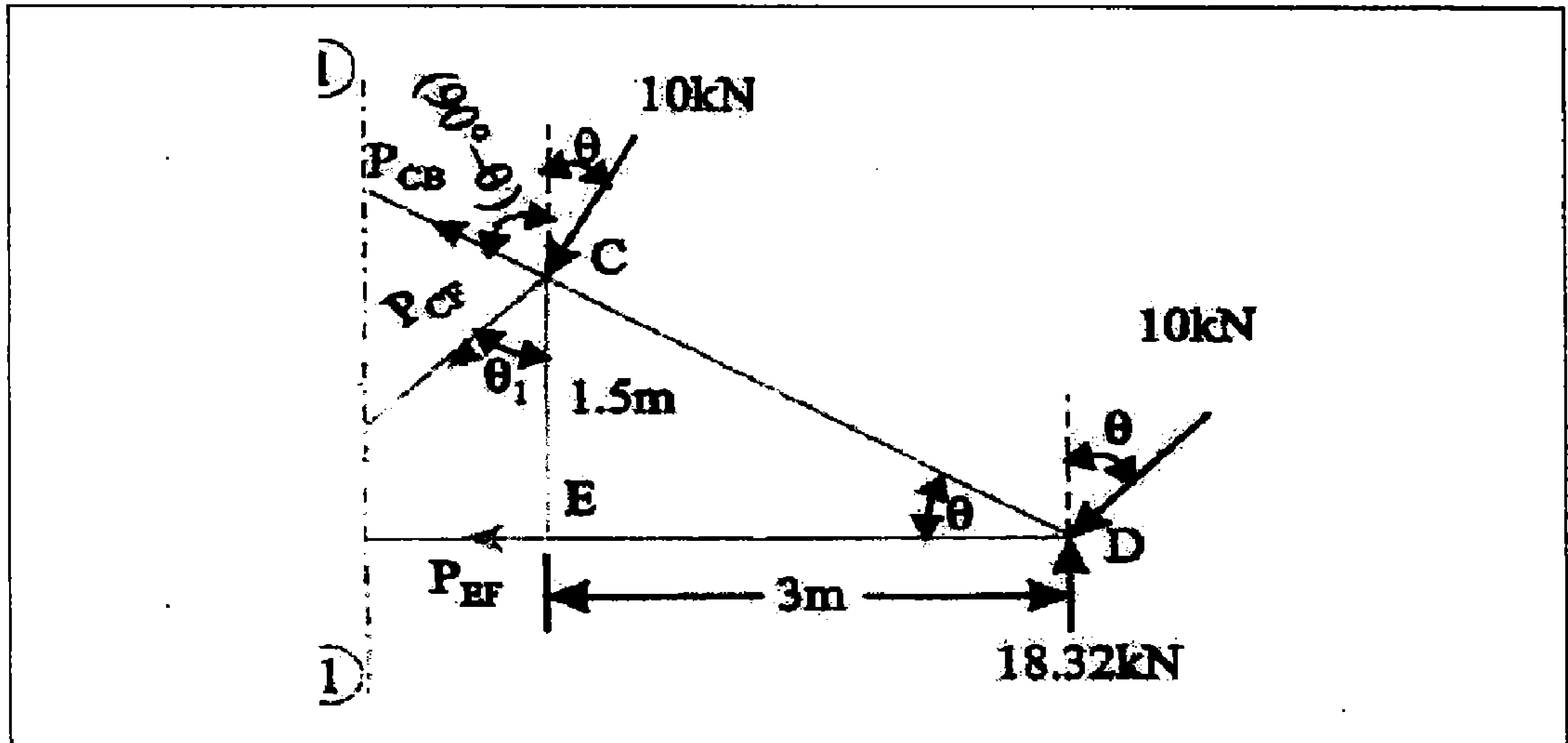
إذن (R_D) = ١٨.٣٢ كيلونيوتن (لأعلى).

$$\Sigma H = 0$$
$$R_{AH} + 8 - 3 \times 10 \sin 26{\cdot}56° = 0$$

إذن، (R_{AH}) = ٥.٤١٧ كيلونيوتن (إلى اليمين).

تحديد القوى المتولدة في العناصر BC, CA, EF, CE:

- نرسم قطاع (١-١) بحيث يقطع العناصر BC, CF, EF كما هو موضح في الشكل التالي:



$$\Sigma M_C = 0$$
$$P_{EF} \times 1{\cdot}5 + 10 \times 3{\cdot}354 - 18{\cdot}32 \times 3 = 0$$
$$P_{EF}\ (= P_{FE}) = 14{\cdot}28 \text{ kN} \quad (\textit{tensile})$$
$$\Sigma M_F = 0$$
$$- P_{CB} \times 6 \sin 26{\cdot}56° + 10 \cos 26{\cdot}56° \times 3 - 10 \sin 26{\cdot}56° \times 1{\cdot}5$$
$$+ 10 \cos 26{\cdot}56° \times 6 - 18{\cdot}32 \times 6 = 0$$
$$- 2{\cdot}683\, P_{CB} + 26{\cdot}83 - 6{\cdot}707 + 53{\cdot}67 - 109{\cdot}92 = 0$$

إذن، (P_{CB}) = -١٣.٤٦ كيلونيوتن.

الإشارة السالبة تدل على أن العنصر BC ليس عنصر شد بل إنه واقع تحت ضغط، بمعنى:

$P_{CB}\ (= P_{BC}) = 13{\cdot}46\ \text{kN}\quad (\textit{compressive})$

$\Sigma M_D = 0$

ومن الـ geometry، نجد أن:

$\tan\theta_1 = \frac{3}{1{\cdot}5} = 63{\cdot}43°$

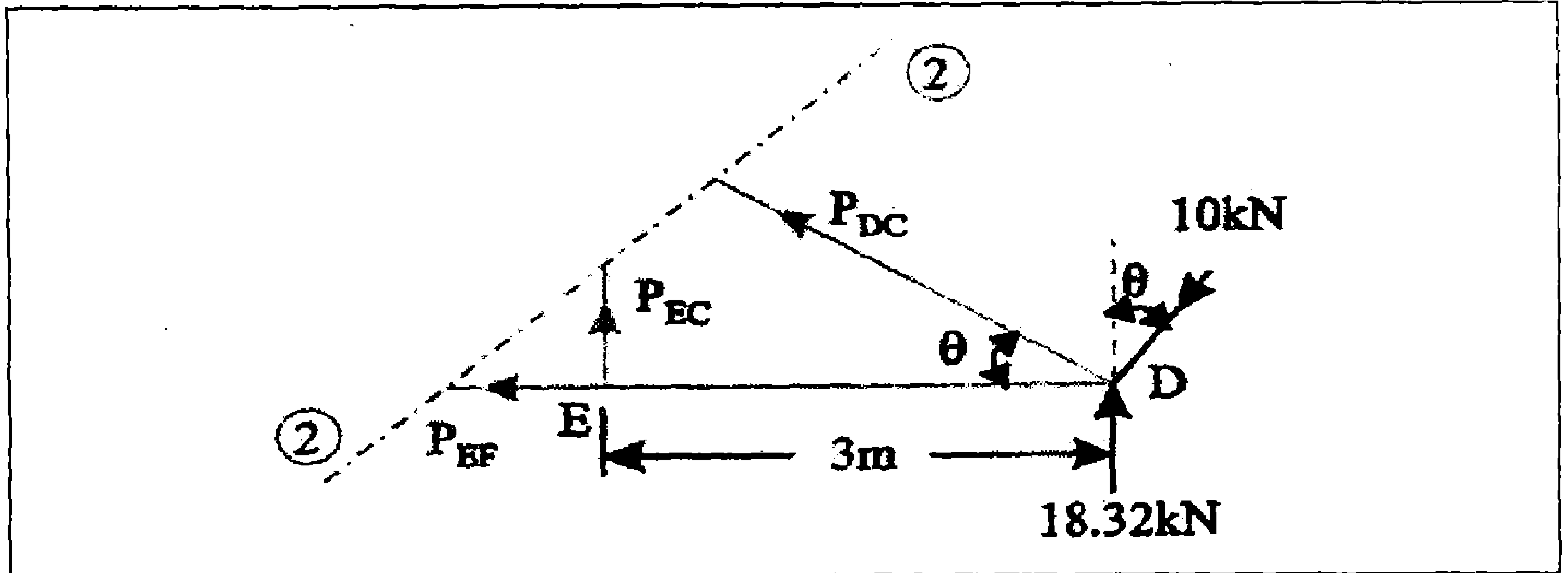
$-P_{CF}\cos 63{\cdot}43° \times 3 - P_{CF}\sin 63{\cdot}43° \times 1{\cdot}5 - 10 \times 3{\cdot}354 = 0$

$-1{\cdot}342\ P_{CF} - 1{\cdot}342\ P_{CF} - 33{\cdot}54 = 0$

إذن، (P_{CF}) = −١٢.٥ كيلونيوتن، أي أن:

$P_{CF}\ (= P_{FC}) = 12{\cdot}5\ \text{kN}\quad (\textit{compressive})$

- نرسم قطاع عرضي (٢-٢) يمر عبر العناصر EF, CE, CD كما هو موضح في الشكل التالي:



$\Sigma M_D = 0$

$P_{EC} \times 3 = 0$

$P_{EC}\ (= P_{CE}) = 0$

النتائج في صورة جدولية:

العنصر	القوة (كيلونيوتن)
EF	١٤.٢٨
BC	١٣.٤٦-
CF	١٢.٥-
EC	صفر

المحتويات

الفصل العاشر

الفصل الحادى عشر

الفصل الثانى عشر

دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع
٥٠ شارع الشيخ ريحان - عابدين - القاهرة
☎ ٢٧٩٥٤٢٢٩
www.sbh-egypt.com
e-mail : sbh@link.net
Scientific Book House





دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع
٥٠ شارع الشيخ ريحان - عابدين- القاهرة
☎ ٢٧٩٥٤٢٢٩
www.sbhegypt.org
e-mail : sbh@link.net
: Info@sbhegypt.org